論文内容の要旨

Homology pro stability for Tor-unital pro rings

（捻単位的副環のホモロジー副安定性）

岩佐亮明

A を結合的で単位的な環とし、一般線形群の埋め込み

$$\mathrm{GL}_n(A) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}(A), \quad \alpha \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

を考える。A がホモロジー安定性を満たすとは、上の埋め込みにより整形数ホモロジーに誘導される写像

$$H_l(\mathrm{GL}_n(A)) \to H_l(\mathrm{GL}_{n+1}(A))$$

が $n \gg l$ で全単射であることをいう。A の安定レンジ $\mathrm{sr}(A)$ が有限のとき、A はホモロジー安定性を満たすことが知られている (cf. [Su82])。

本論文で考察されているのは、単位的とは限らない環に関するホモロジー安定性である。A を単位的とは限らない結合的な環とし、その n 次一般線形群を

$$\mathrm{GL}_n(A) := \ker(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z} \ltimes A) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}))$$

で定義する。この場合も上と同様に、ホモロジー安定性を問うことができる。しかし、単位的でない環に関しては安定レンジが有限であっても、ホモロジー安定性は一般に成り立たない。この現象は代数的 K 理論が切除性を満たさないことと密接に結びついている。環 A が K 理論の切除性を満たすとは、A を両側イデアルとして含む任意の単位的な環 R に対して、相対 K 群間の自然な写像

$$K_n(\mathbb{Z} \ltimes A, A) \to K_n(R, A)$$

が全ての $n \geq 0$ に対して同型であることをいう。ここで、相対 K 群 $K_n(R, A)$ はホモトピーファイバー $\mathrm{hofib}(K(R) \to K(R/A))$ の n 次ホモトピー群として定義される。K 理論の切除性は一般に成り立たないことがよく知られているが、もし A がホモロジー安定性を満たすと、そこから A が K 理論の切除性を満たすことが導かれてしまう。

一方で近年、K 理論の副切除性は非常に一般的な設定で成り立つことが分かった。Geisser-Hesselholt[GH06] は Suslin[Su95] の議論を一般化し、A が副捻単位的であれば、A を両側イデアルとして含む任意の単位的な環 R に対して、自然な写像

$$\{K_n(\mathbb{Z} \ltimes A, A^m)\}_m \to \{K_n(R, A^m)\}_m$$

が全ての $n \geq 0$ に対して副同型であることを示した。ここで、A が副捻単位的であるとは、副アーベル群 $\{\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z} \ltimes A^m}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})\}_m$ が全ての $i \geq 1$ で零となることをいう。Morrow は [Mo15] で任意の可換ネーター環のイデアルは副捻単位的であることを示した。彼らの結果を合わせると、可換ネーター環のイデアルが K 理論の副切除性を満たすことが結論される。

本論文の主定理は、副捻単位的な環に対するホモロジー副安定性である。より一般に、環の副系 $\{A_m\}_m$ を考える。$\{A_m\}$ が捻単位的とは、副アーベル群 $\{\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z} \ltimes A_m}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})\}_m$ が全ての $i \geq 1$ で零となることをいう。

定理 1 (Iwasa [Iw17, Theorem 4.2])**.** $\{A_m\}$ を捻単位的な副可換環（可換環の副系）とする。$r := \max(\mathrm{sr}(A_m), 2)$ とし、l を負でない整数とする。このとき、自然な写像

$$\{H_l(\mathrm{GL}_n(A_m))\}_m \to \{H_l(\mathrm{GL}_{n+1}(A_m))\}_m$$

は $n \geq 2l + r - 2$ で副全射、$n \geq 2l + r - 1$ で副同型である。

この定理を用いて、安定レンジが有限な捻単位的副可換環に対して、Geisser-Hesselholt の副切除定理が再証明される。

主定理の証明の概略を与える。単位的とは限らない結合的な環 A に対し、$E_n(A)$ を基本行列 $e_{ij}(a)$ によって生成される $\mathrm{GL}_n(A)$ の部分群とする。K_1 の安定性を用いることにより、定理 1 は次と同値であることが分かる。

定理 2 (Iwasa [Iw17, Theorem 4.6])**.** $\{A_m\}$ を捻単位的な副可換環とする。$r := \max(\mathrm{sr}(A_m), 2)$ とし、l を負でない整数とする。このとき、自然な写像

$$\{H_l(E_n(A_m))\}_m \to \{H_l(E_{n+1}(A_m))\}_m$$

は $n \geq 2l + r - 2$ で副全射、$n \geq 2l + r - 1$ で副同型である。

定理 2 の証明には Volodin 空間を用いる。集合 $\{1, \ldots, n\}$ の半順序 σ に対して、$T_n^\sigma(A)$ を $E_n(A)$ の部分群で $e_{ij}(a)$ $(i <_\sigma j)$ で生成されるものとする。Volodin 空間 $V_n(A)$ は単体集合で、その次数 p 部分は $E_n(A)$ の元の列 $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p)$ である半順序 σ が存在し $\alpha_i \alpha_j^{-1} \in T_n^\sigma(A)$ であるものから成る。この時、スペクトラル系列

$$E_{pq}^2 = H_p(E_n(A), H_q(V_n(A))) \Rightarrow H_{p+q}\Big(\bigcup_\sigma BT_n^\sigma(A)\Big)$$

が存在する。[Iw17] の §4 では、このスペクトラル系列を元に、Suslin の議論 ([Su96]) を一般化して、定理 2 を次の主張に帰着した。

定理 3 (Iwasa [Iw17, Theorem 3.9])**.** $\{A_m\}$ を捻単位的な副可換環とする。

(i) $n \geq 2l + 1$ に対して、副アーベル群

$$\Big\{H_l\Big(\bigcup_\sigma BT_n^\sigma(A_m)\Big)\Big\}_m$$

は零に等しい。

(ii) $n \geq 2l$ に対して、自然な写像

$$\Big\{H_l\Big(\bigcup_\sigma BT_n^\sigma(A_m)\Big)\Big\}_m \to \Big\{H_l\Big(\bigcup_\sigma B(T_n^\sigma(A_m) \ltimes M_{n,1}(A_m))\Big)\Big\}_m$$

は副同型である。

この定理は [Iw17] の §3 で証明される。この定理は A が単位的な場合には [Su82] で証明されていたが、一般の場合には副化しなければ成り立たず証明には新しいアイデアが要された。A が単位元 u を持つ場合の乗法 $u\colon A \xrightarrow{\simeq} A$ に変わるものとして、ある単体副環 $\{P_m\}$ と副擬同型 $\epsilon\colon \{P_m\} \xrightarrow{\simeq} \{A_m\}$ を構成することにな

る ([Iw17, §2])。これは $\{A_m\}$ が捻単体的という仮定の元になされる。これを用いて、$T_n^\sigma(A_m)$ 及びその一般化 $T_n^\sigma(A_m, P_m) := T_{n-k}^{\sigma_0}(A_m) \ltimes M_{n-k,k}(P_m)$ ($\sigma_0 := \sigma \setminus \max\sigma,\ k := |\max\sigma|$) の群ホモロジーを計算していくのが、定理 3 の証明の基本方針である。

参考文献

[GH06] T. Geisser, L. Hesselholt, *Bi-relative algebraic K-theory and topological cyclic homology*, Invent. Math. 166, no. 2 (2006).

[Iw17] R. Iwasa, *Homology pro stability for Tor-unital pro rings.*

[Mo15] M. Morrow, *Pro unitality and pro excision in algebraic K-theory and cyclic homology*, J. reine angew. Math., Ahead of Print (2015).

[Su82] A. A. Suslin, *Stability in algebraic K-theory*, Lecture Notes in Math., 996, Springer, Berlin (1982).

[Su95] A. A. Suslin, *Excision in integer algebraic K-theory*, Trudy Mat. Inst. Steklov. 208 (1995).

[Su96] A. A. Suslin, *Holomogy stability for H-unital $\mathbb{Q}$-algebras*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 174 (1996).