

# 論文の内容の要旨

論文題目: Mathematical foundation of Isogeometric Analysis for evolution problems  
(発展問題に対する Isogeometric Analysis の数学的基礎)

氏名: 上田 祐暉

## 1 Isogeometric Analysis

Isogeometric Analysis (IGA) は、偏微分方程式に対する数値計算手法の一つであり、基底関数として B-spline, もしくは NURBS (non-uniform rational B-spline) を用いた Galerkin 法, もしくは広義の有限要素法の一つであると解釈できる. IGA と有限要素法について説明するため, 次を考える;

$$\begin{cases} L(u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = g_D & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

ただし,  $L$  は偏微分作用素である. また  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  は与えられた有界領域であり, その境界  $\Gamma$  は Lipschitz 連続であると仮定する. この問題の近似解  $u_h$  であつて, 有限個の基底関数  $\phi_i$  を用いて

$$u_h := \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$$

と表されるものを求めたい. 重み付き残差法では, 残差  $L(u_h) - f$  に重み関数を掛け合わせるにより, その  $\Omega$  上での積分が 0 となるものをもとめる, すなわち

$$(L(u_h), w_i)_{L^2(\Omega)} = (f, w_i)_{L^2(\Omega)} \text{ for all } w_i, i = 1, \dots, N$$

なる  $u_h \in V_h$  を求めるのである. この重み関数として, 基底関数  $\phi_i$  を用いるものは特に Galerkin 法と呼ばれる, つまり Galerkin 法では

$$(L(u_h), v_h)_{L^2(\Omega)} = (f, v_h)_{L^2(\Omega)} \text{ for all } v_h \in V_h$$

なる  $u_h$  を計算する. さて, 有限要素法では基底関数  $\phi_i$  として, 領域  $\Omega$  の有限個の要素分割に対応する区分的多項式を用いる. ここで, 各要素は (典型的には)  $d$ -単体もしくは  $d$ -cube に対する affine 変換を用いて構成され, 従つて領域を多角形や多面体で近似するか, もしくは境界付近でのギャップを埋めるような処理が必要となる. 一方 IGA では, 領域  $\Omega$  を  $d$ -cube に対する NURBS を用いた変換で記述し, さらにこの記述に用いられる NURBS 基底関数を Galerkin 法における基底関数に採用する.

NURBS はコンピュータにおける製図などに应用されるものであり, 工業製品の設計などに用いられている. 数学的には, 領域分割に対応する区分的かつ滑らかな有理式であると表現できる. 有理式を用いることで, 滑らかな境界を持つ領域の記述が容易となり, さらに工業製品など, あらかじめ領域形状が NURBS で構成されて

いるならば、領域を厳密に記述できるうえ、数値計算用のメッシュを改めて取り直す必要がないという利点が存在する。

二つの手法は共通点も多いため、IGA を有限要素法の代替手法として用いることは容易である。しかしながら、数学的な取り扱いという観点では、NURBS が (一般には) 多項式ではない点、NURBS 基底関数の台が複数の要素上に跨ることなどを考慮すると、単純に同じ議論を適用することはできない。実際、NURBS を用いた数値計算は、流体をはじめとしたさまざまなシミュレーションに用いられているものの、その数学的基礎に関する結果は明確に示されているとは言い難い。現在までに、楕円型問題に対する IGA の数学研究は存在するが、放物型の種々の問題については、その数学的裏付けがないまま数値計算が行われている。

## 2 本研究の内容

本研究では、このような背景のもと、放物型問題の数値計算に対する NURBS の応用を想定し、以下の二つの問題を取り扱う。

1. 時間変数の離散化に対する B-spline の応用。
2. 放物型問題における Dirichlet 境界条件の実現。

以下に詳細を述べる。

### 2.1 第 1 章の概要

本論文の第 1 章では、時間変数に対する B-spline を用いた離散化手法に関する解析結果が述べられている。B-spline とは、NURBS の内で区分的多項式として記述されるものであり、先行研究において提案された、Space-time computation technique with continuous representation in time (ST-C) では、これを時間変数の表現に用いた近似解を構成する。ST-C には、段階的な射影により近似解を構成する Successive projection technique (SPT) と、段階的に与えられる変分問題を解くことで近似解を構成する Direct computation technique (DCT) の二つが存在するが、本章では、特に SPT に注目する。NURBS を用いることで、滑らかな領域形状の記述が容易になることは先述の通りだが、時間発展問題においては、領域の時間変形の記述及び時間離散化に NURBS を応用することができる。ただしその際、近似解は、数値計算における計算コストの問題から、いくつかの時刻において不連続なものを求めることになる。ここで SPT を用いることで、時間について B-spline を用いた滑らかな近似解に変換することが可能である。これは、近似解を不連続なものから滑らかに変換することで、表現するためのデータ量を削減するという目的で提案されたものであるが、同時に厳密解に対する良い近似を与えることが期待される。

本章の概要は以下の通りである。第 1 節で概要を述べた後、第 2 節で B-spline の定義を述べ、さらに提案手法に対する数学的定式化を行う。これにより、SPT における射影は連立一次方程式のシステムとして書き直すことができ、従って SPT の解析は行列の解析に帰着される。ここでは、いくつかの仮定の下で、得られる行列の具体的な形式を求めている。そして第 3 節では、得られた行列に対する解析の結果として、本章の主結果である、手法の数値的安定性と誤差評価を述べ、さらに数値計算例を挙げ、主結果の妥当性を確認している。それらの証明は第 4 節において示されている。証明においては、行列のスペクトル半径を評価することで、数値的安定性を求め、安定性を用いることで時間に対して  $L^\infty$  ノルムを用いた誤差評価が得られることを述べている。なお、これらの結果はすべて Banach 空間値の関数空間に対して成立し、従って放物型問題の数値計算にも適

用可能な結果である。

第 1 章における主結果は以下の通りである。SPT の数学的定式化は以下で与えられる、ノットベクトル

$$\Xi = \underbrace{\{t_0, \dots, t_0\}}_{p+1 \text{ times}}, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}, \underbrace{\{t_N, \dots, t_N\}}_{p+1 \text{ times}}.$$

に対応する  $p$  次 B-spline を  $\widehat{B}_{i,p}, 1 \leq i \leq N+p$  とし,

$$S_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n+p} x_i \widehat{B}_{i,p}(t) \Big|_{[t_0, t_n]} : x_i \in X \text{ for } i = 1, \dots, n+p \right\}$$

とする。このとき,  $\Pi_{n+1}(f) = \sum_{i=1}^{n+p+1} x_i^{n+1} \widehat{B}_{i,p} \Big|_{[t_0, t_{n+1}]} \in S_{n+1}$  を,  $n=0$  のとき

$$\int_{J_1} (\Pi_1(f) - f) \widehat{B}_{i,p} dt = 0 \text{ for all } i = 1, \dots, p+1, \quad (1)$$

及び  $n = 1, \dots, N-1$  のとき

$$\begin{cases} x_i^{n+1} = x_i^n & \text{for } i = 1, \dots, n \\ \int_0^{t_n} \widehat{B}_{i,p} (\Pi_{n+1}(f) - \Pi_n(f)) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \widehat{B}_{i,p} (\Pi_{n+1}(f) - f) dt = 0 & \text{for } i = n+1, \dots, n+p \end{cases} \quad (2)$$

により決定する。

$p = 1, 2, 3, 4$  に対し,  $p$  次 B-spline を用いた SPT を考える, ただし,  $p = 1$  のときは分割の準一様性を仮定し,  $p \geq 2$  のときは分割の一様性を仮定する。この時, 与えられた関数  $f \in W^{k,\infty}((0,1); X)$  に対する SPT の結果  $\Pi_N(f)$  について,

$$\|\Pi_N(f)\|_{L^\infty((0,1);X)} \leq C \|f\|_{L^\infty((0,1);X)} \quad (3)$$

及び

$$\|f - \Pi_N(f)\|_{L^\infty((0,1);X)} \leq Ch^{\min\{k,p+1\}} |f|_{W^{\min\{k,p+1\},\infty}((0,1);X)} \quad (4)$$

を満たす正定数  $C$  が存在する, ただし  $X$  は Banach 空間であり,  $h$  はメッシュサイズである。

## 2.2 第 2 章の概要

第 2 章では, 放物型問題に対する Nitsche の方法に対し, それが inf-sup 条件を満たすことを示すことで, 近似解の一意存在を証明し, さらに誤差評価を得ている。IGA では, NURBS 基底関数を空間離散化に用いるが, この基底関数は補間特性を満たさないため, Lagrange 補間を構成できないという欠点がある。従って, Isogeometric Analysis の近似問題において Dirichlet 境界条件を課す際, 条件から境界上での近似解の値を予め求めた上で斉次 Dirichlet 境界条件に帰着させる手法を適用できない。先行研究では IGA における Dirichlet 境界条件を Nitsche の方法を用いて課すことを提案し, この欠点を解消している。しかしながら, Nitsche の方法は元々 Poisson 方程式に対して提案されたものであり, 一般の楕円型微分作用素や Stokes 問題に対する適用を, 特別な注意をもって取り扱っている研究は少ない。加えて, Nitsche の方法は, 通常の penalty 法と同様に, 弱い意味で Dirichlet 境界条件を課している, つまり斉次 Dirichlet 境界条件下での解析結果こそ適用できないものの, 一方で penalty 法と異なり Galerkin 直交性が成立するという特徴があるにも拘わらず, このことに注目した解析結果は存在しない。

本章では、放物型問題に対する Nitsche の方法が inf-sup 条件を満たすことを示し、これと Galerkin 直交性を合わせることで誤差評価を証明する。第 1 節で概要を述べた後、第 2 節では主結果を述べる準備として、Poisson 問題に対する Nitsche の方法を説明する。また、抽象的な放物型問題及び弱形式に対する基礎的な事項を第 3 節において確認する。第 4 節では、Galerkin 法の解析において、有限次元部分空間が満たすべき基本的な性質を仮定し、IGA における一般的な NURBS 基底関数がある仮定を満たすことを述べる。また、この性質は有限要素法においても満足されるため、以降の議論はどちらの手法に対しても適用可能である。これらの準備の上で、第 5 節では放物型問題に対する Nitsche の方法を説明し、その数学解析の結果として inf-sup 条件の成立を示し、さらに inf-sup 条件を用いて近似解の一意存在および空間半離散化に対する誤差解析を行っている。また、第 6 節では時間離散化を行い、数値計算例を紹介している。

第 2 章における主結果を述べる。放物型問題に対する Nitsche の方法を、

$$b_{\varepsilon,h}(u_{\varepsilon,h}, \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h) \text{ for all } \mathbf{v}_h := (v_h, \tilde{v}_h) \in Y_h := L^2(0, T; V_h) \times V_h \quad (5)$$

なる  $u_{\varepsilon,h} \in X_h := H^1(0, T; V_h)$  を求めることとして与えるとき、この双線形形式  $b_{\varepsilon,h}$  が次の inf-sup 条件を満たすことが示される:

$$\inf_{0 \neq x_h \in X_h} \sup_{0 \neq \mathbf{y}_h \in Y_h} \frac{b_{\varepsilon,h}(x_h, \mathbf{y}_h)}{\|x_h\|_{X_h} \|\mathbf{y}_h\|_{Y_h}} \geq \beta. \quad (6)$$

本章では、この結果が空間半離散化に FEM, IGA をとる場合いずれにおいても成立することを示している。さらにこの結果を用いることで、式 (5) の解はただ一つ存在することがわかる。さらに、Nitsche の方法が Galerkin 直交性を満たすことと組み合わせることで、次の準最適誤差評価が得られる、厳密解  $u$  が、

$$u \in X_V := \left\{ v \in W^{1,2,2}(0, T; H^1(\Omega), L^2(\Omega)) : A(t)v(t) \in (L^2(\Omega))^* \text{ for a.e. } t \in (0, T) \right\} \quad (7)$$

を満たすことを仮定すると、任意の  $w_h \in X_h$  に対し、

$$\|u - u_{\varepsilon,h}\|_{X_h} \leq C \|u - w_h\|_{X_V} \quad (8)$$

なる正定数  $C$  が存在する。ここで、 $u \in X_V$  という仮定は、 $u \in W^{1,2,2}(0, T; H^2(\Omega), L^2(\Omega))$  ならば満たされるものである。もしも厳密解  $u$  がさらなる正則性を満たすならば、 $w_h \in X_h$  として適切な補間 (もしくは準補間) を取ることにより、以下に述べる誤差評価が得られる。 $2 \leq \ell, m \leq k+1$  に対し、 $u \in X_{\ell,m} := W^{1,2,2}(0, T; H^\ell(\Omega), H^m(\Omega))$  とすると、

$$\|u - u_{\varepsilon,h}\|_{X_h}^2 \leq C \left( \int_0^T \left( h^{2(\ell-1)} \|u\|_{H^\ell(\Omega)}^2 + h^{2m} \|u'\|_{H^m(\Omega)}^2 \right) dt + h^{2j} \|u(0)\|_{H^k(\Omega)}^2 \right) \quad (9)$$

なる正定数  $C$  が存在する、ただし、 $k$  は空間離散化に用いる区分的多項式もしくは NURBS の次数であり、 $j = \min\{\ell, m\}$  である。さらに、本章では時間離散化に陰的オイラー法を適用した際の誤差評価を求めている。陰的オイラー法により得られる近似解を、適当に拡張したものを  $u_{\varepsilon,h,\tau}$  とすると、いくつかの仮定の下で、

$$\begin{aligned} \|u - u_{\varepsilon,h,\tau}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq C \left( \int_0^T \left( h^{2(\ell-1)} \|u\|_{H^\ell(\Omega)}^2 + h^{2m} \|u'\|_{H^m(\Omega)}^2 \right) dt + h^{2j} \|u(0)\|_{H^k(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + C\tau^2 \|u'_{\varepsilon,h}\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{T}{4\alpha^2} \tau^2 \|T_1 u''_{\varepsilon,h}\|_{L^\infty(0,T;V_h^*)}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

なる正定数  $C$  が存在する。本章の数値計算例では、十分に滑らかな厳密解が得られる例題に対し、この結果の成立を確認している。