論文審査の結果の要旨

氏名　辻 俊輔

２次元位相幾何学とくに写像類群に関わる研究と３次元位相幾何学とくにホモロジー３球面の不変量に関わる研究とが密接な関係にあることは、Birman-Craggs による μ 不変量の研究や、今日 Casson コアと呼ばれる森田茂之による Casson 不変量の写像類群における対応物の発見に遡ることができる。そこでは写像類群の曲面のホモロジー群への作用の核である Torelli 群についての Johnson-森田理論とも呼ばれる冪零的アプローチが中心的役割を果たす。詳しくは、曲面の基本群の冪零塔への作用が定める Torelli 群のフィルトレーションの随伴次数 Lie 代数の上で定義された Johnson 準同型とよばれる Lie 代数準同型を考察することになる。河澄響矢と久野雄介は Johnson 準同型を幾何学的に再構成した。そのターゲットは完備化された Goldman Lie 代数である。また、河澄・久野と Massuyeau-Turaev はこの文脈において Dehn ツィストを対数函数の自乗を用いて表示した。

論文提出者 辻 俊輔 は、以上の研究を「スケイン化」することで２次元および３次元位相幾何学に新局面を切り開いたものである。Turaev によって指摘されたように、曲面と区間の直積における絡み目の HOMFLY-PT スケイン代数は Goldman Lie 代数の一種の量子化とみなされる。また、絡み目のスケイン代数としては HOMFLY-PT より弱い Kauffman スケイン代数がある。HOMFLY-PT スケイン代数は Kauffman スケイン代数および Goldman Lie 代数の双方を支配するが、Kauffman スケイン代数と Goldman Lie 代数の間に直接の関係はない。論文提出者は、まず、第２から第５までの参考論文において Kauffman スケイン代数について「スケイン化」を実行した。具体的には (1) Kauffman スケイン代数への Dehn ツィストの作用を、逆双曲余弦関数等を使って明示的に表示し、それを使って完備化された Kauffman スケイン代数に Torelli 群を埋め込んだ。これが Johnson 準同型の「Kauffman スケイン化」である。ここには Johnson 準同型では捕捉できない Casson コアが現れる。これは「スケイン化」の有効性を明確に指し示しており、２次元位相幾何学の結果としても意義深い。(2) ３次元球面の標準 Heegaard 分解を通して曲面上のループを３次元球面に写せば自明になるが、曲面の管状近傍内の絡み目であれば非自明である。この素直な観察に基づいて、上述の Torelli 群の埋め込みから一変数多項式に値をもつ整ホモロジー３球面の不変量の新しい構成法を発見した。この不変量は大槻級数と等しいことが予想されるが、構成方法は全く新しいものであり、誰でも素直に理解できる自然なものである。

論文提出者が本学位論文で扱うのは、Kauffman スケイン代数と Goldman Lie 代数の両者を統合するところの曲面と区間の直積の HOMFLY-PT スケイン代数である。HOMFLY-PT スケイン代数について以上のプログラムをすべて実行したのが本学位論文である。HOMFLY-PT スケイン代数は Kauffman スケイン代数に比べて複雑な構造をもつためさまざまな困難と複雑さを伴う。(1) HOMFLY-PT スケイン代数への Dehn ツィストの作用を完全に記述し、これを使って完備化された HOMFLY-PT スケイン代数に Torelli 群を埋め込んだ。この埋め込みは Johnson 準同型とその Kauffman スケイン化の双方を統合するものである。(2) ３次元球面の標準 Heegaard 分解を通して曲面の管状近傍内の絡み目を取り出すことにより二変数級数に値をもつ整ホモロジー３球面の不変量を構成した。これは有限型不変量であり、さらに Lê による量子不変量の sl_n の場合と関係することが予想されているが、構成法は素直に理解できる全く自然なものである。なお、第一参考論文は上述の河澄・久野の理論を非有向曲面に拡張したもので独創的な新知見を含んでいる。

以上のように本論文および参考論文は、写像類群つまり２次元位相幾何学と整係数ホモロジー３球面の不変量つまり３次元位相幾何学双方において独創的な結果を与えただけでなく、双方をつなぐ新しい道筋を素直に理解できる自然な形で示したものであり、低次元多様体の位相幾何学に大きな進歩を齎すものである。よって、論文提出者　辻 俊輔　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。