論文の内容の要旨

論文題目 On L^2-extension theorems and singularities of plurisubharmonic functions in complex analysis and geometry (複素解析・複素幾何における L^2 拡張定理と多重劣調和関数の特異性について)

氏　　名 細野 元気

本論文では、L^2 拡張定理や多重劣調和関数の特異性といった観点から、複素解析・複素幾何における様々な問題を研究する。論文は全 2 部で構成されている。第 1 部では、L^2 拡張定理の新しいバージョンを取り扱う。具体的には、ジェットに対する最良定数の拡張定理と、最良定数のさらなる改良を行う。第 2 部では、多重劣調和関数や、特異エルミート計量、またその高ランク類似の特異性を取り扱う。

第 1 部では、**大沢-竹腰の L^2 拡張定理** [OT] を取り扱う。$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を有界擬凸領域、$V := \Omega \cap \{z_n = 0\}$ とおく。ただし、$(z_1, \ldots, z_n)$ を $\mathbb{C}^n$ の標準的な座標とする。このとき、V 上の任意の L^2 正則関数を、Ω 上の正則関数に L^2 評価付きで拡張できるというのが、L^2 拡張定理の主張である。L^2 拡張定理はさまざまな形に一般化されており、それらは複素解析や複素幾何において広く用いられている。例えば、Demailly による多重劣調和関数の近似や、Siu による多重種数の変形不変性の証明に用いられている。L^2 拡張定理に関する問題として、L^2 評価の係数を最良のものにできるか (**最良係数、最良評価**) という問題が挙げられる。この問題は長い間研究されてきたが、近年 Błocki [Blo] と Guan-Zhou [GZ] によって解決された。[Blo], [GZ] における証明は、大沢-竹腰による元々の証明と同じ手法によるものであるが、議論に現れる補助の関数を非常に精密に選ぶ必要があった。そののちに、Berndtsson-Lempert [BL] によって、最良評価の別証明が得られた。その証明は、Berndtsson による、重み付き L^2 正則関数のなす空間の変形に関する理論を用いたもので、本質的に新しい証明である。最良係数の L^2 拡張定理を用いて、**吹田予想**などの問題が解決された。吹田予想は、対数容量と Bergman 核の間の関係に関する予想である。吹田予想や、Berndtsson-Lempert による新しい証明を通して、L^2 拡張定理の評価の係数と、Green 関数の極付近での振る舞いの間に関係があることが見て取れる。

第 1 章では、**ジェット** (法線方向の微分係数) に対する最良係数の L^2 拡張定理 [Hos3] を示す。ジェットに対する L^2 拡張定理は、Popovici [Pop] や Demailly [Dem16] などによって調べられている。[Dem16] では、ジェットに限らず、より一般に可約な部分多様体からの拡張問題が扱われている。[Dem16] においては、[Blo] や [GZ] のように補助の関数を精密に選ぶことで最良評価が得られることが期待されていたが、明示的には得られていなかった。ここでは、[BL] の方法を利用し、ジェットに対する最良定数の拡張定理を証明する。$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を有界擬凸領域とする。$S \subset \Omega$ を、余次元が k の閉部分多様体とする。また、ϕ を Ω 上の連続な多重劣調和関数とする。G を、Ω 上の多重劣調和関数であって、S の各点の近傍で連続関数 h を用いて

$$G(z) = \log(|z_1|^2 + \cdots + |z_k|^2) + h(z),$$

$S = \{z_1 = \cdots = z_k = 0\}$ の形で書けることを仮定する。この仮定は、[Dem16] よりも強い仮定であるが、ジェットのなすベクトル束 $J^{(p-1)} := \mathcal{I}_S^{p-1}/\mathcal{I}_S^p$ 上の Hermite 計量を定義するための仮定である ([BL] の方法では Hilbert 空間論を用いるため、Hermite 計量を定義する必要がある)。以上の仮定の下で、以下のように $J^{(p-1)}$ 上の Hermite 計量を定義することができる： f, g を、$J^{(p-1)}$ の滑らかかつコンパクト台を持つ切断とする。このとき、それらの Ω への滑らかな拡張を $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ とおいたとき、

$$\int_S \langle f, g \rangle_{J_x^{(p-1)}} dV_S = \lim_{t \to -\infty} \int_{\Omega \cap \{t < G < t+1\}} \widetilde{f}\,\overline{\widetilde{g}} e^{-\phi - m_p G} dV_{\mathbb{C}^n}$$

が成り立つように定義する。以上の設定のもとで、この章の主結果は以下の通りである：

定理 1. 任意の S 上の $J^{(p-1)}$ の L^2 正則切断 $f \in A^2(S, J^{(p-1)})$ に対して、その拡張 $F_0 \in (\Omega, \mathcal{I}_S^{(p-1)})$ であって、以下の評価を満たすものが存在する：

$$\int_\Omega |F_0|^2 e^{-\phi-(k+p-2)G} d\lambda \leq \|f\|_{J^{(p-1)}}$$

この評価は最良であることを確かめることができる。

第 2 章では、最良評価のさらなる改良を行う [Hos4]。[Blo], [BL] における最良評価の係数は、ウェイト関数に依存しないものであった。そこで、ウェイト関数に依存した評価を行うことによって、評価のさらなる改良が期待される。Hartogs 領域と呼ばれるタイプの 1 次元高い領域を考えることによって、今までの評価をさらに改善することに成功した。具体的には、以下のような結果を得た。

定理 2. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を有界領域とし、ϕ を Ω 上の劣調和関数とする。$0 \in \Omega$, $\phi(0) = 0$ を仮定する。

$$\widetilde{\Omega} := \{(z, w) \in \Omega \times \mathbb{C} : |w|^2 < e^{-\phi(z)}\}$$

とおく。$\widetilde{\Omega}$ 上の多重劣調和関数 $\widetilde{G}$ であって、$\widetilde{G} \leq 0$ かつ、$\widetilde{\Omega}$ 上の連続関数 $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ に対して

$$\log |z|^2 + \widetilde{A}(z, w) \geq \widetilde{G} \geq \log |z|^2 - \widetilde{B}(z, w)$$

を満たすものが存在すると仮定する。このとき、Ω 上の正則関数 f であって、$f(0) = 1$、

$$\int_\Omega |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \leq \int_{|w|<1} e^{B(0,w)} d\lambda(w)$$

を満たすものが存在する。

定理 2 の評価は、Ω が円板でウェイト関数 ϕ が回転対称である場合、実際にノルムが最小の拡張を与えるものになっている。同じ手法は、[BL] や [MV] において、Green 型関数についての条件を緩めるために用いられている。この方法によって、より一般の状況で、さらに精緻な評価が得られることが期待される。

第 2 部では、多重劣調和関数や、その高ランク類似であるベクトル束の特異エルミート計量の特異性を取り扱う。多重劣調和関数は多変数関数論において非常に重要な役割を果たしてきた関数のクラスであり、その一般化として、直線束の特異エルミート計量や、準多重劣調和関数も重要である。多重劣調和関数を取り扱う上で難しい点として、**特異性**をもつこと、すなわち、値が $-\infty$ に発散してしまう場合があることが挙げられる。第 2 部では、特異性に関連する問題を考察する。

第 3 章では、擬凸領域上の多重劣調和関数の空間内の測地線を取り扱う [Hos2]。多重劣調和関数の測地線の概念は、元々 Kähler 幾何の文脈で考案されたものである。Kähler 計量の空間の満渕計量に関する測地線は、ある Mongè-ampere 方程式の解として特徴づけられる。そこで、Perron 法により得られる Mongè-Ampere 方程式の弱解である弱測地線が研究されている。Rashkovskii は、弱測地線の擬凸領域における類似を考察している [Ras16]。特に、端点が有限エネルギーを持つ多重劣調和関数である場合、測地線は連続であることが示されている。一方、[Ras16] においては、端点が正の Lelong 数を持つ場合は、測地線が不連続になる場合があることが示されている。この章の目的は、特異性を持つかもしれない多重劣調和関数について、それらの間の測地線の挙動を調べることである。そのために、挙動を解析しやすい**トーリック多重劣調和関数**について考察する。多重劣調和関数が**トーリック**であるとは、その関数が $|z_1|, \ldots, |z_n|$ のみに依存することをいう。ここで、$(z_1, \ldots, z_n)$ は $\mathbb{C}^n$ の標準的な座標である。第 3 章の主結果は、トーリック多重劣調和関数に対して、測地線が連続であるための条件を、Lelong 数を用いて特徴付ける定理である。

第 4 章では、**ベクトル束の特異 Hermite 計量**を取り扱う [Hos1]。これは、直線束の特異 Hermite 計量の一般化であり、今までにいくつかの研究がなされているが、直線束の場合と類似の結果が得られているわけではない。特に、豊富性、ネフ性といった、代数幾何的な正値性の解析的な特徴付けは得られていない。難点としては、Hermite 計量を構成することが直線束の場合に比べて困難であることが挙げられる。直線束の場合には、$L \otimes m$ 上の Hermite 計量 h から、L 上の Hermite 計量 $h^{1/m}$ を構成することができる。しかし、ランクが高い場合は、同様の手法で $\mathrm{Sym}^m E$ の計量から E の計量を構成する方法は知られていない。ベクトル束 E が豊富であるとき、E が Griffiths の意味で正曲率な (滑らかな)Hermite 計量を持つかどうかは Griffiths 予想と呼ばれる未解決問題である。別の難点としては、ベクトル束の特異 Hermite 計量に対する曲率カレントが定義できないことが挙げられる。そのため、中野の意味での正曲率性は適切な定義がなされていない。L^2 評価法を用いるためには中野の意味での正曲率性が必要になる。そのため、(Griffiths の意味で正曲率の) 特異エルミート計量 h に対して、乗数イデアル層の高ランク類似 $\mathcal{J}(h)$ の連接性は、一般には不明である (直線束の場合、連接性は L^2 評価法を用いて証明される)。第 4 章では、連接性の十分条件として、h が解析的特異性を持つ場合は $\mathcal{J}(h)$ が連接になることを示している。また、解析的特異性をもつ h であって、畳み込みによる近似が中野の意味で正曲率ではないような例も挙げる。これらのことから、広いクラスの特異エルミート計量 h に対して、乗数イデアル層 $\mathcal{J}(h)$ が連接になることが期待される。また、この章では、[DPS94] の例に登場するベクトル束について、その上の正曲率の特異 Hermite 計量を決定している。[DPS94] においては、楕円曲線上の非自明なランク 2 のベクトル束について、その射影化の $\mathcal{O}(1)$ 上の特異 Hermite 計量が決定されている。この章の結果は、[DPS94] の結果の高ランク版の類似とみなすことができる。

第 5 章は、小池貴之氏との共同研究である [HK]。この章では、直線束の最小特異性計量を取り扱う。最小特異性計量は、代数幾何的な文脈では、因子の Zariski 分解の負部分に相当するものである。最小特異性計量の挙動は非常に複雑で、一般には具体的に記述することが極めて難しい。[Koi2] では、ある $\mathbb{P}^1$ 束上の直線束の最小特異性計量の表示を得ている。この章の主結果は、その $\mathbb{P}^r$ 束への一般化である。これによって、[Koi1], [Koi2] の主結果を含むクラスの直線束に対して、最小特異性計量を記述することができる。

参考文献

[BL] B. Berndtsson and L. Lempert. A proof of the Ohsawa-Takegoshi theorem with sharp estimates. *J. Math. Soc. Japan*, 68(4):1461–1472, 2016.

[Blo] Z. Błocki. Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem. *Invent. Math.*, 193(1):149–158, 2013.

[Dem16] J.-P. Demailly. Extension of holomorphic functions defined on non reduced analytic subvarieties. In *The legacy of Bernhard Riemann after one hundred and fifty years. Vol. I*, volume 35 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 191–222. Int. Press, Somerville, MA, 2016.

[DPS94] J.-P. Demailly, T. Peternell, and M. Schneider, *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 2, 295–345.

[GZ] Q. Guan and X. Zhou. A solution of an L^2 extension problem with an optimal estimate and applications. *Ann. of Math. (2)*, 181(3):1139–1208, 2015.

[Hos1] G. Hosono. Approximations and examples of singular Hermitian metrics on vector bundles. *Ark. Mat.* 55 (2017), no. 1, 131153.

[Hos2] G. Hosono. Local geodesics between toric plurisubharmonic functions with infinite energy. Ann.

Polon. Math. 120 (2017), no. 1, 3340.

[Hos3] G. Hosono. The optimal jet L^2 extension of Ohsawa-Takegoshi type. arXiv:1706.08725.

[Hos4] G. Hosono. On sharper estimates of Ohsawa-Takegoshi L^2-extension theorem. arXiv:1708.08269.

[HK] G. Hosono, T. Koike. On minimal singular metrics of line bundles whose stable base loci admit holomorphic tubular neighborhoods. arXiv:1612.08212.

[Koi1] T. Koike, Minimal singular metrics of a line bundle admitting no Zariski-decomposition, Tohoku Math. J. (2) Volume 67, Number 2 (2015), 297–321.

[Koi2] T. Koike, On minimal singular metrics of certain class of line bundles whose section ring is not finitely generated, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) Volume 65, Number 5 (2015), 1953–1967.

[MV] J. D. McNeal and D. Varolin. Extension of Jets With L^2 Estimates, and an Application. arXiv:1707.04483.

[OT] T. Ohsawa and K. Takegoshi. On the extension of L^2 holomorphic functions. *Math. Z.*, 195(2):197–204, 1987.

[Pop] D. Popovici. L^2 extension for jets of holomorphic sections of a Hermitian line bundle. *Nagoya Math. J.*, 180:1–34, 2005.

[Ras16] A. Rashkovskii, *Local geodesics for plurisubharmonic functions.* Math. Z., 1-11, 2016.