

論文審査の結果の要旨

氏名 長町 一平

体 K 上の代数多様体 X の幾何的ファイバー \overline{X} のエタールコホモロジー群は K の絶対ガロア群の表現となる. この表現の性質と X の性質との関係を調べることは, 数論幾何学における重要な問題である. K が剰余標数が $p \geq 0$ の離散付値体で X が固有かつ滑らかな代数多様体である場合, X が良還元であるかどうか (X が K の付値環上の固有かつ滑らかなスキームに延びるかどうか) を l 進エタールコホモロジー群 (l は p と異なる素数) への惰性群 I_K の作用の自明性により判定する問題は良還元判定条件の問題として知られている. X が楕円曲線の場合は Néron-Ogg-Shafarevich の定理であり, また X がアーベル多様体の場合は Serre-Tate により証明されている.

次に X が固有双曲的曲線の場合を考える. このときは, (1 次) l 進エタールコホモロジー群を見るだけでは良還元の判定には不十分であり, その非可換版である幾何的代数的基本群 $\Delta_X := \pi_1(\overline{X}, *)$ を考える必要がある. 織田孝幸氏により, X が良還元を持つことと, Δ_X の $\text{pro-}p'$ 完備化 $\Delta_X^{p'}$ への I_K の外作用が自明であること, 更にある素数 $l \neq p$ に対する Δ_X の $\text{pro-}l$ 完備化 Δ_X^l への I_K の外作用が自明であることが同値であることが証明された. また, X が固有でない双曲的曲線の場合も, 玉川安騎男氏により (適切な良還元性の定義の下で) 同様の定理が証明されている.

上記の織田氏, 玉川氏の結果は遠アーベル幾何学の一例であると解釈できる: 遠アーベル幾何学では, 適当な体 K 上の遠アーベル的な (代数的基本群が可換とはほど遠い) 代数多様体は, その代数的基本群から復元可能であると考えられる. 実際, この考えが双曲的曲線の場合に成立することは, Grothendieck 予想の解決として玉川氏や望月新一氏らにより知られている. 従って, 代数的基本群の情報から遠アーベルな代数多様体の性質を読み取ることができるのは自然なことである.

また, 多重双曲的曲線 (双曲的曲線をファイバーとする滑らかなファイブレーションの積み重ねとして書ける代数多様体) は遠アーベル的であると思われる. 実際, 体 K に対する適当な仮定の下で, 星裕一郎氏により Grothendieck 予想が 4 次元以下の場合に証明されている. 従って, 多重双曲的曲線に対しても双曲的曲線の場合と類似した良還元判定条件が成り立つと期待するのは自然であろう.

長町氏の博士論文は多重双曲的曲線に対する良還元判定条件について充分に良い解答を与えるものである. K を剰余標数が $p \geq 0$ である離散付値体とし, X を K 上の n 次元の多重双曲的曲線とする. そして, b を, X を構

成するファイブレーションたちのファイバーの1次 Betti 数の最大値とする. このとき, 長町氏は (1) $p = 0$, (2) $p > b + 1$ かつ $n = 2$, (3) $p \gg 0$ のいずれかの状況で, X が良還元を持つことと, 幾何的代数的基本群 Δ_X の pro- p' 完備化 $\Delta_X^{p'}$ への惰性群 I_K の外作用が自明であることが同値であることを示した. 高次元の良還元判定条件問題における意義深い結果である.

証明は次元 n に関する帰納法による. (1) の場合は X を構成するファイブレーションに伴う基本群のホモトピー完全列の存在と, 双曲的曲線の基本群の中心自明性を用いて示される. しかし, (2), (3) の場合は, 基本群の pro- p' 完備化のホモトピー完全列が一般には存在しないので, 証明が複雑になる. (2) の場合は, 補助的な素数 l をとり, $\Delta_X^{p'}$ の (l, p') 商 $\Delta_X^{(l, p')}$ なる更なる商をとることにより中心自明性を持つ基本群のホモトピー完全列を構成することが証明の鍵となる. (3) の場合は更に $\Delta_X^{(l, p')}$ の商を帰納法を駆使して定義してホモトピー完全列を構成する. いずれも独創性にあふれた証明である.

また, 長町氏は論文において, 多重双曲的曲線 X の興味深い例をいくつか挙げ, ある一つの素数 $l \neq p$ に対する Δ_X の pro- l 完備化 Δ_X^l への惰性群 I_K の外作用を見ただけでは X が良還元を持つとは判定できないこと, また, 代数的基本群の幾何的 pro- p 完備化を出発点とした場合の Grothendieck 予想が成立しないことを示した. これは, 2次元以上の多重双曲的曲線の遠アーベル性は, 双曲的曲線のそれより弱いものであることを具体的にはじめて示したものであり, 大変興味深いものである.

以上に述べたように, 本博士論文における長町氏の結果は多重双曲的曲線の数論幾何学, 遠アーベル幾何学において大変意義深いものである. よって, 論文提出者 長町一平 は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める.