# 論文の内容の要旨

## 論文題目 Wrapping projections and decompositions of Kleinian groups

## (Wrapping 射影とクライン群の分解について)

氏名 田中　淳波

3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ のモデルを上半空間で与えると, その無限遠境界はリーマン球 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$ とみなせる. $\mathbb{H}^3$ の向きを保つ等長変換全体の群 $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^3)$ と $\hat{\mathbb{C}}$ の等角 (conformal) 同相写像全体の群 $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ は共に $PSL_2(\mathbb{C})$ と同一視される. $PSL_2(\mathbb{C})$ の離散部分群をクライン群と呼ぶ. $\Gamma$ がクライン群であるとき, $\mathbb{H}^3$ 上の (任意の) 1 点の $\Gamma$ による軌道の集積点全体を極限集合と呼び, $\Lambda(\Gamma)$ と表す. $\hat{\mathbb{C}}$ における $\Lambda(\Gamma)$ の補集合 $\Omega(\Gamma) := \hat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(\Gamma)$ は不連続領域と呼ばれ, $\Gamma$ が真性不連続に作用する $\hat{\mathbb{C}}$ 上最大の開集合となる. クライン群 $\Gamma$ が捩れ元 (torsion) を持たないとき, 商 $\mathbb{H}^3/\Gamma$ は完備双曲 3 次元多様体となり, 逆に任意の完備双曲 3 次元多様体は捩れ元を持たないあるクライン群の商多様体であることが知られている.

$M$ をコンパクト, 向き付け可能かつ双曲化可能な 3 次元多様体とする. ここで双曲化可能 (hyperbolizable) とは, $M$ の内部 $\mathrm{Int}\, M$ がある完備双曲 3 次元多様体 $\mathbb{H}^3/\Gamma$ と同相であることである. 種数 2 以上の向き付け可能閉曲面 $S$ と閉区間 $I$ の直積 $S \times I$ はこの様な $M$ の一例となる. $\pi_1(M)$ から $PSL_2(\mathbb{C})$ への忠実かつ離散な表現の共役類全体の集合 $AH(M)$ を考える. Mumford 商により $AH(M)$ には位相が定まる. $\pi_1(M)$ が非可換のとき $AH(M)$ 上の点列 $\{\rho_m\}$ が $\rho$ に収束することは, 各 $\rho_m$ 及び $\rho$ を代表する表現 $\xi_m, \xi$ が存在して, 任意の元 $\gamma \in \pi_1(M)$ に対し, $\xi_m(\gamma)$ は $\xi(\gamma)$ に $PSL_2(\mathbb{C})$ 上収束することと同値である. 以下 $AH(M)$ の元 $\rho$ に対し, その元を代表する表現も $\rho$ で表し, その像 $\rho(\pi_1(M))$ を $\Gamma_\rho$, 商双曲 3 次元多様体 $\mathbb{H}^3/\Gamma_\rho$ を $N_\rho$ で表す.

クライン群の変形空間 $AH(M)$ の位相について次のことが知られている:

- $AH(M)$ の内部 $\mathrm{Int}\, AH(M)$ はいくつかのタイヒミュラー空間の商の非交和集合と同相である ([5] 7 章, ここでタイヒミュラー空間とは, 曲面上の指標付き等角構造全体のなす空間である),
- $\mathrm{Int}\, AH(M)$ の閉包は $AH(M)$ 自身に一致する（稠密性定理）([9] 4 節)

一方で $AH(M)$ 全体の位相空間としての描像は複雑であることも分かってきた. Anderson と Canary により $\mathrm{Int}\, AH(M)$ の異なる 2 成分が互いの境界で接触 (bump) する, すなわちそれらの成分の閉包が境界で共通点を持つ様な $AH(M)$ の最初の例が発見された ([1] 定理 3.1). Anderson, Canary と McCullough は, $M$ が圧縮不可能な境界のみを許す場合に, $\mathrm{Int}\, AH(M)$ の 2 つの成分が境界で接触するための必要十分条件 ([3] 系 1) を与えた. また McMullen が最初に $M = S \times I$ の場合に, Bromberg と Holt がより一般の場合に, $\mathrm{Int}\, AH(M)$ の 1 成分が境界で自己接触 (self-bump) する, すなわちいくらでも小さな近傍が $\mathrm{Int}\, AH(M)$ と非連結な交わりを持つ境界上の点が存在することを示した ([7] 定理 A.1 及び [4] 定理 4.5). ここで述べた

bumping あるいは self-bumping と呼ばれる現象の背景には, 次に説明する wrapping 射影の存在がある.

$\rho$ を $AH(M)$ 上の点とする. $\rho$ に収束する $AH(M)$ 上の列 $\{\rho_m\}$ を, 対応する双曲 3 次元多様体の列 $\{N_m\}$ が双曲 3 次元多様体 $\hat{N} = \mathbb{H}^3/\hat{\Gamma}$ に幾何学的に, すなわち Gromov-Hausdroff の意味で, 収束する様に取れる. このとき $\Gamma_\rho$ は $\hat{\Gamma}$ の部分群であり, $N_\rho$ から付随する幾何学的極限 $\hat{N}$ への自然な (被覆) 射影 $\pi_\rho$ が存在する. 次を仮定する:

- $N_\rho$ は accidental parabolic curve $\gamma$ と対応する annulus cusp 近傍 $Q$ を持つ,

- $\pi_\rho$ により $Q$ は $\hat{N}$ の torus cusp 近傍 $\hat{T}$ を被覆する,

- $\hat{\Gamma}$ の放物元 $\sigma$ と部分群 $\Gamma_0$ が存在して, $\rho(\gamma)$ と $\sigma$ は $\pi_1(\hat{T}) < \hat{\Gamma}$ を生成し, かつ $\hat{\Gamma} = \Gamma_0 *_\sigma$ が成り立つ.

この仮定の下, $n(\geq 0)$ が次の条件 $\mathcal{W}n$ を満たす最小の整数であるとき, $\pi_\rho$ は $\gamma$ ついて $n$ 回 wrap するという:
$\mathcal{W}n$: $N_\rho$ のコンパクト芯 (compact core)$K$ と $\pi_\rho$ の中間被覆となる双曲 3 次元多様体 $\bar{N} = \mathbb{H}^3/\bar{\Gamma}$ が存在して, 被覆 $\bar{\pi} : N_\rho \to \bar{N}$ の $K$ への制限は埋め込みとなり, かつ $\bar{\Gamma} = \Gamma_0 *_{\sigma^{(n+1)}}$ を満たす.

特に $n \geq 1$ のとき $\pi_\rho$ を wrapping 射影と呼ぶ.

ここで $N_\rho$ の accidental parabolic curve とは, $N_\rho$ の等角境界 (conformal boundary)$\partial_c N_\rho (:= \Omega(\Gamma_\rho)/\Gamma_\rho)$ の圧縮不可能な成分の上の本質的（すなわち homotopy によって 1 点や 1 つの puncture につぶれない）単純閉曲線で, $N_\rho \cup \partial_c N_\rho$ 上の homotopy により (双曲計量による) 長さがいくらでも短くなる様に動かせるもののことである. $\gamma$ をこの様な曲線とし, $\rho(\gamma)$ の生成する $\Gamma_\rho$ の放物部分群を $J$ とおく. Abikoff-Maskit の結果 ([2] 補題 2, 3) と Klein-Maskit の組み合わせ定理により, $\Gamma_\rho$ は, $\gamma$ が $S$ を 2 つに分割するとき $\Gamma_\rho = \Gamma_1 \underset{J}{*} \Gamma_2$, 分割しないとき $\Gamma_\rho = \Gamma' *_\delta$ (ただし $\Gamma_1$,$\Gamma_2$ 及び $\Gamma'$ は $\Gamma_\rho$ の部分群, $\delta$ は $\Gamma_\rho$ の元) と分解できることが分かっている. また $\hat{N}$ の torus cusp 近傍 $\hat{T}$ について, $\hat{N}$ の等角境界 $\partial_c \hat{N}$ の異なる 2 成分と cusp torus 近傍 $\hat{T}$ の境界 $\partial \hat{T}$ のそれぞれの上の本質的単純閉曲線が存在して, $\hat{N} \cup \partial_c \hat{N}$ 内で互いに homotopic となるとき, $\hat{N}$ の $\hat{T}$ が double trouble であるという.

そこで本論文の Theorem 3.1.1 では, $M = S \times I$ の場合に, $AH(S) := AH(S \times I)$ 上の点 $\rho$ が, accidental parabolic curve $\gamma$ を持ち, $\gamma$ に対応する annulus cusp 近傍 $Q$ の cusp が $N_\rho$ の幾何学的有限な, すなわち $\partial_c N_\rho$ の成分に対応する相対エンドに挟まれるいう仮定の下, $N_\rho$ から付随する幾何学的極限 $\hat{N} = \mathbb{H}^3/\hat{\Gamma}$ への射影 $\pi_\rho$ で, $\gamma$ について $n$ 回 wrap し, かつ $Q$ が被覆する $\hat{N}$ の torus cusp 近傍 $\hat{T}$ が double trouble であるものを持つための必要十分条件を $\Gamma_\rho$ の (wrapping を指定する)accidental parabolic curve $\gamma$ に沿った分解で得られる Klein 群 $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ あるいは $\Gamma'$ の $\hat{\mathbb{C}}$ への作用により次の様に与えた. $\rho(\gamma)$ の固定点を $p$ とおく.

**Theorem 3.1.1** (3.1.1)**.** *$\gamma$ が $S$ を分割する場合, 次が必要十分. $p$ を固定する $\Gamma_\rho$ の放物元 $\sigma$ と $\hat{\mathbb{C}}$ 上の $(\Gamma_i, J)$-不変な開円板 $C_i$, $D_i (i = 1, 2)$ が存在して次の条件 $\mathcal{DS}n$ を満たす.*

*$\mathcal{DS}n : \sigma^{n+1}(C_1) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{C_2}, \sigma^n(D_1) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_2}, \overline{C_i} \cap \Lambda(\Gamma_i) = \overline{D_i} \cap \Lambda(\Gamma_i) = p, \Lambda(\Gamma_i)$ は $C_i$ と $D_i$ を分離する ( すなわち $C_i$ と $D_i$ は $\Omega(\Gamma_i)$ の異なる成分に含まれる ).*

*ここで $C_i$ が $(\Gamma_i, J)$-不変であるとは, $\Gamma_i$ の任意の元 $f$ に対し, $f \in J$ のとき $f(C_i) = C_i$ を, $f \notin J$ のとき $f(C_i) \cap C_i = \emptyset$ を満たすことである.*

$\gamma$ が $S$ を分割しない場合, 次が必要十分. $\hat{\mathbb{C}}$ 上の $(\Gamma', J)$-不変な開円板 $C$, $D$, 及び $(\Gamma', J^{\delta^{-1}})$-不変な開円板 $C'$, $D'$ が存在して次の条件 $\mathcal{DN}n$ を満たす.

$\mathcal{DN}n : \sigma^{n+1}\delta(C') = \hat{\mathbb{C}}\setminus\overline{C}, \sigma^n\delta(D') = \hat{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}, \overline{C}\cap\Lambda(\Gamma') = \overline{D}\cap\Lambda(\Gamma') = p, \overline{C'}\cap\Lambda(\Gamma') = \overline{D'}\cap\Lambda(\Gamma') = \delta^{-1}(p)$, $\Lambda(\Gamma')$ は $C$ と $D$, $C'$ と $D'$ をそれぞれ分離し, 任意の $f \in \Gamma'$ に対し, $f(\overline{C}) \cap \overline{C'} = \emptyset, f(\overline{C}) \cap \overline{D'} = \emptyset, f(\overline{D}) \cap \overline{C'} = \emptyset, f(\overline{D}) \cap \overline{D'} = \emptyset$ が成り立つ ( この最後の条件を ( $*$ ) とおく ).

十分条件であることは次の様に示される. 条件 $\mathcal{DS}n$ 又は $\mathcal{DN}n$ を満たす $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円板に Klein-Maskit の組み合わせ定理を適用すると, $\Gamma_1^{\sigma^{n+1}} \underset{J}{*} \Gamma_2$, あるいは $\Gamma_{\sigma^{n+1}\delta}$ がクライン群であることが分かり, それを $\Gamma_0$ とおく.

Annulus cusp 近傍 $Q$ の cusp が幾何学的有限な相対エンドに挟まれるという仮定から, 任意の $f \in \Gamma_i$ に対し $f(C_i) \cap D_i = \emptyset$ (Claim3.2.1), あるいは任意の $f \in \Gamma'$ に対し $f(C) \cap D = \emptyset$ 及び $f(C') \cap D' = \emptyset$ (Claim3.2.5) が導かれる. この Claim と仮定 (円板の不変性及び $\mathcal{DN}n$ の場合は条件 $(*)$ も) を用いたピンポン議論から, 再び Klein-Maskit の組み合わせ定理が適用でき, $\Gamma_0 *_\sigma$ もクライン群であることが分かる. $\hat{\Gamma} = \Gamma_0 *_\sigma$, $\bar{\Gamma} = \Gamma_0 *_{\sigma^{n+1}}$, $\bar{N} = \mathbb{H}^3/\bar{\Gamma}$, $\hat{N} = \mathbb{H}^3/\hat{\Gamma}$ とおき, 射影 $\pi_\rho : N_\rho \to \hat{N} = (\bar{N} \to \hat{N}) \circ (\bar{\pi} : N_\rho \to \bar{N})$ を得る.

Klein-Maskit の組み合わせ定理は $\hat{N}$ が $\mathbb{H}^3/\Gamma_1$ と $\mathbb{H}^3/\Gamma_2$, あるいは $\mathbb{H}^3/\Gamma'$ を (一部を除いてから) 貼り合わせることで得られることも主張している. このことから $\bar{\pi}|_K$ が埋め込みとなる $N_\rho$ のコンパクト芯 $K$ も構成でき, 条件 $Wn$ が成り立つことが示される. 更に $n$ の最小性も $Q$ 周りの埋め込みをみることで確かめられる. また, この貼り合わせの議論から $N$ の位相構造, 特に $Q$ が被覆する torus cusp 近傍 ($\hat{T}$ とおく) が double trouble であることも分かる.

Ohshika と Soma([8]) は $\pi_1(S)$ と同型なクライン群 (の商双曲 3 次元多様体) の列の幾何学的極限の分類を与えていて, $\hat{N}$ はその位相構造からある擬フックス多様体の列 $\{N_m\}$ の幾何学的極限であることが分かる. 幾何学的極限の定義を与える biLipschitz 微分同相写像 $f_m$ による $\pi_\rho(K)$ の像を観察することで, $N_m$ のホロノミー表現として, $AH(S)$ 上 $\rho$ に収束する $\rho_m$ が得られ, $\hat{N}$ が $\rho$ に付随する幾何学的極限であることも従う. 以上で十分条件であることが分かる.

必要条件であることは次の様に示される. Double trouble の仮定から (無限遠) 境界を $\partial_c\hat{N}$ 上に持ち, puncture を $\hat{T}$ の cusp に持つ $\hat{N}$ 内の once-punctured disk $\hat{A}_+, \hat{A}_-$ が取れる. そのうちの 1 つ ($\hat{A}_-$ とする) の境界は $\gamma$ の像であるとしてよい. 普遍被覆 $\mathbb{H}^3 \to \hat{N}$ による $\hat{A}_-$ の逆像となる円板の閉包のうち $p$ を通るもの全体を考えると, $\overline{\mathbb{H}^3} := \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$ もこれらの円板で領域に分割され, $\hat{\mathbb{C}}$ も帯領域に分割される. $\hat{A}_-$ による $\hat{N}$ の分解は, クライン群の分解 $\hat{\Gamma} = \Gamma_0 *_\delta$ で, $\Lambda(\Gamma_0)$ が, 上の分割で得られたある領域 $\Delta_0$ の ($\overline{\mathbb{H}^3}$ での) 閉包 $\overline{\Delta_0}^{\mathbb{H}^3}$ に含まれるものを与える.

Anderson, Canary と McCullough が [3] pp. 721-723 で示したこと ([6] 補題 9) を用いてコンパクト芯 $K$ を構成し, $K \setminus Q$ の $\Gamma_i$ に対応する成分を $K_i (i = 1, 2)$ とおく (以下 $\gamma$ が $S$ を 2 つの成分に分割する場合のみを説明する). $\pi_\rho$ は $\gamma$ について $n$ 回 wrap し, 条件 $\mathcal{W}n$ が成り立つことに注意すると, $K$ の構成と Anderson, Canary と McCullough が [3] p. 724 で示したことから $\pi_\rho|_{K_i}$ は埋め込みであることが分かる. 射影 $\mathbb{H}^3/\Gamma_i \to N_\rho$ が $K_i$ を等長に持ち上げることと, 射影 $\mathbb{H}^3/\Gamma_0 \to \mathbb{H}^3/\Gamma_0 *_\sigma = \hat{N}$ が $\pi_\rho(K_i)$ を等長に持ち上げることから, ある $k \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ について, $\Gamma_1^{\sigma^{k+1}} < \Gamma_0$ かつ $\Gamma_2 < \Gamma_0$ として良く, $\Gamma_\rho < \Gamma_0 *_{\sigma^{k+1}}$ が従う.

$\Lambda(\Gamma_0) \subset \overline{\Delta_0}^{\mathbb{H}^3}$ より, $\Lambda(\Gamma_1^{\sigma^{k+1}}) \subset \overline{\Delta_0}^{\mathbb{H}^3}$, $\Lambda(\Gamma_2) \subset \overline{\Delta_0}^{\mathbb{H}^3}$ であるが, $\hat{T}$ 周りで $\hat{A}_+$ が $\pi_\rho(K_1)$ と $\pi_\rho(K_2)$ に挟まれることから, $\Delta_0$ を $\hat{A}_+$ の逆像の連結成分で閉包が $p$ を通るものにより, $\Delta_{01}$ と $\Delta_{02}$ に分割すると, $\Lambda(\Gamma_1^{\sigma^{k+1}}) \subset \overline{\Delta_{01}}^{\mathbb{H}^3}$, $\Lambda(\Gamma_2) \subset \overline{\Delta_{02}}^{\mathbb{H}^3}$ となる. $\Delta_1 := \sigma^{k+1}(\Delta_{01})$, $\Delta_2 := \Delta_{02}$ とおき, $\Delta_i$ の境界を用いて円板 $C_i$, $D_i (i = 1, 2)$ を定める. すると Abikoff と Maskit の結果 ([2] 定理 1) を用いて, $C_1$, $D_1$, $C_2$, $D_2$ が極限集合に関する条件を満たすことが導ける. また $\hat{A}_-$ の取り方から, $\sigma$ 方向に沿って $\Delta_{01}$ と $\Delta_{02}$ は, $\Delta_1$ と $\Delta_2$ の順番と逆の順に並び, $\sigma^{k+1}(\partial C_1) = \partial C_2, \sigma^{k+1}(C_1) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{C_2}, \sigma^k(\partial D_1) = \partial D_2, \sigma^k(D_1) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_2}$ $(k \geq 0)$ が従う. よって $C_1$, $D_1$, $C_2$, $D_2$ が条件 $\mathcal{DS}k$ を満たすことが分かる.

$k = n$ を示す. $\bar{\pi} : N_\rho \to \mathbb{H}^3/\Gamma_0 *_{\sigma^{k+1}}$ を射影とすると, $\bar{\pi}$ により $K$ が埋め込まれることが分かり, 条件 $\mathcal{W}k$ が成り立つ. 今 $\pi_\rho$ が $\gamma$ について $n$ 回 wrap することから, $n$ は $\mathcal{W}n$ が成り立つ最小の数であり, $k \geq n$ が従う. 一方で条件 $\mathcal{W}n$ から $N_\rho$ のコンパクト芯 $K'$ で, 射影 $\bar{\pi}' : N_\rho \to \mathbb{H}^3/\Gamma_0 *_{\sigma^{n+1}}$ により埋め込まれるものが存在する. $K$ と $K'$ は互いに homotopic であり, $\bar{\pi}'|_{K'}$ が $Q$ 周りで埋め込みであることから, $k \leq n$ が従い, $k = n$ である. よって $\gamma$ が $S$ を 2 つの成分に分割する場合に条件 $\mathcal{DS}n$ を満たす円板が得られた. 分割しない場合もほぼ同様の議論で条件 $\mathcal{DN}n$ を満たす円板が得られる. 以上から必要条件であることも分かる.

最後に本論文では定理の系として次を得た.

**Corollary 3.4.1.** *連続な族 $\rho^t \in AH(S)$, $t \geq 1$ で, 各 $\rho^t$ が $\lfloor t \rfloor$-wrapping 射影を持つものが存在する.*

実際には, $AH(S)$ の自己接触点からなるこの様な族を構成した.

# 参考文献


[1] J. W. Anderson and R. D. Canary, Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book, Invent. Math. 126 (1996), 205–214.

[2] W. Abikoff and B. Maskit, Geometric decompositions of Kleinian groups, Amer. J. Math. 99:4 (1977), 687–697.

[3] J. W. Anderson, R. D. Canary and D. McCullough, The topology of deformation spaces of Kleinian groups, Ann. of Math. 152 (2000), 693–741.

[4] K. Bromberg and J. Holt, Self-bumping of deformation spaces of hyperbolic 3-manifolds, J. Diff. Geom. 57 (2001), 47–67.

[5] R. D. Canary and D. McCullough, Homotopy equivalences of 3-manifolds and deformation theory of Kleinian groups, Mem. Amer. Math. Soc. 172, no. 812 Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2004.

[6] R. Evans and J. Holt, Non-wrapping of hyperbolic interval bundles, Geom. Funct. Anal. 18 (2008), 98–119.

[7] C. T. McMullen, Complex earthquakes and Teichmüller theory, J. Amer. Math. Soc. 11 (1998), 282–320.

[8] K. Ohshika and T. Soma, Geomery and topology of geometric limits I, 2015, preprint. arXiv math:1002.4266v2.

[9] J.-P. Otal, William P. Thurston: “Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry”, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 116 (2014), 3–20.