論文審査の結果の要旨

氏　名　野崎 雄太

３次元多様体とそれに含まれる結び目の理論は，位相幾何学の創始以来永らくの研究の歴史があるが，その典型的な問題の一つとして，与えられた３次元多様体の中に特定の性質を持つ結び目が存在するか否かを問うものがある．この種の存在問題は，３次元の特殊性の下で，多様体と結び目の双方の位相的性質が強く反映されるため，一般的には解決することが難しいものであり，そのことがまた３次元の位相幾何学の深淵さを表すものとなっている．そのような問題意識の下で論文提出者の野崎氏は，二つの視点から，ある種の結び目の存在問題に関連した３次元多様体の性質についての研究を行い，いくつかの結果を得た．本論文はそれぞれのアプローチに応じた二部構成となっている．

第一部は曲面のホモロジーコボルディズムを用いた閉３次元多様体の種数不変量について述べたものである．連結で向きづけ可能な閉３次元多様体がファイバー結び目を許容することは Alexander の先駆的な結果を受け，Myers や González-Acuña により 1970 年代後半に示された事実であるが，そのような結び目の種数の最小値として定義される種数不変量（論文内で op と書かれる不変量）については，古典的な種数不変量である Heegaard 種数と関連して興味深いものとなっている．しかしながら，特殊なレンズ空間，もしくはそれら二つの連結和などといった限られた場合に対する森元や Baker の結果を除いて，値 op の一般的な決定はなされていない．そのような値 op を下から評価するものとして，ファイバー結び目よりも条件が緩いホモロジーファイバー結び目を用いた同様の値（論文内で hc と書かれる不変量）が逆井によって定義され，基本的な性質が調べられていた．第一部の主結果はこの値 hc に関する知見を深化させるものであり，具体的には任意のレンズ空間が種数１のホモロジーファイバー結び目を許容することの証明とその一連の系，３次元多様体のある種の安定化操作による hc の値の変化に関する公式などが述べられている．前者は，存在問題を整数係数２次形式の理論や Chebotarev の密度定理などといった整数論で古典的に知られている深い理論に結びつけて解決したものであり，３次元位相幾何学においてその手法は非常に特徴的である．後者についても，多様体のホモロジー群の交叉形式の変化を丁寧に追跡しながら，求めるホモロジーファイバー曲面を具体的に構成していくという議論を行っており，最終的な結果の簡潔さとは対照的に，証明には粘り強い議論を重ねることが要求される．

第二部は結び目群と結び目の対称性の関係を述べたものである．まず，レンズ空間の場合を念頭に置き，整ホモロジー３球面を有限巡回被覆に持つ３次元多様体を固定する．そして，その多様体の中の結び目に対し，被覆写像による逆像が連結，すなわち再び結

び目となっている状況を設定する. この状況で現れる整ホモロジー３球面内の結び目たちは先天的に被覆変換群による有限群の対称性を持っているが, 反対に与えられた結び目がその種の対称性を持っているかを決定することは簡単なことではない. そこで, そのような結び目たちの別の特徴付けを与えることが問題として浮かび上がってくる. 第二部の主結果として, 野崎氏は C^p 群と呼ばれる群のクラスを考え, 対象となる結び目の結び目群が C^p 群となることを群論や群のホモロジーの理論を用いて証明した. その応用として, ３次元球面内のトーラス結び目の自由周期に関する Hartley の結果や, 結び目群の外部自己同型群が自明であるような結び目の性質に関する Borel の定理の統一的な別証明を与えることに成功している. 野崎氏はさらに３次以上の組み紐群や６次の対称群が偶数 p について C^p 群とならないこと, 交代群の C^p 部分群の決定など, C^p 群そのものの研究についてもいくつかの成果を与えており, これらは位相幾何を離れて純粋な群論的視点からも興味深い結果となっている.

以上のように論文提出者の研究は, 古典から最新まで繋がる代数的技法と位相幾何の理論を有機的に組み合わせることで３次元多様体や結び目の理論の新たな視点, 観点を切り開くものとなっており, 当分野の発展に貢献するものである.

よって, 論文提出者 野崎雄太 は, 博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める.