論文審査の結果の要旨

氏　名　　上田　祐暉

Isogeometric Analysis (IGA)とは，　B-spline 関数や，その一般化である NURBS(non-uniform rational B-spline)関数および T-spline 関数を基底関数に用いた新しい Galerkin 法である．現在，ほとんどの工業製品は CAD を用いて設計されているが，IGA では，その形状表現データを利用して，計算領域の表現，メッシュ生成，基底関数の構成を一貫して行う．結果として，計算領域をほぼ厳密に表現でき，かつ高次の基底関数を用いても計算の自由度が（標準的な有限要素法と比較して）小さく抑えられるので，計算精度と計算時間の観点から，大きな利点がある．IGA は 2005 年に提案された新しい手法であるが，応用計算が先行しており，方法の正当性の評価や品質保証などの数学的な研究は，線形楕円型問題を中心になされているのみである．結果として，経験のみを頼りにすることが多く，方法の健全な発展と計算結果の信頼性確保のために，数学的基礎理論の整備が早急に要求されている．

本学位論文では，時間発展問題に対する，IGA の数学的基礎理論に関する次の 2 つの結果が報告さている．

- Chapter 1: Analysis of space-time computation techniques with continuous representation in time: the successive projection technique
- Chapter 2: Analysis of Nitshce's method for evolution problem

第 1 章では, B-spline を用いた逐次的な時間積分方法の一つである SPT 法の安定性・収束性の解析結果を報告している．時間発展問題の近似理論の定石では，局所的な安定性を導出して，それをもとに大域的な安定性と誤差評価を導く．しかし，SPT 法については，B-spline 基底関数の support が「広い」ので，局所的な性質の単純な積み重ねでは，過大評価になる．したがって，既存の解析の理論では，「正の定数が存在する」ことが分かれば良いところを，その定数の値を厳密に評価するなどの，より深い議論が必要になる．本章では，その困難を，アルゴリズムの表現行列がある性質を満たすことが，安定性のための十分条件になることを見出し，一方で，その条件が低次の B-spline 関数の場合には実際に満たされることを，計算機援用解析により証明した．計算機援用解析に移行できる部分と，純粋に数学解析を行わなければならない部分を的確に分離で

きたことは大きな成果と言える．結果は，一般の Banach 空間値をとる方程式に対してのものであり，現れる定数の評価もすべて陽的に行なっているので，広い範囲の偏微分方程式に対して適用可能である．

第 2 章では，非定常移流拡散問題を対象にして，非斉次の Dirichlet 境界条件を，現実的な数値計算において実現するための Nitsche の方法について，その収束性を考察している．現代的な偏微分方程式論において Dirichlet 境界条件は，それが非斉次なものであっても，関数のトレース理論により，ほとんど障害にならない．しかし，実際に数値計算を行う立場からは，その実現は容易でない．標準的な有限要素法や差分法は，その補間特性により，近似的に Dirichlet 境界条件を課すのが普通である．しかし，IGA には，この補間特性がないので，Dirichlet 境界条件を課すためには，特別の工夫が必要である．実際，Nitsche の方法とよばれる処罰法の一種がよく用いられる. というのも, Nitsche の方法は，Galerkin 直交性を満たすという著しい性質があるからである．通常，時間発展問題を解析する際には，問題を抽象的な常微分方程式に書き直し，積分方程式に帰着する．しかし，その方法では，Nitsche の方法の特性を十分に活かせず，過大評価が得られるのみである．本章では，問題を変分法的に考察することで，仮定する解の正則性や計算精度の両方の観点から最適な誤差評価を系統的に得ることに成功している．具体的には，やや複雑ではあるが，解析に適切なノルムを導入し，楕円作用素の部分について，処罰パラメータとは独立の評価を導く．その後，Nitsche の方法に対応する双線型形式に対して inf-sup 条件の成立を証明し，それと Galerkin 直交性を組み合わせることで，解析を行なっている．最終的な評価は，処罰パラメータに依存しないものであり，これにより，Nitsche の方法を用いると，他の処罰法と比較して，境界付近での数値的な振動がほとんど起こらないこと（これは経験的に知られていることである）を数学的に証明したことになり，応用の観点からも価値の高い結果である．

本論文は，計算力学の分野で応用が盛んな IGA について，数学的基礎理論を整備することで，方法の正当性・妥当性の確立に成功している．一方で，数値解析だけでなく解析学に対しても，IGA の立場から新しい問題意識を提示し，取り組むべき新しい問題を見出し，実際に解析に成功している点でも，未来型の応用数理の研究のスタイルを実践するものであり，高く評価できる．

よって，論文提出者 上田祐暉 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．