論文の内容の要旨

論文題目　Applications of Microlocal Sheaf Theory to Symplectic Geometry in Cotangent Bundles
（余接束のシンプレクティック幾何への超局所層理論の応用）

氏　　名　池 祐一

近年，超局所層理論をシンプレクティック幾何に応用する研究が盛んに行われている．本論文では異なる 2 つの定量的問題 (i) 余接束内のコンパクト完全ラグランジュ部分多様体の交叉の濃度・全ベッチ数の評価，(ii) 余接束内のコンパクト部分集合の displacement energy の評価，への応用を与える．

1　超局所層理論とシンプレクティック幾何への応用に関する先行研究

超局所層理論は柏原と Schapira [KS90] による層係数のモース理論ともいえる枠組みである．そこでは「層に対する臨界点」を記述するためのマイクロ台という概念が導入され，多くの分野への応用をもたらした．以下，$\mathbf{k}$ を体とする．実多様体 X に対して $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ で X 上の $\mathbf{k}$ 線型空間の層がなす有界導来圏をあらわす．$F \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ のマイクロ台は F のコホモロジーが同型に拡張できない方向をあらわす余接束 T^*X の部分集合として定義される．通常のモース理論の拡張として，X 上の関数 φ の微分が F のマイクロ台と交わらない限り，F の $\varphi^{-1}((-\infty, c))$ 上のコホモロジーは c によらず同型であることが示され，マイクロ台を越える際のコホモロジーの変化を記述する層係数のモース不等式も得られる．

余接束はシンプレクティック多様体であり，そこでは以下で説明する non-displaceability の問題が考えられる．以下では M を連結実多様体として標準的な完全シンプレクティック構造が入った余接束 T^*M を考える．コンパクト台を持つ C^∞ 級関数 $H = (H_s)_{s\in[0,1]} \colon T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ は T^*M 上の時間依存するハミルトンベクトル場 $X_H = (X_{H_s})_s$ と対応するハミルトンアイソトピー $\phi^H = (\phi^H_s)_s \colon T^*M \times [0,1] \to T^*M$ を定める．A, B を T^*M のコンパクト部分集合とする．任意のコンパクト台関数 H に対して $A \cap \phi^H_1(B) \neq \emptyset$ であるとき A と B は non-displaceable であるという．与えられたコンパクト部分集合が non-displaceable であるか否かを判定することはシンプレクティック幾何での主要な問題の 1 つである．さらに一般化された定量的な問題として，濃度 $\#(A \cap \phi^H_1(B))$ を評価することも重要である．現在では多くの研究者は概正則曲線や Floer 理論を用いて，これらの問題に取り組んでいる．

Tamarkin [Tam08] は超局所層理論を用いて，余接束のシンプレクティック幾何に対する新たなアプローチを提唱した．コンパクト部分集合の non-displaceability の十分条件をマイクロ台がそれらの錐に入る層の圏を使って以下のように与えたのである．$(x, t; \xi, \tau)$ を $T^*(M \times \mathbb{R})$ の斉次局所座標系とする．$\mathcal{D}(M)$ をマイクロ台が $\{\tau \leq 0\}$ に含まれる対象のなす部分三角圏による $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(M \times \mathbb{R})$ の商圏として定める．さらに T^*M のコンパクト部分集合 A に対して $\mathcal{D}_A(M)$ をマイクロ台が A の錐に含まれる層からなる $\mathcal{D}(M)$ の充満部分圏とする．また $c \in \mathbb{R}$ に対して $T_c \colon M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}, (x,t) \mapsto (x, t+c)$ を $\mathbb{R}$ 方向への平行移動写像とする．すると $F \in \mathcal{D}(M)$ と $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して，自然な射 $\tau_{0,c}(F) \colon F \to T_{c*}F$ が存在する．さらに $\mathcal{D}(M)$ には内部 Hom 函手 $\mathcal{H}om^\star$ が存在し，$F, G \in \mathcal{D}(M)$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \simeq H^0 R\Gamma_{M\times[0,+\infty)}(M \times \mathbb{R}; \mathcal{H}om^\star(F, G))$ を満たす．これらを用いて Tamarkin は次の non-displaceability 定理を示した：$q_{\mathbb{R}} \colon M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を射影とする．A, B を T^*M のコンパクト部分集合としたとき，もし $F \in \mathcal{D}_A(M)$ と $G \in \mathcal{D}_B(M)$ が存在して，任意の $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $\tau_{0,c}(Rq_{\mathbb{R}*}\mathcal{H}om^\star(F, G)) \neq 0$ ならば，A と B は non-displaceable である．

その後，Guillermou・柏原・Schapira [GKS12]，Guillermou [Gui12] はそれぞれハミルトンアイソトピーのグラフとコンパクト完全ラグランジュ部分多様体（を錐状化したラグランジュ部分多様体）をマイクロ台に持つ層量子化と呼ばれる対象の存在を示した．彼らはそれらを用いてゼロ切断の

non-displaceability やコンパクト完全ラグランジュ部分多様体の位相的性質を調べている．

本論文では上述の圏 $\mathcal{D}(M)$ と層量子化を用いて，異なる 2 方向へ Tamarkin の定理を定量的主張に拡張する．以下でそれぞれの結果について説明する．

2 層量子化を用いたコンパクト完全ラグランジュ交叉の研究

Guillermou [Gui12] はコンパクト完全ラグランジュ部分多様体 1 つの性質を調べていたが，このパートでは 2 つの交叉について考察する．このパートでは M はコンパクトであると仮定する．論文では Guillermou-Schapira [GS14] により定義された $\mathcal{D}(M)$ の商圏 $\mathcal{T}(M)$ を用いるが要旨では主張を圏 $\mathcal{D}(M)$ のみで記述するため，論文と記述が一部異なることを注意しておく．

定理 2.1. $i=1,2$ に対して L_i を T^*M のコンパクト完全ラグランジュ部分多様体とし $F_i \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(M\times\mathbb{R})$ を L_i と $df_i = \alpha|_{L_i}$ を満たす関数 $f_i \colon L_i \to \mathbb{R}$ に対応する単純層量子化とする．さらに L_1 と L_2 が斉交叉する，すなわち，$L_1 \cap L_2$ が T^*M の部分多様体で任意の $p \in L_1 \cap L_2$ に対し $T_p(L_1\cap L_2) = T_pL_1 \cap T_pL_2$ であると仮定する．$L_1 \cap L_2 = \bigsqcup_{j=1}^n C_j$ を連結成分への分解とし，$p \in C_j$ を取って $f_{21}(C_j) := f_2(p) - f_1(p)$ と定める．さらに $-\infty < a < b \leq +\infty$ とする．このとき，$\mathbf{k} = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対して，不等式

$$\sum_{a \leq f_{21}(C_j) < b} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{F}_2} H^k(C_j;\mathbb{F}_2) \geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{F}_2} H^k R\Gamma_{M\times[a,b)}((-\infty,b);\mathcal{H}om^\star(F_2,F_1))$$

が成り立つ．特に，任意の j に対して $f_{21}(C_j) \geq 0$ ならば

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{F}_2} H^k(C_j;\mathbb{F}_2) \geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F_2, F_1[k]).$$

L_1 と L_2 が横断的に交わる場合は，$\mathbb{F}_2$ 係数だけでなく任意の体 $\mathbf{k}$ に対して不等式が成立する．

さらに，任意の j に対して $f_{21}(C_j) \geq 0$ ならば，$\mathcal{L}$ を F_1 と F_2 に対応する M 上の階数 1 の $\mathbf{k}$ 係数局所系として

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F_2, F_1[k]) \simeq H^k(M;\mathcal{L})$$

が任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つことも示す．定理 2.1 と合わせると，Floer 理論を用いて示された Nadler [Nad09]，深谷・Seidel・Smith [FSS08] の結果の純粋に層理論的な証明が系として得られる．

系 2.2 ([Nad09, Theorem 1.3.1] and [FSS08, Theorem 1])**.** 任意の横断的に交わる T^*M のコンパクト完全ラグランジュ部分多様体 L_1, L_2 と任意の M 上の階数 1 の $\mathbf{k}$ 係数局所系に対して，

$$\#(L_1 \cap L_2) \geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dim H^k(M;\mathcal{L}).$$

定理の証明の概略は以下の通りである．まず層係数のモース・ボット不等式を $\mathcal{H} := \mathcal{H}om^\star(F_2,F_1)$ と関数 $M\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto t$ に適用し，不等式

$$\begin{aligned}\sum_{a\leq c<b} \sum_{k\in\mathbb{Z}} &\dim H^k R\Gamma\left(M\times\{c\}; R\Gamma_{M\times[c,+\infty)}(\mathcal{H})|_{M\times\{c\}}\right) \\ &\geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dim H^k R\Gamma_{M\times[a,b)}(M\times(-\infty,b);\mathcal{H})\end{aligned} \tag{1}$$

を得る．次に μhom 函手を用いて，同型

$$R\Gamma\left(M\times\{c\}; R\Gamma_{M\times[c,+\infty)}(\mathcal{H})|_{M\times\{c\}}\right) \simeq R\Gamma(\Omega_+; \mu hom(T_{c*}F_2, F_1)|_{\Omega_+}) \tag{2}$$

を証明する．ここで，$\Omega_+ := \{\tau > 0\} \subset T^*(M \times \mathbb{R})$ である．最後に $\mu hom(T_{c*}F_2, F_1)|_{\Omega_+}$ は $\{(x,t;\tau\xi,\tau) \mid \tau > 0, (x;\xi) \in L_1 \cap L_2, t = f_2(x;\xi) - f_1(x;\xi) = c\}$ に台がある階数 1 の定数層（のシフト）と同型であることを示し，証明が完了する．

体が $\mathbb{F}_2$ でない場合は μhom は定数層とは限らない局所系となる．L_1, L_2 がともに完全形式のグラフの場合，この局所系は $f_2 - f_1$ を M 上のモース・ボット関数とみなしたときの不安定束の相対向き付け層になることも示す．交叉が退化している場合でも (1) と (2) は依然成立するが μhom はもはや局所系とは限らない．この意味で層の族 $\{\mu hom(T_{c*}F_2, F_1)|_{\Omega_+}\}_c$ は $L_1 \cap L_2$ の退化しているかもしれない連結成分からの寄与をあらわすとみなせる．例を用いて退化した成分からの寄与についても考察する．

3 Tamarkin 圏におけるパーシステント的距離と displacement energy

Tamarkin [Tam08] は定性的な non-displaceability の問題のみを考察したが，一般化として displace するハミルトンアイソトピーたちの最小エネルギーを評価するという定量的な問題が考えられる．Hofer に従ってハミルトン関数 $H\colon T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ のノルムを

$$\|H\| := \int_0^1 \left(\max_p H_s(p) - \min_p H_s(p) \right) ds$$

と定める．さらに T^*M の 2 つのコンパクト部分集合 A, B に対して

$$e(A,B) := \inf\{\|H\| \mid H\colon T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R} \text{ コンパクト台}, A \cap \phi_1^H(B) = \emptyset\}$$

と定め，displacement energy と呼ぶ．このパートでは圏 $\mathcal{D}(M)$ にパーシステント加群間の擬距離の類似を定め，それを用いて $e(A,B)$ の下限を評価する新たな層理論的アプローチを提示する．これは最近の柏原・Schapira [KS17] によるパーシステント加群の層理論的解釈に動機づけられており，彼らによる実線型空間上の層の導来圏上の擬距離を改良して $M \times \mathbb{R}$ 上の層の圏 $\mathcal{D}(M)$ に導入したものである．また主結果は Tamarkin の non-displaceability 定理をエネルギー評価付きに拡張したものとみなせる．

定義 3.1. (i) $F, G \in \mathcal{D}(M)$，$a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．このとき，F が G に<u>(a,b)**-isomorphic**</u>であるとは，射 $\alpha, \delta\colon F \to T_{a*}G$ と $\beta, \gamma\colon G \to T_{b*}F$ が存在して次の条件を満たすことをいう：

(1) $F \xrightarrow{\alpha} T_{a*}G \xrightarrow{T_{a*}\beta} T_{a+b*}F$ は $\tau_{0,a+b}(F)\colon F \to T_{a+b*}F$ と等しく，$G \xrightarrow{\gamma} T_{b*}F \xrightarrow{T_{b*}\delta} T_{a+b*}G$ は $\tau_{0,a+b}(G)\colon G \to T_{a+b*}G$ と等しい．

(2) $\tau_{a,2a}(G) \circ \alpha = \tau_{a,2a}(G) \circ \delta$ かつ $\tau_{b,2b}(F) \circ \beta = \tau_{b,2b}(F) \circ \gamma$.

(ii) $F, G \in \mathcal{D}(M)$ に対して，$d_{\mathcal{D}(M)}(F,G) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ を

$$d_{\mathcal{D}(M)}(F,G) := \inf\{a+b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, F \text{ is } (a,b)\text{-isomorphic to } G\}$$

により定め，$d_{\mathcal{D}(M)}$ を<u>**translation distance**</u>と呼ぶ．

さて $\mathcal{D}(M)$ の対象とそのハミルトン変形の間の距離を考えよう．$H\colon T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ をコンパクト台ハミルトン関数とすると $\mathcal{D}(M)$ の対象をハミルトンアイソトピー ϕ^H で変形できる．すなわち，Guillermou・柏原・Schapira [GKS12] の結果により，函手 $\Psi_1^H\colon \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ が存在して，この函手は任意の T^*M のコンパクト部分集合 A に対して $\Psi_1^H\colon \mathcal{D}_A(M) \to \mathcal{D}_{\phi_1^H(A)}(M)$ に制限される．

定理 3.2. $G \in \mathcal{D}(M)$ とし，$H\colon T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ をコンパクトな台を持つハミルトン関数とする．このとき，$d_{\mathcal{D}(M)}(G, \Psi_1^H(G)) \leq \|H\|$ である．

証明にはホモトピー層のマイクロ台の錐の角度が translation distance $d_{\mathcal{D}(M)}$ を統制すること，および G と $\Psi_1^H(G)$ をつなぐホモトピー層の性質（[GKS12] の結果の系）を用いる．

次に上の結果を displacement energy の評価に応用する．

定義 3.3. $F, G \in \mathcal{D}(M)$ に対して，$e_{\mathcal{D}(M)}(F,G) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ を以下で定める：

$$e_{\mathcal{D}(M)}(F,G) := d_{\mathcal{D}(M)}(Rq_{\mathbb{R}*}\mathcal{H}om^{\star}(F,G), 0) = \inf\{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \tau_{0,c}(Rq_{\mathbb{R}*}\mathcal{H}om^{\star}(F,G)) = 0\}.$$

このパートの主結果は次の定理である．

定理 3.4. A, B を T^*M のコンパクト部分集合とする．このとき，任意の $F \in \mathcal{D}_A(M)$ と $G \in \mathcal{D}_B(M)$ に対して

$$e(A,B) \geq e_{\mathcal{D}(M)}(F,G)$$

が成り立つ．特に，任意の $F \in \mathcal{D}_A(M)$ と $G \in \mathcal{D}_B(M)$ に対して以下が成り立つ：

$$e(A,B) \geq \inf\{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F,G) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, T_{c*}G) \text{ is zero}\}.$$

この定理は定理 3.2 および Tamarkin の分離定理，すなわち，もし $A \cap B = \emptyset$ であれば, 任意の $F \in \mathcal{D}_A(M)$ と $G \in \mathcal{D}_B(M)$ に対して $Rq_{\mathbb{R}*}\mathcal{H}om^{\star}(F,G) \simeq 0$ であることから従う．また定理 3.4 は，ある Novikov 環上の加群 $H(F,G)$ の捩れの大きさで displacement energy が評価できることを意味しており，Floer 理論的なアプローチとも関係しているように思われる．

定理 3.4 の応用として次の Polterovich の定理の層理論的な証明を与えることができる．

命題 3.5 ([Pol93, Corollary 1.6])**.** 内部が空でない T^*M のコンパクト部分集合 A に対して，その displacement energy は正である：$e(A,A) > 0$.

参考文献

[FSS08] K. Fukaya, P. Seidel, and I. Smith, Exact Lagrangian submanifolds in simply-connected cotangent bundles, *Invent. Math.*, **172** (2008), no. 1, 1–27.

[GKS12] S. Guillermou, M. Kashiwara, and P. Schapira, Sheaf quantization of Hamiltonian isotopies and applications to nondisplaceability problems, *Duke Math. J.*, **161** (2012), no. 2, 201–245.

[GS14] S. Guillermou and P. Schapira, Microlocal theory of sheaves and Tamarkin's non displaceability theorem, In *Homological mirror symmetry and tropical geometry*, Vol. **15** of *Lect. Notes Unione Mat. Ital.* 43–85, Springer, Cham, 2014.

[Gui12] S. Guillermou, Quantization of conic Lagrangian submanifolds of cotangent bundles, *arXiv preprint*, `arXiv:1212.5818v2`, (2012).

[KS90] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Vol. **292** of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[KS17] M. Kashiwara and P. Schapira, Persistent homology and microlocal sheaf theory, *arXiv preprint*, `arXiv:1705.00955`, (2017).

[Nad09] D. Nadler, Microlocal branes are constructible sheaves, *Selecta Math. (N.S.)*, **15** (2009), no. 4, 563–619.

[Pol93] L. Polterovich, Symplectic displacement energy for Lagrangian submanifolds, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **13** (1993), no. 2, 357–367.

[Tam08] D. Tamarkin, Microlocal condition for non-displaceability, *arXiv preprint*, `arXiv:0809.1584`, (2008).