論文の内容の要旨

論文題目　Numerical analysis for evolution equations
(発展方程式に対する数値解析)

氏名　劔持智哉

本論文では, 放物型偏微分方程式を中心とした, 発展型偏微分方程式に対する数値解析に関する成果を報告する．特に, 偏微分方程式の持つ構造に着目した解析を取り扱う．ここで言う構造とは, 広い意味での構造あるいは性質であり, 放物型方程式に対する平滑化効果や最大正則性, 勾配流方程式に対するエネルギー散逸性などを指す．微分方程式に対する数値解析において, 方程式の構造・性質に関する中心的な話題としては, 以下の 2 つが挙げられる:

(1) 方程式を離散化した際に, その性質の離散的なアナロジーが成り立つか?
(2) 構造を保つような離散化手法を構築することはできるか?

本論文においても, この 2 つの課題に取り組む.

離散的な方程式が元の方程式の持つ構造を保つ場合, その性質を数値解の安定性や誤差評価の解析に応用できるということがしばしばある．また, エネルギー散逸性や保存則を満たすような数値解法の場合, 長時間でも安定して数値計算をできるということが知られている．このような背景から, 上に挙げた 2 つの話題は, 今なお研究され続けている課題である．本論文では, 放物型方程式に対する平滑化効果と最大正則性, 平面曲線に対する (曲率流などの) 勾配流方程式におけるエネルギー散逸性, hydrostatic Stokes 方程式と呼ばれる流体の方程式に対する平滑化効果, の 3 つの構造に着目し, 数値解析を行った．以下ではそれぞれの章の概要を述べる．

第 1 章では, 放物型方程式に対する最大正則性に着目する．多角形 (多面体) 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ における熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = 0, & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ただし, $f \in L^p(0, T; L^q(\Omega))$, $p, q \in (1, \infty)$ である．このとき, Laplace 作用素 Δ が $L^q(\Omega)$ において最大正則性を満たすとは,

$$\|\partial_t u\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))} + \|\Delta u\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))} \le C\|f\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))} \tag{2}$$

が, 任意の $f \in L^p(0, T; L^q(\Omega))$ に対して成り立つことを言う．このアプリオリ評価は, 非線形放物型方程式に対する安定性解析などに応用されている．したがって, 方程式 (1) を数値計算のために離散化した際に, 最大正則性 (2) の離散的なアナロジーが成り立っているかどうかは興味深い課題であり, もし成り立つのであれば, その評価を非線形偏微分方程式の数値解析に応用できると期待される．

このような問題意識のもとで, 方程式 (1) の, 時間変数を差分法で, 空間変数を有限要素法で離散化した問題に対して, 離散的な最大正則性について考察した．詳細を述べるため, いくつか記号を導入する．まず, $\mathcal{T}_h$ を, 領域 Ω の三角形 (四面体) 分割とし, $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \operatorname{diam} K$ とおく．さらに, $V_h \subset H^1(\Omega)$ を分割 $\mathcal{T}_h$ に

付随する P^1 有限要素空間とし, $S_h = V_h \cap H_0^1(\Omega)$ とおく. S_h において, 離散的な L^2 内積 $(\cdot,\cdot)_h$ を, 重心領域に基づく数値積分によって定義する. 最後に, $\tau > 0$ を時間ステップ, $N_T = \lfloor T/\tau \rfloor$ をステップ数とし, $\theta \in [0,1]$ と点列 $v = (v^n)$ に対し, $v^{n+\theta} = \theta v^{n+1} + (1-\theta) v^n$ とおく. このとき, 次の問題を考える: 次を満たす $u_h = (u_h^n)_{n=0}^{N_T} \in S_h^{N_T+1}$ を求めよ.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau}, v_h \right)_h + (\nabla u_h^{n+\theta}, \nabla v_h) = (f_h^{n+\theta}, v_h), \quad \forall v_h \in S_h, & n = 0,1,\ldots,N_T - 1. \\ u_h^0 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

ただし, $f_h = (f_h^n)_{n=0}^{N_T} \in S_h^{N_T+1}$ は与えられた関数であり, $(\cdot,\cdot)$ は通常の L^2 内積である. このとき, 方程式 (3) の解 u_h に対して, 適切な条件の下で次の評価が成り立つことを示した.

$$\|u_{h,\theta}\|_{l^p_\tau(N_T;L^q(\Omega))} + \|D_\tau u_h\|_{l^p_\tau(N_T;L^q(\Omega))} + \|A_h u_{h,\theta}\|_{l^p_\tau(N_T;L^q(\Omega))} \le C \|f_{h,\theta}\|_{l^p_\tau(N_T;X)}.$$

ここで, $A_h \colon V_h \to V_h$ は $(A_h u_h, v_h)_h = -(\nabla u_h, \nabla v_h)$ $(\forall v_h \in V_h)$ で定義される離散的な Laplace 作用素である. また, $u_{h,\theta} = (u_h^{n+\theta})_n$, $D_\tau u_h = ((u_h^{n+1} - u_h^n)/\tau)_n$, $A_h u_{h,\theta} = (A_h u_h^{n+\theta})_n$ であり, 点列 $v = (v^n)_n$ に対し,

$$\|v\|_{l^p(N_T;L^q(\Omega))} = \left[\sum_{n=0}^{N_T-1} \|v^n\|_{L^q(\Omega)}^p \tau \right]^{1/p}$$

と定める. さらに, 得られたアプリオリ評価を, 線形および半線形の方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0, & \text{in } \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(u), & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0, & \text{in } \Omega \end{cases}$$

の有限要素近似の誤差評価に応用し, $L^p(0,T;L^q(\Omega))$ ノルムによる最適オーダーの誤差評価を得た. ただし, 半線形の場合, $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は局所 Lipschitz 連続な関数である. 解析においては, 離散的な最大正則性と, 離散的な Laplace 作用素の分数べきの評価が本質的であり, この解析手法はこれまでにはない新しい手法である. また, オーダーは落ちるものの, L^∞ ノルムによる誤差評価も得た.

第 2 章では, 境界が滑らかな領域における放物型方程式に対する, 平滑化効果および最大正則性を取り扱う. 前述の離散最大正則性の成果において, 領域 Ω は多角形あるいは多面体であると仮定されていた. しかしながら, 領域の境界が滑らかでない場合, 偏微分方程式の解の滑らかさが落ちてしまうことが知られており, このことは数値解析においても障害となる場合がある. 実際, 第 1 章の成果においては, 解の滑らかさの欠如が原因で, 空間変数に関する Lebesgue 指数 q の範囲に制限がついてしまっている. 有限要素法は領域を三角形に分割する手法であるため, 領域が多角形であることを仮定するのは自然であるが, 一方で偏微分方程式論の立場からは, 領域の境界が滑らかであることを仮定する方が自然であり, したがってそのような仮定の下での有限要素法を考察することは重要な課題である.

そこで, 境界が滑らかな領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ における放物型方程式の Neumann 境界値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u = f, & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \partial_n u = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0, & \text{in } \Omega \end{cases}$$

に対して, 空間変数のみを有限要素法で離散化した問題を考察した. 境界が滑らかであるために有限要素法をそのまま適用することはできないが, 領域を多角形 Ω_h で近似し, その多角形を三角形分割することで, 有限要素法を実行することができる. 実際, 次の半離散問題を考えた: 以下の方程式を満たす関数 $u_h \in C^0(0,T;V_h)$

を求めよ.

$$\begin{cases} (u_{h,t}(t), v_h)_{\Omega_h} + (\nabla u_h(t), \nabla v_h)_{\Omega_h} + (u_h(t), v_h)_{\Omega_h} = (f_h(t), v_h)_{\Omega_h}, & \forall v_h \in V_h, \\ u_h(0) = u_{h,0}, \end{cases} \tag{4}$$

ただし, V_h は Ω_h の三角形分割に基づく適合 P^k 有限要素空間, $(\cdot,\cdot)_D$ は領域 $D \subset \mathbb{R}^N$ 上の L^2 内積であり, $f_h\colon (0,T) \to V_h$ と $u_{h,0} \in V_h$ は与えられた (離散的な) データである.

元の問題の領域と, 数値計算における領域との間にはギャップ (領域の対称差 $\Omega \triangle \Omega_h$) があるため, その影響を考慮に入れた解析をする必要がある. その影響は, 元の領域の境界の管状近傍を導入し, その上の積分として評価することで, 処理をすることができる. 結果として, 問題 (4) の近似解 u_h に対して, 次の 2 つの評価を得た.

(i) 離散的な半群の解析性. $p \in [1,\infty]$, $f_h \equiv 0$ のとき,

$$\|u_h(t)\|_{L^p(\Omega_h)} + \|t\partial_t u_h(t)\|_{L^p(\Omega_h)} \le Ce^{-ct}\|u_{h,0}\|_{L^p(\Omega_h)}, \quad \forall t > 0.$$

(ii) 離散的な最大正則性. $p, q \in (1,\infty)$, $u_{h,0} = 0$ のとき,

$$\|\partial_t u_h\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega_h))} + \|A_h u_h\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega_h))} \le C\|f_h\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega_h))}.$$

ただし, $c, C > 0$ は h に依らない正定数である. この章では応用例については述べないが, これらの評価は第 1 章と同様の手法により誤差評価などへ応用することができる.

第 3 章では, 平面上の閉曲線に対する勾配流

$$\mathbf{u}_t = -\operatorname{grad} E(\mathbf{u}), \quad t > 0, \tag{5}$$

を取り扱う. ただし, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\zeta)\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2$ は未知関数 (閉曲線), $\operatorname{grad} E$ は与えられたエネルギー汎関数 E の $L^2(ds)$ における Fréchet 微分であり, $ds = |\mathbf{u}_\zeta| d\zeta$ は曲線 $\mathbf{u}$ の線素である. 具体的な方程式としては, 曲率流

$$\mathbf{u}_t = \boldsymbol{\kappa}, \qquad E[\mathbf{u}] = \int ds,$$

と elastic flow

$$\mathbf{u}_t = -2\varepsilon^2 \left(\nabla_s^2 \boldsymbol{\kappa} + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\kappa}|^2 \boldsymbol{\kappa} \right) + \boldsymbol{\kappa}, \qquad E[\mathbf{u}] = \varepsilon^2 \int |\boldsymbol{\kappa}|^2 ds + \int ds$$

が挙げられる ($\varepsilon > 0$). ただし, $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{u}_{ss}$ は曲率ベクトルであり, ∇_s は弧長微分 ∂_s の法線成分である.

この章では, エネルギー散逸性

$$\frac{d}{dt}E[\mathbf{u}] = \int \operatorname{grad} E(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_t ds = -\int |\mathbf{u}_t|^2 ds \le 0.$$

に着目し, エネルギー散逸性を保つような数値解法を構築することを考える. 実は, Allen-Cahn 方程式などの関数のグラフに対する勾配流方程式に対しては, エネルギー散逸性を保つような数値解法を構築する枠組みがすでに整っており, そのような手法による数値解は, 長時間計算しても安定であるということが知られている. その枠組みの 1 つに, 離散勾配法と呼ばれる手法がある. これは, エネルギー密度関数に対する連鎖率を離散化する手法なのだが, (5) のように, L^2 構造が未知関数に依存している場合には, そのままでは適用できない. そこで, この章では, 離散勾配法を拡張した手法による時間離散化スキームを提案した. エネルギー汎関数に対する連鎖律を離散化するという点がポイントであり, これにより, 一般的な形で時間離散的なスキームを得ることができる.

得られた半離散スキームは弱形式として定式化される. したがって, Galerkin 法による空間離散化が可能であるが, elastic flow のような 4 階の方程式の場合, 2 階微分を含んでしまうため, 通常の区分的 1 次多項式に

よる有限要素法 (すなわち, 折れ線による近似) では離散化することができない. その代わりに, p 次 B-spline と呼ばれる関数の空間を用いることで, 空間変数の離散化を施した. この関数空間は C^{p-1} 空間の部分空間となっているため, 高階の微分を自然に取り扱うことができる. さらに, B-spline は折れ線による近似と比べて自由度を遥かに小さくできるという特徴も持つため, 計算コストを抑えることもできる. 章の最後では, この手法を elastic flow に適用した際の数値例を紹介する. 曲線のトポロジーが変わる解や, より複雑な運動をする解を見つけることができたため, それらを報告する.

第 4 章では, hydrostatic Stokes 方程式と呼ばれる方程式を取り扱う. この方程式は, $\Omega = G \times (-D, 0)$, $G = (0,1)^2$ $(D > 0)$ と書くとき, 以下の初期値・境界値問題として記述される.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla_H p = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \operatorname{div}_H \bar{v} = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0, & \text{in } \Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_z u = 0, & \text{on } \Gamma_u := G \times \{0\}, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma_b := G \times \{-D\}, \\ u \text{ and } p \text{ are periodic} & \text{on } \Gamma_l := \partial G \times (-D, 0). \end{cases} \tag{6}$$

ただし, $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ と $p\colon G \to \mathbb{R}$ が未知関数であり, それぞれ (平面方向の) 流速場と, 領域表面における圧力を表している. また, $\nabla_H p = (\partial_x p, \partial_y p)^T$, $\operatorname{div}_H v = \partial_x v_1 + \partial_y v_2$, $\bar{v} = \int_{-D}^0 v(\cdot, z) dz$ である. この方程式は, 大気や海流の運動を記述する primitive 方程式と呼ばれる方程式の線形化方程式であり, Navier-Stokes 方程式に対する (非定常)Stokes 方程式に対応するものである.

この章では, 方程式 (6) に対する有限要素法による半離散化と, 解析半群の枠組みによる誤差解析を取り扱う. 非定常 Stokes 方程式に対してはすでに解析半群論による有限要素法の解析結果が知られており, その成果は Navier-Stokes 方程式に対する有限要素法の解析に応用されている. したがって, hydrostatic Stokes 方程式に対しても同様の考察を行うことで, primitive 方程式に対する有限要素法の解析へ応用できると期待される.

方程式 (6) は, 以下のように弱形式として定式化できる.

$$\begin{cases} (u_t(t), v)_\Omega + (\nabla u(t), \nabla v)_\Omega - (\operatorname{div}_H \bar{v}, p(t))_G = 0, & \forall v \in V, \\ (\operatorname{div}_H \bar{u}(t), q)_G = 0, & \forall q \in Q, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

ただし, $V = \{v \in H^1(\Omega)^2 \mid v|_{\Gamma_b} = 0, v \text{ is periodic on } \Gamma_l\}$, $Q = L^2_0(G)$ である. さらに, 有限要素空間 $V_h \subset V$, $Q_h \subset Q$ を導入し, 次のように近似問題を定式化する: 次を満たす $u_h\colon (0,T) \to V_h$ と $p_h\colon (0,T) \to Q_h$ を求めよ.

$$\begin{cases} (u_{h,t}(t), v_h)_\Omega + (\nabla u_h(t), \nabla v_h)_\Omega - (\operatorname{div}_H \bar{v}_h, p_h(t))_G = 0, & \forall v_h \in V_h, \\ (\operatorname{div}_H \bar{u}_h, q_h)_G = 0, & \forall q_h \in Q_h, \\ (u_h(0), v_h)_\Omega = (u_0, v_h)_\Omega, & \forall v_h \in V_{h,\sigma}, \end{cases}$$

ただし, V_h は Ω の四面体分割に基づく P^2 要素, Q_h はその分割によって誘導される Γ_u の三角形分割に基づく P^1 要素であり, $V_{h,\sigma} = \{v_h \in V_h \mid (\operatorname{div}_H \bar{v}_h, q_h)_G = 0,\ \forall q_h \in Q_h\}$ である. このとき, 次の誤差評価を得た.

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_V &\le Cht^{-1}\|u_0\|_{L^2}, & \|u(t) - u_h(t)\|_H &\le Ch^2 t^{-1}\|u_0\|_{L^2}, \\ \|u_t(t) - u_{h,t}(t)\|_{V'} &\le Cht^{-1}\|u_0\|_{L^2}, & \|p(t) - p_h(t)\|_Q &\le Cht^{-1}\|u_0\|_{L^2}. \end{aligned}$$

特異な項 t^{-1} は, 半群の解析性によるものである. 特に, 圧力に関する誤差評価が, 先行研究における評価の改善となっているという点が重要である. なお, 実際には, Hilbert 空間の対 (V, Q) 上の抽象的な発展方程式とその Galerkin 近似として取り扱うことで, 抽象的な設定で考察を行った.