# 論文審査の結果の要旨

氏　名　　　　　田　中　淳　波

論文提出者田中淳波は、Klein 群の変形空間を研究している。$PSL(2;\boldsymbol{C})$ の離散部分群である Klein 群に対し、$PSL(2;\boldsymbol{C})$ が等長変換として働く 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ の Klein 群による商空間が、境界を持つコンパクト 3 次元多様体 $M$ の内点と同相であるとき、この Klein 群は単射準同型 $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow PSL(2;\boldsymbol{C})$ の像となる。$\pi_1(M)$ は有限生成であるから、単射準同型の共役類の空間の中で離散部分群を与えるもの全体として、Klein 群の変形空間 $AH(M)$ が定義される。$AH(M)$ の内点に対応する点 $\rho$ では、$\mathbb{H}$ の任意の点 $x$ の $\rho(\pi_1(M))$ 軌道の $\mathbb{H} \cup \widehat{\boldsymbol{C}}$ における集積点集合は、点 $x$ の取り方に依らず、極限集合 $\Lambda_\rho \subset \widehat{\boldsymbol{C}}$ が定まる。$(\widehat{\boldsymbol{C}} \setminus \Lambda_\rho)/\rho(\pi_1(M))$ は、$\partial M$ のうち種数 2 以上のもの（等角境界）に対応する。このとき、トーラスと同相な境界はカスプに対応している。さらに等角境界の擬等角変形は Klein 群の変形を与えるが、$AH(M)$ の内点の集合の各連結成分は、この変形で尽くされ、等角境界の各成分の Teichmüller 空間の直積の商になることが、多くの研究者の結果を合わせることにより示されていた。また変形空間 $AH(M)$ はその内点の集合の閉包と一致することが、大鹿、Nazami-Souto により示されていた。

しかし、$AH(M)$ の境界点の位相はかなり複雑であることが指摘されてきている。すなわち、Anderson-Canary, McMullen の仕事により、変形空間はほとんどの場合、境界で特異点（多様体にならない点）を持つことがわかっている。さらに Bromberg、Magid により、変形空間の境界は局所連結でない点をもつことも知られている。また Anderson-Canary-McCullough らにより、変形空間 $AH(M)$ には内部が disjoint な成分が境界で接触する (bumping) こと、また内部では遠い点が境界で接触すること (self-bumping) があることも知られている。この接触の現象に関しては全て幾何的極限における階数 2 のアーベル群の存在とそれへの wrapping という現象が影響していることが分析されてきた。wrapping は、境界点 $\rho \in AH(M)$ に付随する幾何的極限 $\widehat{N} = \mathbb{H}^3/\widehat{\Gamma}$ への $N_\rho = \mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$ からの被覆写像が $\widehat{N}$ の有限被覆 $\overline{N}$ をファクターし、$N_\rho$ の compact core は $\overline{N}$ には埋め込まれ、$\widehat{N}$ では自己交叉をもつという現象である。

論文提出者田中淳波は、論文の中で $M$ が種数 2 以上の閉曲面と閉区間の直積 $S \times I$ の場合を研究した。$\rho \in AH(S \times I)$ が accidental parabolic curve、すなわち、$N_\rho =$

$\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(S))$ の compact core 上の非自明単純閉曲線 $\gamma$ で $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(S))$ の annulus cusp に対応するものを持つとする。この annulus cusp は、幾何的に有限な等角境界のエンドに挟まれていると仮定する。このとき、Abikoff-Maskit により、$\rho(\pi_1(S))$ は、$\gamma$ が曲面を分離する場合は $\rho(\gamma)$ が生成する群 $J$ を用いた融合積 $\Gamma_1 *_J \Gamma_2$ の形に、$\gamma$ が曲面を分離しない場合は $\gamma$ と 1 点で交叉する単純閉曲線で表される $\delta$ を用いた HNN 拡大 $\Gamma'_{*_\delta}$ の形に書かれる。

論文提出者田中淳波の定理では次のことを行っている。

$\rho$ は $AH(M)$ の境界点であるが、$\rho$ に付随する幾何的極限 $\widehat{N}$ が、$N_\rho$ の $\gamma$ に対応する annulus cusp が被覆するトーラスカスプ上の $\gamma$ の像が $\widehat{N}$ の等角境界の 2 つの異なる成分にホモトピックであるという条件を満たすような幾何学的極限であり、wrapping という現象を示しているための必要十分条件を、$\rho(\gamma)$ が生成する群 $J$、融合積分解に現れる $\Gamma_1$, $\Gamma_2$、HNN 分解に現れる $\Gamma'$, $\delta$ の $\widehat{\boldsymbol{C}}$ への作用についての条件で書き表した。この条件は、$\widehat{\boldsymbol{C}}$ 内の $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma'$ の極限集合とそれらの位置を特徴づける円板の配置と群作用の様子で記述されている。

この定理において群作用の適切な記述を与えていることが重要である。証明には、Klein-Maskit の combination の理論、大鹿-相馬の brick 分解の理論を用いているが、群作用の様子について注意深い解析が必要であった。

さらに論文提出者は、この定理の系として、変形空間の境界で wrapping をもつ点の連続曲線を構成した。この曲線上で wrapping の回数は無限に増加していることが示されている。このことは変形空間の境界の構造についての新たな知見を与えている。

このように論文提出者の結果は、Klein 群の変形空間についての多くの知見を与え、今後の Klein 群の研究において重要な意味を持つものであり、この分野のこれからの研究の基礎となるものである。よって論文提出者田中淳波は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。