論文の内容の要旨

論文題目　On wrapping number, adequacy and the crossing number of satellite knots

（ラッピング数，充足性と随伴結び目の最小交点数について）

氏　　名　ヒメネス　パスクアル　アドリアン

本論文ではサテライト結び目 K に対して，コンパニオンの充足性の仮定のもとで，最小交点数 $c(K)$ のある下からの評価を与える．

第１節では，ソリッドトーラス (ST) 内における結び目のアニュラスへの射影 D がアニュラスの中心を回る回数（ラッピング数 $w_{ST}(D)$ ）を計算する簡単な方法を紹介する．更に，この方法に基づき $w_{ST}(D)$ を求める全てメリディアン（up to isotopy）を再構成する方法を紹介する．

第２節以降は結び目の充足性（adequacy）を考える．結び目の図式 D の各交点 を縦に切って（ ），生成されるサーキットの個数 c を数える．どの交点の切り方を変えても生成されるサーキットの個数が c 未満なら D は正充足という．同様に，横に切る（ ）操作に対して同じ事が言えれば負充足という．正と負充足性が同時に成り立つ D は充足という．

第２節では充足性に関する既知の結果と次の定理を準備する．

定理 1 ([4]). 向き付けられた絡み目 L の連続図 D に対して， $B(J(L)) \leq c(D)$ が成り立つ．ここで，$J(L)$ は L のJones多項式， B は多項式の最大冪と最小冪の差（breadth）である．

第３節では第２節で紹介した結果をリンクパラレルへ拡張する．リンクパラレル L^r とは，絡み目 L の r 個のコピーを平行に取ったものである．充足性が平行移動の下で保たれるので L が充足なら L^r も充足である．これを使うと第２節で紹介する結果を拡張する上で，次の事が言える．

定理 2. 向き付けられた充足なリンクパラレル L^r を考える．このとき，

$$c(L^r) \geq \frac{r^2}{2}c(L) + 2r - 1.$$

これを証明する為に定理 1でJones多項式の代わりにKauffmanブラケットを使う．

第４節ではケーブル結び目と最終的にサテライト結び目について記述する．ケーブル結び目 $(K; r)$ は向き付けられた結び目 K の図式 D の r-パラルル D^r に $-w(D)$ 個のひねりを加えたものである．$w(D)$ は D のwritheである．

補題 3. 向き付けられた充足な結び目 K に対して，$B(J(K; r)) \geq B(J(K^r))$ が成り立つ.

最後にサテライト結び目に関する結果を述べる．まずはサテライト結び目を定義する．サテライト結び目を構成するには ST 内にあるパターン P と S^3 内のコンパニオン C を考える．P が入っている ST を C の近傍に埋め込む．P の像を $Sat(P, C)$と書き， P と C のサテライト結び目という．

サテライト結び目のJones多項式は C のケーブル結び目の言葉で下記の定理のように書ける．但し，その前に ST でのKauffmanブラケットを定義する．通常の結び目の図式 D に対してKauffmanブラケット $\langle D \rangle$ は次のように定義される [2] ：

(i) $\langle \bigcirc \rangle = 1,$

(ii) $\langle \times \rangle = A\langle)(\rangle + A^{-1}\langle \asymp \rangle,$

(iii) $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2)\langle D \rangle$

同様に，今度 ST 内の結び目のアニュラスへの射影 D に対してKauffmanブラケット $\langle D \rangle_{ST}$ は次のように定義できる：

(i) (a) $\langle \smile \bigcirc \rangle_{ST} = 1,$

(b) $\langle$  $\rangle_{ST} = z_{ST}^k,$

(ii) $\langle \times \rangle_{ST} = A\langle)(\rangle_{ST} + A^{-1}\langle \asymp \rangle_{ST},$

(iii) (a) $\langle D \sqcup \smile \bigcirc \rangle_{ST} = (-A^{-2} - A^2)\langle D \rangle_{ST},$

(b) $\langle D \sqcup$  $\rangle_{ST} = \langle D \rangle_{ST} z_{ST}^k$

ここで， $\smile$ はアニュラスの中心を表す．この定義を用いると ST 内のJones多項式が次のように得られる：

$$J_{ST}(L) = (-A^{-3})^{w(D)}\langle D \rangle_{ST}\Big|_{t^{-1/2}=A^2}.$$

先ほどと同様に， $w(D)$ は D のwritheである.

$J_{ST}(L)$ を用いると次の定理が成立する.

定理 4 ([1]). P を ST 内の結び目， C を S^3 内の結び目とし，$Sat(P, C)$を P と C から得られるサテライト結び目とする．更に， P の ST 内のJones多項式を $J_{ST}(P) = \sum_{k=0}^{M} \beta_k z_{ST}^k$ と置く．このとき，

$$J(Sat(P, C)) = \sum_{k=0}^{M} \beta_k J(C; k)\,.$$

定理 5. P を ST 内の結び目， C を S^3 内の充足な結び目とし，$Sat(P, C)$を P と C から得られるサテライト結び目とする．更に， P の ST 内のJones多項式を $J_{ST}(P) = \sum_{k=0}^{M} \beta_k z_{ST}^k$ と置

く．このとき，

$$c(Sat(P, C)) \geq B(\beta_M) + \frac{M^2}{2}c(C) + 2M - 1.$$

証明はここまでに紹介した全ての定理と補題に基づく．

系 6. 特に， $c(Sat(P, C)) > c(C)$ が成り立つ．

上記の系は1995年にKirby氏が作成した低次元トポロジーにおける問題集 [3] のProblem 1.67をコンパニオン C が充足な場合に解決するものである．

参考文献

[1] A. Jiménez Pascual, On lassos and the Jones polynomial of satellite knots, *J. Knot Theory Ramifications* (2016), Vol. 25, No. 02, 1650011.

[2] L. H. Kauffman, State models and the Jones polynomial, *Topology* 26 (1987), 395–407.

[3] R. Kirby, Problems in low-dimensional topology, *Proceedings of Georgia Topology Conference*, Part 2 (1995), 35–473.

[4] W.B.R. Lickorish, An introduction to knot theory, *Graduate Texts in Mathematics*, 175, *Springer-Verlag, New York* (1997).