

論文の内容の要旨

論文題目 Actions on noncommutative tori and classification of the crossed products (非可換トーラス上の作用と接合積の分類)

氏名 賀 卓豊

非可換トーラスは Alain Connes によって導入された非可換幾何の典型的な一例である。本論文では、その上の整数群及び有限アーベル群の標準的作用と接合積の C^* 環的な分類の研究を行った。新しい結果として、その接合積は普通より強い剛性を持つことを発見した。

非可換トーラスは、二次元の場合、無理数回転環である。その上には、特殊線型群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用が定義できる。Echterhof-Lück-Phillips-Walters によって、その作用を $SL_2(\mathbb{Z})$ の有限部分群に限る時、全ての接合積は AF 環である。そして、二つこのような接合積が同型になることは無理数回転環の角度の同様及び有限部分群の同型と同値になることも分かる。本論文の結果は、Echterhof-Lück-Phillips-Walters の定理の一般化や類比であり、第二章と第三章に振り分けた。次はこれらの結果についてそれぞれ説明を行う。

第二章では、四次元非可換トーラスを考えて、その上の直積群作用を研究した。主定理は以下である。

定理 1. 四次元非可換トーラス $\mathcal{A}_{\theta_1} \otimes \mathcal{A}_{\theta_2}$ 上の直積群の $\mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2}$ 作用を考えて、全ての接合積は AF 環である。整数 $r_i(k_i)$ は接合積 $\mathcal{A}_{\theta_i} \rtimes \mathbb{Z}_{k_i}$ の K_0 群の階数とすると、考える接合積の K_0 群は $\mathbb{Z}^{r(k_1)r(k_2)}$ と同型である。そして、その K_0 群の *tracial state* の像は以下である

$$\frac{1}{k_1 k_2} (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta_1 + \mathbb{Z}\theta_2 + \mathbb{Z}\theta_1\theta_2).$$

第三章では、無理数回転環上の整数群作用を考えて、その接合積を完全に分類し、接合積の剛性も示す。主定理は以下である。

定理 2. 角度 θ と θ' は無理数にする。行列 A と B は $SL_2(\mathbb{Z})$ の位数が無限な元になると、以下の条件は同値である。

1. 接合積 $\mathcal{A}_\theta \rtimes_A \mathbb{Z}$ と $\mathcal{A}_{\theta'} \rtimes_B \mathbb{Z}$ は同型である。
2. $\theta = \theta' \pmod{\mathbb{Z}}$ 。そして、 $P(I_2 - A^{-1})Q = I_2 - B^{-1}$ が成立するように $GL_2(\mathbb{Z})$ の元 P と Q がある。

定理 3. 角度 θ と θ' は無理数にする。行列 A と B は $SL_2(\mathbb{Z})$ の位数が無限な元になると、以下の条件は同値である。

1. 接合積 $\mathcal{A}_\theta \rtimes_A \mathbb{Z}$ と $\mathcal{A}_{\theta'} \rtimes_B \mathbb{Z}$ は森田同値である。
2. 角度 θ と θ' は同じ $GL_2(\mathbb{Z})$ 軌道に入る。そして、 $P(I_2 - A^{-1})Q = I_2 - B^{-1}$ が成立するように $GL_2(\mathbb{Z})$ の元 P と Q がある。

これらの結果は接合積 $\mathcal{A}_\theta \rtimes_A \mathbb{Z}$ の同型類や森田同値類を完全に記述した。特に、行列 A の跡は 3 にすると、接合積 $\mathcal{A}_\theta \rtimes_A \mathbb{Z}$ と無理数回転環と同型になることを導く。