論文内容の要旨

博士論文題目
Studies on integral representations of GKZ hypergeometric functions (GKZ 超幾何函数の積分表示に関する研究)

氏名　　松原　宰榮

1　研究背景および動機

本論文では GKZ 超幾何函数の 5 つの実現、級数表示、Mellin-Barnes 型積分表示、Laplace 積分表示、Residue 積分表示、Euler 積分表示、の間の関係を明らかにする。GKZ 超幾何函数とは、ある多項式係数線形偏微分方程式系 $M_A(c)$ の解を指す。$M_A(c)$ は $n \times N$ 整数行列 A とパラメーターベクトル $c \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ の情報で定義される。任意のパラメーター c に対して、$M_A(c)$ はホロノミー系となることが知られている（Adolphson）。一般に、A から定まる格子 L 上の級数 $\varphi_v(z)$ を Γ 級数と呼ぶ。ここで行列 A を特別にとることにより、Γ 級数 $\varphi_v(z)$ は古典的な超幾何級数（Gauss, Kummer, Hermite-Weber, Bessel, Airy, Appell-Lauricella, Horn）となる。従って、GKZ 超幾何函数は古典超幾何級数の一般化であると捉えられる。更に、Gelfand, Fernández-Fernández による次の定理が知られている。

Theorem (Fernández-Fernández, G.-K.-Z.).
A から定まる Newton 多面体 Δ_A の良い正則三角形分割 T を一つとる。T に応じて有限 Abel 群の族 $\{G_\sigma\}_\sigma$ が定まり、$\bigcup_{\sigma\in T} G_\sigma$ でラベルづけられた Γ 級数 $\bigcup_{\sigma\in T}\{\varphi_{v_\sigma^{\mathbf{k}}}\}_{\mathbf{k}\in G_\sigma}$ が $M_A(c)$ の解空間の基底をなす。

このように、GKZ 超幾何函数の級数表示の理論はよく整備されていると言える。他方で、古典的超幾何函数たちはすべて初等函数を積分核にもつ積分表示を持っている。積分核が Γ 函数、指数関数、多項式の冪積函数からなるとき、それぞれ Mellin-Barnes 型積分表示、Laplace 型積分表示、Euler 型積分表示という。他方、GKZ 超幾何函数の文脈では、$M_A(c)$ が正則ホロノミー系であるときに Mellin-Barnes 型積分表示が Beukers によって、Euler 型積分表示が Gelfand, Kapranov, Zelevinsky によって導入、研究され、一般の $M_A(c)$ に対する Laplace 積分表示が Gelfand, Adolphson らによって導入、Schulze, Walther などにより研究された。また、$M_A(c)$ が正則ホロノミー系であるときに多変数特有の積分表示である Residue 積分表示が Beukers によって導入された。また、Cayley trick と呼ばれる方法により、Euler 積分表示は Laplace 積分表示へと変換できることが知られていた。そこで次のような問題が自然と設定される。

問題 1. 級数表示と積分表示はどのように関係するか。また級数解を与えるサイクルを組み合わせ的手続きで作ることができるか。
問題 2. 種種の積分表示の間にはどのような関係があるか。

本博士論文ではこれらの疑問に対する解答を与える。本論文では格子の生成条件 $\mathbb{Z}A=\mathbb{Z}^{n\times 1}$ を仮定する。

2 第一部：Mellin-Barnes 型積分表示と Γ 級数

第一部では不確定特異点型も込めた GKZ 超幾何函数の Mellin-Barnes 型積分表示を導入し、Laplace 積分表示、および Γ 級数との関係を述べる。まず、次が基本的である。

Theorem.
$\Delta_A=c.h.\{0,a_1^+\mathbf{e}(1),-a_1^-\mathbf{e}(1),\dots,a_l^+\mathbf{e}(l),-a_l^-\mathbf{e}(l),a_{l+1}\mathbf{e}(l+1),\dots,a_n\mathbf{e}(n)\}$ で、c が non-resonant であるとき、Laplace 積分表示のサイクルの空間 $\mathrm{H}_n^{r.d.}(\mathbb{T}^n)$ は一次元のサイクルの空間 $\mathrm{H}_1^{r.d.}(\mathbb{T})$ の直積である。ここに、$\mathrm{H}_*^{r.d.}(\mathbb{T}^*)$ は *M.Hien* の急減少ホモロジー群である。

この定理に現れるサイクル上で形式的に積分をすることにより、次の Mellin-Barnes 型積分表示に到達する。$\sigma\subset\{1,\dots,N\}$ を n 元集合で $\det A_\sigma\neq 0$ となるもの（これを n-simplex という）、$\bar{\sigma}=\{1,\dots,N\}\setminus\sigma$ とおく。この時、

$$F_\sigma(z)=\frac{z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}c}}{(2\pi\sqrt{-1})^{N-n}}\int_{C_{\overline{\sigma}}}\frac{\Gamma(s_{\overline{\sigma}})(e^{\pi\sqrt{-1}}z_{\overline{\sigma}})^{-s_{\overline{\sigma}}}z_\sigma^{A_\sigma^{-1}A_{\overline{\sigma}}s_{\overline{\sigma}}}}{\Gamma(\mathbf{1}-A_\sigma^{-1}(c-A_{\overline{\sigma}}s_{\overline{\sigma}}))}ds_{\overline{\sigma}}$$

とおいてこれを Mellin-Barnes 型積分表示と呼ぶ。ここで、$C_{\bar{\sigma}}$ は Hankel contour の直積である。次の定理が第一部の主結果である。

Theorem.
T を正則三角形分割で、$\forall\sigma\in T,\ |A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)|\leq 1(\forall j\in\bar{\sigma})$ となるものとする。c は T に対して *generic* であるとする。この時、各元 $\tilde{\mathbf{k}}\in\widehat{G}_\sigma=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_\sigma,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ に対して F_σ のある解析接続 $F_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}$ を対応させることができ、$\bigcup_{\sigma\in T}\{F_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}\}_{\tilde{\mathbf{k}}\in\widehat{G}_\sigma}$ は $M_A(c)$ の解の基底をなす。また、この基底と Γ 級数からなる基底 $\bigcup_{\sigma\in T}\{\varphi_{v_\sigma^{\mathbf{k}}}\}_{\mathbf{k}\in G_\sigma}$ の間の変換行列は（対角行列）$\times$（G_σ の指標行列の直和）で与えられる。

この Theorem により Mellin-Barnes 積分に対する問題 1 が解かれたことになる。

3 第二部之一：Laplace, Residue, Euler 積分表示に対するサイクルの構成

この節では三角形分割に付随するトーラスの被覆変換を通じて 3 種類の積分表示に対する積分サイクルを構成し、Γ 級数との対応を与える。以下の内容は §3, §4, §5 に対応する。$A=(\mathbf{a}(1)\mid\cdots\mid\mathbf{a}(N))$ と書くとき、この行列に付随した Laurent 多項式を $h_z(x)=\sum_{j=1}^N z_jx^{\mathbf{a}(j)}$ と置く。この時、

$$f_\Gamma(z)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_\Gamma e^{h_z(x)}x^{c-1}dx$$

を Laplace 積分表示と呼ぶ。$f_\Gamma(z)$ は実際 $M_A(c)$ の解である。各 n-simplex σ に対してトーラスの被覆変換を $p_\sigma:(\mathbb{C}^\times)^n_x\ni x\mapsto\xi_\sigma=x^{A_\sigma}\in(\mathbb{C}^\times)^n_{\xi_\sigma}$ で定める。すると、σ に付随した標準的なサイクル

を、$(\mathbb{C}^\times)^n_{\xi_\sigma}$ における Hankel contour と Pochhammer cycle の直積の、p による pull-back として作れる。（cycle の pull-back は Poincaré duality を通じて作る。）これを $\Gamma_{\sigma,0}$ と書く。Laplace 積分表示のサイクルの構成に関しては次が主結果である。

Theorem.
T を正則三角形分割で、$\forall\sigma\in T$, $|A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)|\le 1(\forall j\in\bar{\sigma})$ となるものとする。c は T に対して *generic* であるとする。この時、各元 $\tilde{\mathbf{k}}\in\widehat{G}_\sigma$ に対して $\Gamma_{\sigma,0}$ の p についての被覆変換 $\Gamma_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}$ を対応させることができ、$\bigcup_{\sigma\in T}\{f_{\Gamma_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}}\}_{\tilde{\mathbf{k}}\in\widehat{G}_\sigma}$ は $M_A(c)$ の解の基底をなす。また、この基底と Γ 級数からなる基底 $\bigcup_{\sigma\in T}\{\varphi_{v_\sigma^{\mathbf{k}}}\}_{\mathbf{k}\in G_\sigma}$ の間の変換行列は（対角行列）$\times$（G_σ の指標行列の直和）$\times$（対角行列）で与えられる。

次に Residue 及び Euler 積分表示に対する結果を述べる。$h_{l,z^{(l)}}(x)=\sum_{j=1}^{N_l} z_j^{(l)}x^{\mathbf{a}^{(l)}(j)}(l=1,\dots,k)$ を x 変数に対するトーラス $\mathbb{T}^n_x$ 上の Laurent 多項式たちとする。この時、Residue, Euler 積分表示を順に

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+2k}}\int_\Gamma\frac{y_1^{\gamma_1-1}\dots y_k^{\gamma_k-1}x^{c-1}dydx}{\prod_{l=1}^k(1-y_lh_{l,z^{(l)}}(x))},\quad \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+k}}\int_\Gamma\prod_{l=1}^k h_{l,z^{(l)}}(x)^{-\gamma_l}x^{c-1}dx$$

で定義する。$f_\Gamma(z)$ でこれらの積分のいずれかを表す。$n\times N_l$ 行列 A_l を $A_l=(\mathbf{a}^{(l)}(1)\mid\cdots\mid\mathbf{a}^{(l)}(N_l))$ で定義し、$n\times N$ $(N=N_1+\cdots+N_k)$ 行列 A を

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \hline
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \hline
 & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ \hline
 & A_1 & & & A_2 & & \cdots & & A_k &
\end{array}\right)$$

で定義する。$d=\begin{pmatrix}\gamma\\ c\end{pmatrix}$ と置く時、$f_\Gamma(z)$ は $M_A(d)$ の解である。各 $(n+k)$-simplex σ に対してトーラスの被覆変換を $p_\sigma:(\mathbb{C}^\times)^{n+k}_{(y,x)}\ni(y,x)\mapsto\xi_\sigma=(y,x)^{A_\sigma}\in(\mathbb{C}^\times)^{n+k}_{\xi_\sigma}$ で定める。この時、Residue 積分表示における σ に付随した標準的なサイクルを、$(\mathbb{C}^\times)^n_{\xi_\sigma}$ における Pochhammer cycle の直積の、p による pull-back として作れる。これを $\Gamma_{\sigma,0}$ と書く。Residue 積分表示のサイクルの構成に関しては次が主結果である。

Theorem.
T を正則三角形分割であるとする。d は T に対して *generic* であるとする。この時、各元 $\tilde{\mathbf{k}}\in\widehat{G}_\sigma$ に対して $\Gamma_{\sigma,0}$ の p についての被覆変換 $\Gamma_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}$ を対応させることができ、$\bigcup_{\sigma\in T}\{f_{\Gamma_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}}\}_{\tilde{\mathbf{k}}\in\widehat{G}_\sigma}$ は $M_A(c)$ の解の基底をなす。また、この基底と Γ 級数からなる基底 $\bigcup_{\sigma\in T}\{\varphi_{v_\sigma^{\mathbf{k}}}\}_{\mathbf{k}\in G_\sigma}$ の間の変換行列は（対角行列）$\times$（G_σ の指標行列の直和）で与えられる。

Euler 積分表示については、座標変換はより対称的でない複雑な形をしている。まず、各 $(n+k)$ simplex σ に対してうまく n 元部分集合 τ を取り出す。この τ と A の情報から被覆変換 $p:(\mathbb{C}^\times)^n\to(\mathbb{C}^\times)^n$ が定まり、再び標準的サイクル $\Gamma_{\sigma,0}$ が定義される。この時、次の Euler 積分表示に関する主結果を得る。

Theorem.
T を正則三角形分割であるとする。d は T に対して *generic* であるとする。この時、各元 $\tilde{\mathbf{k}}\in\widehat{G}_\sigma$ に

対して $\Gamma_{\sigma,0}$ の p についての被覆変換 $\Gamma_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}$ を対応させることができ、$\bigcup_{\sigma\in T}\{f_{\Gamma_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}}\}_{\tilde{\mathbf{k}}\in\widehat{G}_\sigma}$ は $M_A(c)$ の解の基底をなす。また、この基底と Γ 級数からなる基底 $\bigcup_{\sigma\in T}\{\varphi_{v_\sigma^{\mathbf{k}}}\}_{\mathbf{k}\in G_\sigma}$ の間の変換行列は（対角行列）$\times$（G_σ の指標行列の直和）で与えられる。

4 第二部之二：混合型積分表示の同値性とそのサイクルの構成

この節では以下の Laplace,Residue,Euler 積分表示を補完するような 3 つの積分表示を考え、それらの同値性を D 加群の順像の同型として示す。以下の内容は §6 に対応する。まず、一般に X を滑らかな代数多様体、φ を X 上の多価函数で $\frac{d\varphi}{\varphi}$ が X 上の代数的 1 形式となるものとするとき、$\mathcal{O}_X\varphi$ で X 上の捻った接続 $(\mathcal{O}_X,\nabla)$、$\nabla=d-\frac{d\varphi}{\varphi}\wedge$ を表す。$h_{l,z^{(l)}}(x)=\sum_{j=1}^{N_l}z_j^{(l)}x^{\mathbf{a}^{(l)}(j)}(l=0,\dots,k)$ を x 変数に対するトーラス $\mathbb{T}_x^n$ 上の Laurent 多項式たちとする。この時、$h_z(y,x)=h_{0,z^{(0)}}(x)+\sum_{l=1}^k y_l h_{l,z^{(l)}}(x)$ と置く。また、

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c|ccc}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \hline
 & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ \hline
 & A_0 & & & A_1 & & & A_2 & & \cdots & & A_k &
\end{array}\right)$$

と定める。この時、以下が第二部之二の主結果である。

Theorem.
Ω_z で A の *Newton non-degenerate locus* を表す。以下の $\mathcal{D}$-加群の標準的同型が存在する。

$$\begin{aligned}
M_A(d)|_{\Omega_z} &\simeq \int_\varpi \mathcal{O}_{\Omega_z\times(\mathbb{C}^\times)_y^k\times(\mathbb{C}^\times)_x^n}y^\gamma x^c e^{h_z(y,x)}\\
&\simeq \int_\pi \mathcal{O}_{\Omega_z\times(\mathbb{C}^\times)_x^n\setminus\left\{h_{1,z^{(1)}}\cdots h_{k,z^{(k)}}=0\right\}}h_1^{-\gamma_1}\cdots h_k^{-\gamma_k}x^c e^{h_{0,z^{(0)}}(x)}\\
&\simeq \int_{\tilde{\varpi}_z} \mathcal{O}_{\Omega_z\times(\mathbb{C}^\times)_y^k\times(\mathbb{C}^\times)_x^n\setminus\left\{(1-y_1h_{1,z^{(1)}})\cdots(1-y_kh_{k,z^{(k)}})=0\right\}}y^\gamma x^c e^{h_{0,z^{(0)}}(x)}.
\end{aligned}$$

ここに、ϖ, π, $\tilde{\varpi}$ はそれぞれ Ω_z への射影である。

この定理における第一の同型は本質的に Schulze-Walther によるものであり、学位申請者の結果は二番目以降の同型である。2 つ目の同型は通常 Cayley trick として知られているものであり、専門家は implicit に認識していたように思われる。しかし、D 加群の順像としての定式化は学位申請者によるものが初と思われる。また、3 つ目の同型は Leray の composed residue に対応するもので、多変数複素解析学における基本的な同型を GKZ 超幾何系にあてはめたものと思える。Residue 積分表示については解空間とサイクルの空間の対応が得られていなかったが、上の定理において $h_{0,z^{(0)}}(x)=0$ とし、Riemann-Hilbert 対応（の一部）を用いると次の結果を得る。

Corollary.
パラメーター d が *generic*（より正確な記述あり）であるとき、以下の局所系の間の同型が存在する。

$$\int : R^{n+k}\varpi_!(\mathbb{C}_{\tilde{Y}^{an}}y^\gamma x^c)\Big|_{\Omega^{an}}\ni\Gamma\mapsto\int_\Gamma\frac{y^{\gamma-1}x^{c-1}dydx}{(1-y_1h_{1,z^{(1)}}(x))\cdots(1-y_kh_{k,z^{(k)}}(x))}\in \mathrm{Sol}_{M_A(c)}\Big|_{\Omega^{an}}.$$

ただし、$\tilde{Y}=\Omega_z\times(\mathbb{C}^\times)_y^k\times(\mathbb{C}^\times)_x^n\setminus\left\{(1-y_1h_{1,z^{(1)}})\cdots(1-y_kh_{k,z^{(k)}})=0\right\}$

最後に、§7 においては上記の Theorem に現れる積分表示に対応するサイクルの基底を構成し、§3,§4,§5 同様に Γ 級数との対応を導いている。