

論文審査の結果の要旨

氏名 池 祐一

超局所層理論は柏原・Schapiraによる理論であり、層係数の Morse 理論とも見なされる。近年、Tamarkin によって超局所層理論をシンプレクティック幾何へ応用が提案され、活発に研究されている。申請者は Tamarkin のアプローチに従い、シンプレクティック幾何に対する次の 2 つの定量的問題に対して超局所層理論の応用を与えた。

- (i) 余接束内のコンパクト完全ラグランジュ部分多様体の交叉の濃度・全ベッチ数の評価
- (ii) 余接束内のコンパクト部分集合の displacement energy の評価

(i) ラグランジュ部分多様体の交叉の濃度、全ベッチ数の評価は、Floer 理論を用いたアプローチが良く知られており、任意の横断的に交わる T^*M のコンパクト完全ラグランジュ部分多様体 L_1, L_2 と任意の M 上の階数 1 の \mathbf{k} 係数局所系に対しては、Nadler(2009)、深谷-Seidel-Smith(2008)の結果として、評価 $\#(L_1 \cap L_2) \geq \sum_{k \in \mathbf{Z}} \dim H_k(M; L)$ が知られている。申請者はこの評価の純粹に層理論的証明を系として含む次の結果を証明した。

定理 $i = 1, 2$ に対して L_i を T^*M のコンパクト完全ラグランジュ部分多様体とし $F_i \in \mathbf{D}^b(M \times \mathbf{R})$ を L_i と $df_i = \alpha|_{L_i}$ を満たす関数 $f_i : L_i \rightarrow \mathbf{R}$ に対応する単純層量子化とする。さらに L_1 と L_2 が斉交叉すると仮定する。 $L_1 \cap L_2 = \coprod_{j=1}^n C_j$ を連結成分への分解とし、 $p \in C_j$ を取り $f_{21}(C_j) := f_2(p) - f_1(p)$ と定める。さらに $-\infty < a < b \leq +\infty$ とする。このとき、 $\mathbf{k} = \mathbf{F}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ に対して、次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} & \sum_{a \leq f_{21}(C_j) < b} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \dim_{\mathbf{F}_2} H^k(C_j; \mathbf{F}_2) \\ & \geq \sum_{k \in \mathbf{Z}} \dim_{\mathbf{F}_2} H^k R\Gamma_{M \times [a, b]}((-\infty, b); \mathcal{H}om^*(F_2, F_1)) \end{aligned}$$

特に、次が成立する。

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathbf{Z}} \dim_{\mathbf{F}_2} H^k(C_j; \mathbf{F}_2) \geq \sum_{k \in \mathbf{Z}} \dim_{\mathbf{F}_2} \text{Hom}_{\mathcal{T}(M)}(F_2, F_1[k])$$

(ii) T^*M の 2 つのコンパクト部分集合 A, B に対して, 片方をハミルトンアイソトピーで動かし交叉しないように移動するために必要なハミルトニアン関数の最小エネルギーとして, displacement energy $e(A, B)$ が定義される。Polterovich によって内部が空でない T^*M のコンパクト部分集合 A に対して, その displacement energy は正であることが知られている: $e(A, A) > 0$ 。申請者は, この正值性の純粋に層理論的な証明を系として含む, 次の結果を得た。

申請者は浅野知紘氏との共同研究により, 圏 $\mathcal{D}(M)$ にパーシステント加群間の擬距離の類似の概念 $e_{\mathcal{D}(M)}(F, G)$ を導入し, それを用いて $e(A, B)$ の下限を評価する新たな層理論的アプローチを提示した。これは最近の柏原・Schapira によるパーシステント加群の層理論的解釈に動機づけられており, 彼らのベクトル空間上の層の導来圏上の擬距離を改良して $M \times \mathbf{R}$ 上の層の圏 $\mathcal{D}(M)$ に導入したものである。下の定理は Tamarkin の non-displaceability 定理をエネルギー評価付きに拡張したものとみなされる。

定理 A, B を T^*M のコンパクト部分集合とする。このとき, 任意の $F \in \mathcal{D}_A(M)$ と $G \in \mathcal{D}_B(M)$ に対して次の不等式が成立する。

$$e(A, B) \geq e_{\mathcal{D}(M)}(F, G)$$

特に, 任意の $F \in \mathcal{D}_A(M)$ と $G \in \mathcal{D}_B(M)$ に対して以下が成り立つ。

$$e(A, B) \geq \inf\{c \in \mathbf{R} \geq 0 \mid \text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, T_{c*}G) \text{ is zero}\}$$

層理論的アプローチによる余接束上のシンプレクティック幾何への応用の範囲を定性的命題から定量的命題へと明確に拡張したことはこの分野における基本的な貢献である。よって, 論文提出者 池 祐一 は, 博士 (数理学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。