論文の内容の要旨
論文題目：Continuous Analogue of the Existence Problem of Compact Clifford–Klein Forms
(コンパクト Clifford–Klein 形の存在問題の連続類似)

東條広一

1　導入と主結果

G をリー群，H を G の閉部分群，Γ を G の離散部分群とする．Γ が G/H に固有不連続かつ固定点自由に作用するとき，商空間 $\Gamma\backslash G/H$ は，自然な多様体構造を持つ．このとき多様体 $\Gamma\backslash G/H$ はクリフォードクライン形と呼ばれ，Γ は G/H の不連続群と呼ばれる．

1980 年代後半より，小林俊行氏によって，リーマン幾何の枠組みを超えたクリフォードクライン形の最初の本格的な研究が行われた．この分野における中心的な問題の一つに，以下のコンパクトクリフォードクライン形の存在問題がある．

Problem 1.1 ([Ko89])**.** どのような等質空間 G/H にコンパクトクリフォードクライン形が存在するか？

本論文では G/H が簡約型の場合を扱う．つまり，$G \supset H$ はともに実簡約線型リー群であり，このとき，G/H には G が等長に作用する擬リーマン構造が自然に入る．

H が非コンパクトのとき，離散等長変換群の作用は必ずしも固有不連続ではないため，等質空間 G/H が大きな不連続群を持つとは限らない．大きな不連続群を構成する有効な方法として，連続類似の手法がある．

Definition 1.2 (standard Clifford–Klein form [KK16, Definition 1.4])**.** G/H を簡約型等質空間とし，Γ を G/H の不連続群とする．クリフォードクライン形 $\Gamma\backslash G/H$ が *standard* であるとは，Γ を含み，G/H に固有に作用する簡約部分群 L が存在するときをいう．

幾つかの等質空間は，次の連続類似を用いてコンパクトクリフォードクライン形を持つことが示された：

Fact 1.3 ([Ko89])**.** G/H を簡約型等質空間とする．G の簡約部分群 L で G/H に固有かつ余コンパクトに作用するものが存在するならば，L の torsion-free な一様格子を取ることによって，G/H の standard なコンパクトクリフォードクライン形が得られる．

この Fact 1.3 は，そのような L を持つ G/H に対して，Problem 1.1 に肯定的な答えを与える．逆に，次の予想が小林氏によって提出されている．

Conjecture 1.4 ([KY05, Conjecture 3.3.10])**.** G/H を簡約型等質空間とする．もし G/H がコンパクトクリフォードクライン形を持つならば，G/H は standard なコンパクトクリフォードクライン形を持つ．

現在までに Conjecture 1.4 の反例は知られていない．(全てのコンパクトクリフォードクライン形が standard であるとは限らない．実際，standard なコンパクトクリフォードクライン形の変形によって，nonstandard なコンパクトクリフォードクライン形が得られる [G85], [Ko98].) 一方で，この予想を支持する証拠が，小林，小野，R.J Zimmer, R. Lipsman, Y. Benoist, F. Labourie, K. Corlette, S. Mozes, G.A. Margulis, H. Oh, D. Witte, 吉野, 奥田, N. Tholozan, 森田らによって得られている [Ko89], [KO90], [Ko92a], [Ko92b], [Z94], [Li95], [B96], [LMZ95], [Co94], [Ma97], [OW00], [KY05], [Ok13], [Th], [M15].

もし，Conjecture 1.4 が正しいと証明されれば，次の問に答えることで，Problem 1.1 に解を与えられる．

Question 1.5. standard なコンパクトクリフォードクライン形を持つ簡約型等質空間 G/H を分類せよ．

本論文の目的は，既約対称空間 G/H に対して，Question 1.5 に答えることである．

G/H が対称である場合には，小林氏は，Fact 1.3 を用いることで，次の 12 系列の対称空間が standard なコンパクトクリフォードクライン形を持つことを示した．

Fact 1.6 ([KY05, Corollary 3.3.7])**.** 次の Table 1 にある対称空間 G/H は standard なコンパクトクリフォードクライン形を持つ．但し，n は正の整数である．

Table 1: 固有かつ余コンパクトに作用する簡約部分群 L を持つ対称空間 G/H.

G/H	L	G/H	L
$SU(2,2n)/Sp(1,n)$	$U(1,2n)$	$SO(4,4)/SO(4,1)\times SO(3)$	$Spin(4,3)$
$SU(2,2n)/U(1,2n)$	$Sp(1,n)$	$SO(4,3)/SO(4,1)\times SO(2)$	$G_{2(2)}$
$SO(2,2n)/U(1,n)$	$SO(1,2n)$	$SO(8,\mathbb{C})/SO(7,\mathbb{C})$	$Spin(1,7)$
$SO(2,2n)/SO(1,2n)$	$U(1,n)$	$SO(8,\mathbb{C})/SO(7,1)$	$Spin(7,\mathbb{C})$
$SO(4,4n)/SO(3,4n)$	$Sp(1,n)$	$SO^*(8)/U(3,1)$	$Spin(1,6)$
$SO(8,8)/SO(7,8)$	$Spin(1,8)$	$SO^*(8)/SO^*(6)\times SO^*(2)$	$Spin(1,6)$

Question 1.5 の答えを記述するための記号を準備する．以降，G は線型半単純リー群であると仮定する．G の Cartan 対合 θ に対し，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を対応する G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とし，$K := G^\theta = \{g\in G : \theta(g)=g\}$ とおく．このとき K は G の極大コンパクト部分群であり，G/K は Riemann 対称空間となる．

Theorem 1.7 (主結果)**.** G/H を既約半単純対称空間とする．G/H が standard なコンパクトクリフォードクライン形を持つならば，G/H は次のいずれかに局所同型である: Riemann 対称空間 G/K, 群多様体 $G'\times G'/\operatorname{diag}G'$, Table 1 にある対称空間.

さらに，Table 1 の対称空間に対し，固有かつ余コンパクトに作用する L を分類した (本論文 Theorem 1.1.12, Table 1.31 参照).

2　主結果の証明のスケッチ

全ての既約対称空間 [Br57] の中で，standard なコンパクトクリフォードクライン形を持つものは，Theorem 1.7 にあるもの以外にはさほど多くないことを示す．この主張は次のように定式化される．

Proposition 2.1. G を単純リー群とし，G/H を対称空間で H は非コンパクトであるとする．もし G/H が standard なコンパクトクリフォードクライン形を持つならば，G/H は Table 1 にある対称空間または次の対称空間のいずれかに局所同型である: $SO(p,q+1)/SO(p,q)$ $(1\leq q< HR(p))$, $SO(p,q+1)/SO(p,1)\times SO(q)$

$(1 \leq q < HR(p))$, $SU(2p,2q)/Sp(p,q)$ $(1 \leq q \leq p)$, $E_{6(-14)}/F_{4(-20)}$．ここで $HR(p)$ は Hurwitz–Radon 数であり次で定義される：$HR(p) := 8\alpha + 2^{\beta}$．ここで，$\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $\beta \in \{0,1,2,3\}$ は次の方程式で定まる：$p = 2^{4\alpha+\beta} \cdot (\text{odd number})$.

Proposition 2.1 の証明には，次の Facts 2.2, 2.3 を用いる．

Fact 2.2 ([Ko89, Example 4.11])**.** 任意の正の整数 n に対し，対称空間 $Sp(2n,\mathbb{R})/Sp(n,\mathbb{C})$ はコンパクトクリフォードクライン形を持たない．

Fact 2.3 ([KY05])**.** G/H を簡約型等質空間とする．G/H が standard なコンパクトクリフォードクライン形を持つならば，その無限小化等質空間 G_θ/H_θ もコンパクトクリフォードクライン形を持つ．ここで，G_θ, H_θ はそれぞれ G, H のカルタン運動群であり，$\theta(H) = H$ を満たす G のカルタン対合 θ によって次で定義される：$G_\theta := K \ltimes \mathfrak{p}$, $H_\theta := (K \cap H) \ltimes (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})$.

無限小化等質空間 G_θ/H_θ に対しては，コンパクトクリフォードクライン形の存在判定条件が [KY05] で得られている．Proposition 2.1 の $E_{6(-14)}/F_{4(-20)}$ を除く 3 系列の対称空間に対して，Theorem 1.7 の証明で用いる手法は次である：

(A) 小林氏による，G/H に固有かつ余コンパクトに作用する簡約部分群 L の存在判定条件 [Ko89],
(B) L の "primary simple factor" の表現の次元の上界,
(C) 実半単純リー代数の表現がある種の構造を許容するための岩堀氏による判定条件の一般化 (Proposition 2.9 参照).

Step (A) は，G が線型簡約リー群，H, L が G の簡約部分群という設定における，固有な作用と余コンパクトな作用に対する判定条件からなる．

Fact 2.4 ([Ko89, Theorem 4.1])**.** G のカルタン対合を一つ固定し，$\mathfrak{p}$ の maximal abelian subspace $\mathfrak{a}$ を固定する．G のカルタン対合 θ_1, θ_2 を $\theta_1(H) = H$, $\theta_2(L) = L$ となるようにとり，maximal abelian subspaces $\mathfrak{a}'_H \subset \mathfrak{h}^{-\theta_1}$, $\mathfrak{a}'_L \subset \mathfrak{l}^{-\theta_2}$. を取る．このとき，$S_1, S_2 \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ で $\mathfrak{a}_H := S_1(\mathfrak{a}'_H), \mathfrak{a}_L := S_2(\mathfrak{a}'_L) \subset \mathfrak{a}$ となるものを取る．このとき，G, H, L についての次の二条件は同値である．

(i) L の G/H への作用は固有である,
(ii) $\mathfrak{a}_H \cap \mathfrak{a}_L = \{0\}$ modulo W-actions.

ここで，$W = W(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{g}$ の制限ルート系から定まるワイル群である．

Remark 2.5. L の G/H への作用が固有であれば，次の不等式が成り立つ：$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} L \leq \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G - \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H$.

余コンパクト性の判定条件を述べるために，線型簡約リー群の非コンパクト次元 $d(G)$ を思い出しておく．これは次のように定義される：$d(G) := \dim G/K = \dim \mathfrak{p}$.

Fact 2.6 ([Ko89, Theorem 4.7])**.** 同じ設定において，L の G/H への作用が固有であるという仮定のものでは，G, H, L に関する次の二条件は同値である：

(i) $L\backslash G/H$ はコンパクトである,
(ii) $d(G) = d(L) + d(H)$.

Facts 2.4 と 2.6 により Question 1.5 は，二条件 $\mathfrak{a}_L \cap \mathfrak{a}_H = \{0\}$ modulo W-actions, $d(L) = d(G) - d(H)$

を満たす簡約部分群 L を持つ G/H の分類に帰着される．

そのような L が存在したとする．n を G の自然表現の次元とする．$\rho : \mathfrak{l} \to \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ で合成 $L \to G \subset GL(n, \mathbb{C})$ の微分を表すとする．組 $(\mathfrak{l}, \rho)$ が満たす数値的条件を見つける，つまり L の "primary simple factor" の表現の次元に上界を与える．

Definition 2.7. $\mathfrak{l}$ を簡約リー代数とし，$\mathfrak{l} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{l}^{ss}$ を Levi deomposition とする．ここで，$\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{l}$ の中心であり，$\mathfrak{l}^{ss}$ は半単純部分リー代数である．$\mathfrak{l}^{ss} := \mathfrak{l}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{l}_k$ を非コンパクト単純イデアルへの分解とし，次のようにラベル付けされているとする．このとき，$\mathfrak{l}_1$ を $\mathfrak{l}$ の *primary simple factor* と呼ぶ．

$$\frac{d(L_i)}{\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} L_i} \geq \frac{d(L_{i+1})}{\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} L_{i+1}} \ (i = 1, \cdots, k-1).$$

このとき次の不等式を用いる．

Lemma 2.8. $\frac{d(L^{ss})}{\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} L^{ss}} \leq \frac{d(L_1)}{\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} L_1}$.

Step (B) では primary simple factor $\mathfrak{l}_1$ と制限 $\rho|_{\mathfrak{l}_1}$ の既約成分 π が満たすべき不等式を与える．$G/H = SU(2p, 2q)/Sp(p, q)$ の場合には，次の不等式を得る．

$$\dim \pi \leq \dim \rho \leq \frac{d(L^{ss})}{\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} L^{ss}} \leq \frac{d(L_1)}{\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} L_1}.$$

これらの不等式は，取りうる組 $(\pi, \mathfrak{l}_1)$ に強い制約を与え，Question 1.5 の G, H, L を分類に有効である．

最後の Step (C) のために幾つかの記号を準備する．$\mathfrak{g}$ を実半単純リー代数とし，$\operatorname{Irr}(\mathfrak{g})$ で $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の同値類の集合を表すことにする．$\operatorname{Irr}^c(\mathfrak{g}) := \{\rho \in \operatorname{Irr}(\mathfrak{g}) : \overline{\rho} \simeq \rho\} \subset \operatorname{Irr}(\mathfrak{g})$ とおく．ここで，$\overline{\rho}$ は ρ の複素共役表現を表す．表現 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ と $\pi \in \operatorname{Irr}(\mathfrak{g})$ に対し，$m_\pi := \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\pi, \rho)$ とおく．[Iw59, §9] で与えられる写像 $\operatorname{index} : \operatorname{Irr}^c(\mathfrak{g}) \to \{\pm 1\}$ を用いる．

以下，この記号を実半単純リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\sigma}$ に対して用いる．但し，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は複素半単純リー代数で σ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の反正則な対合であり，$\pi \in \operatorname{Irr}^c(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\sigma})$ に対し，$\operatorname{index}_\sigma \pi \in \{\pm 1\}$ と書く．

Proposition 2.9. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素半単純リー代数とし，τ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の反正則な対合，$\rho : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\tau} \to \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ を表現とする．$\mathfrak{m}$ をリー代数 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{su}^*(2m)$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$ のうちの一つとする．ここで $m := \frac{1}{2}n$ で n は偶数である．このとき，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, τ, ρ に関する次の二条件は同値である．

(i) $\alpha \in \operatorname{Int}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$ で $\alpha(\rho(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\tau})) \subset \mathfrak{m}$ となるものが存在する，

(ii) $\rho \simeq \overline{\rho}$ as a representation of $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\sigma}$ and $(\varepsilon \operatorname{index}_\sigma \pi)^{m_\pi} = 1$ for any $\pi \in \operatorname{Irr}^c(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\sigma})$.

ここで，$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ と σ は，$\mathfrak{m}$ に対応して定まる以下の組である．(ε, σ)= $(+1, \tau)$ $(\mathfrak{m} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$, $(-1, \tau)$ $(\mathfrak{m} = \mathfrak{su}^*(2m))$, $(+1, \theta)$ $(\mathfrak{m} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}))$, $(-1, \theta)$ $(\mathfrak{m} = \mathfrak{sp}(m, \mathbb{C}))$. θ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 対合である．

Proposition 2.9 を用いることで，Question 1.5 の取りうる G, H, L に更なる制約を与えることができる．

参考文献

[B96] Y. Benoist, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. of Math. (2) **144** (1996), 315–347.

[Br57] M. Berger, *Les espaces symétriques non compacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **74** (1957), 85–177

[Co94] K. Corlette, *Harmonic maps, rigidity and Hodge theory*, ICM-94, Proceedings (1994), 465–471.

[G85] W. Goldman, *Nonstandard Lorentz space forms*, J. Differential Geometry **21** (1985), 301–308.

[Iw59] N. Iwahori, *On real irreducible representations of Lie algebras*, Nagoya Math. J. 14 (1959), 59–83.

[KK16] F. Kassel, T. Kobayashi, *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces*, Adv. Math. **287**, (2016), 123–236.

[Ko89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285**, (1989), 249–263.

[Ko92a] T. Kobayashi, *A necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of reductive type*, Duke Math. J. **67** (1992), 653–664.

[Ko92b] T. Kobayashi, *Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type*, Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras at Fuji-Kawaguchiko, 1990 August September, eds. T. Kawazoe, T. Oshima and S. Sano, World Scientific, (1992), 59–75.

[Ko98] T. Kobayashi, *Deformation of compact Clifford–Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds*, Math. Ann. **310** (1998), 394–408.

[Ko01] T. Kobayashi, *Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces*, Mathematics Unlimited-2001 and Beyond, (eds. B. Engquist and W. Schmid), Springer, Berlin, (2001), pp. 723–747.

[KO90] T. Kobayashi, K. Ono, *Note on Hirzebruch's proportionality principle*, J. Fac. Soc. Univ. of Tokyo **37** (1990), 71–87.

[KY05] T. Kobayashi, T. Yoshino, *Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces—revisited*, Pure Appl. Math. Q. **1**, No.3 (2005), 591–663.

[LMZ95] F. Labourie, S. Mozes, R.J. Zimmer, *On manifolds locally modelled on non-Riemannian homogeneous spaces*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), no. 6, 955–965.

[Li95] R. Lipsman, *Proper actions and a compactness condition*, J. Lie Theory **5** (1995), 25–39.

[Ma97] G.A. Margulis, *Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients*, Bul. Soc. math. France **125** (1997), 447–456.

[M15] Y. Morita, *A topological necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms*, J. Differential Geometry **100** (2015),533–545.

[Ok13] T. Okuda, *Classification of semisimple symmetric spaces with proper* $SL(2,\mathbb{R})$*-actions*, J. Differential Geom. **94** (2013), 301–342.

[OW00] H. Oh, D. Witte, *New examples of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of* $SO(2,n)$, Int. Math. Res. Notice **5** (2000), 235–251.

[Th] N. Tholozan, *Volume and non-existence of compact Clifford–Klein forms*, arXiv:1511.09448v1, preprint.

[Z94] R.J Zimmer, *Discrete groups and non-Riemannian homogenous spaces*, J. Am. Math. Soc. **7** (1994), 159–168.