論文審査の結果の要旨

氏　名　　剱持 智哉

偏微分方程式を数値計算するための離散化手法の正当性の確立のためには，安定性や収束性を研究するのが最も基本的である．一方で，偏微分方程式の解の持つ性質が，離散化の後にも然るべき意味で保存されるか否か，すなわち，離散化手法の構造保存性も研究すべき重要な問題である．実際，構造保存性が，安定性や収束性に強く関わっていることは多い．特に，元の偏微分方程式の持つエネルギー保存性・散逸性を再現する離散化手法を用いて得られる数値スキームは，長時間にわたり安定に計算が遂行できる．

本論文は，時間発展を含む偏微分方程式に対する離散化手法を対象として，構造保存，特に，放物型方程式に対する平滑化効果や最大正則性，勾配流方程式に対するエネルギー散逸性を詳細に研究した成果がまとめられている．

第 1 章では，放物型方程式に対する最大正則性の離散化(離散最大正則性)を研究している．具体的には，抽象的放物型発展方程式に対する時間離散最大正則性についての著者の研究成果（参考論文 1）を，具体的な有限要素法の安定性，誤差評価に応用している．線形問題に関しては，Bochner ノルムでの安定性・最適誤差評価が系統的に導出されている．さらに，半線形問題に対しては，離散 Sobolev 不等式や離散 Gagliardo-Nirenberg 不等式を離散 Laplace 作用素の分数冪を利用して導出し，その応用として，従来よりもはるかに端正な安定性・誤差評価の導出方法が構築されている．

第 2 章では，滑らかな領域で定義された放物型方程式に対する有限要素法に関して，最大値ノルムによる誤差評価や，離散最大正則性の評価が報告されている．第 1 章では，微分方程式を考える領域は多面体とされていた．しかし，領域の境界が滑らかでない場合，偏微分方程式の解が十分に正則にならないことが知られており，これは，とくに非線形問題の数値解析においても大きな障害となる．そこで，本章では，境界が滑らかな領域における放物型方程式の Neumann 境界値問題を対象にして，空間変数のみを有限要素法で離散化した問題を考察している．境界が滑らかであるために有限要素法をそのまま適用することはできないが，領域を多面体で近似し，その多角形を単体分割することで，有限要素法を実行する．離散 Green 関数の詳細な評価と放物型円環領域におけるスケーリング技巧を駆使して，主結果として，離散的な半群の解析性と離散的な最大正則性の証明に成功

している．空間 3 次元での放物型方程式に対して，元の領域と近似多面体の対称差の存在に起因する誤差を，現実的な状況設定で解析した研究は，いままでになく，その意味で本研究は独創的である．結果として，楕円型問題のアナロジーとして予想される結果が，必ずしも得られないことを明らかにした．

第 3 章では，曲率流や elastic flow を含むような，平面曲線に対する勾配流方程式に対して，エネルギー散逸性を保ち，高階の方程式にも適用可能なスキームを提案し，数値計算例でその妥当性を検証している．エネルギー散逸性を保つような数値解法として，離散勾配法があるが，本章で扱っているような L^2 構造が未知関数に依存している問題への直接の適用は困難であった．そこで，この章では，離散勾配法を再検討し拡張することで，離散エネルギー散逸性を実現する時間離散化スキームの構成に成功した．得られた時間離散スキームは弱形式として定式化されるので，Galerkin 法による空間離散化が可能であるが, elastic flow のような 4 階の方程式の場合，弱形式にしても 2 階微分を含んでしまうため，通常の区分的 1 次多項式による有限要素法の適用は困難である．そこで， p 次 B-spline 関数が基底関数として採用されている. 結果として, 通常の有限要素法と比較して, 自由度を遥かに小さくできるため，計算コストを抑えることもできる．また，elastic flow に適用した際の数値例が多数報告されている．曲線のトポロジーが変わる解や，より複雑な運動をする解を数値的に発見できたことの意義は大きい．

第 4 章では, Hydrostatic Stokes 方程式に対する有限要素法に対して，解析半群による枠組みでの誤差評価が報告されている．問題を抽象的な鞍点型の（放物型）変分問題として定式化し，Dunford 積分を通じて問題をリゾルベントの評価に帰着し，流速，圧力，加速度に関して，最適な誤差評価を得ることに成功している．この解析結果として，標準的な非定常 Stokes 方程式に対する未解決問題もすべて解決されている．

本学位論文を通じて，劔持氏は，基礎的な誤差解析から，新解法の提案までを，深い解析学の素養と，本質を見ぬくセンスを駆使して次々に成し遂げている．すなわち，近似解法の数学的正当性の追求と，その結果として実用的な応用への寄与という 2 つの目標を両立している点で，未来型の応用数理の研究のスタイルを実践するものであり，高く評価できる．

よって，論文提出者 劔持智哉 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．