

博士論文（要約）

論文題目 Validity of formal asymptotic expansions for
singularly perturbed competition-diffusion systems

（競争拡散系の特異摂動に対する形式的漸近展開の
正当性）

氏名 森 龍之介

論文の内容の要旨

論文題目：Validity of formal asymptotic expansions for singularly perturbed competition-diffusion systems

(競争拡散系の特異摂動に対する形式的漸近展開の正当性)

氏名： 森 龍之介

本論文では、次の2種競争拡散系の解の振舞いを考察した。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon u_t = \varepsilon D_1 \nabla \cdot (k(x) \nabla u) + \frac{h(x)}{\varepsilon} (R_1 - a_1 u - b_1 v) u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \varepsilon v_t = \varepsilon D_2 \nabla \cdot (k(x) \nabla v) + \frac{h(x)}{\varepsilon} (R_2 - a_2 u - b_2 v) v, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

ここで Ω は \mathbb{R}^N における有界領域であり、 $\partial/\partial\nu$ は $\partial\Omega$ における外向き法線微分を表す。また、 $k(x)$, $h(x)$ はなめらかな正値の関数で、 D_i, R_i, a_i, b_i ($i = 1, 2$) は次の不等式をみたす正定数である。

$$\frac{a_1}{a_2} < \frac{R_1}{R_2} < \frac{b_1}{b_2}. \quad (2)$$

定数 ε が非常に小さいと、(1) の解 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ に内部遷移層が現れ、その遷移層の運動が、ある界面方程式で近似できることが知られている。しかし、遷移層自体が実際にどのような形状をしているのか、これまで理論的には未解明であった。本論文では、この遷移層の形状を完全に特定することを目指した。

この種の方程式に対する従来の研究と同様に、本論文でも次のような状況設定の下で解析を進めた。

仮定 1. 次の常微分方程式をみたす関数 U, V が存在する。

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_1 U'' + (R_1 - a_1 U - b_1 V) U = 0, & z \in \mathbb{R}, \\ D_2 V'' + (R_2 - a_2 U - b_2 V) V = 0, & z \in \mathbb{R}, \\ (U(-\infty), V(-\infty)) = (R_1, 0), \\ (U(+\infty), V(+\infty)) = (0, R_2). \end{array} \right. \quad (3)$$

生態学的観点からは、方程式系 (1) は2種の生物種による生態系のダイナミクスの数理モデルであり、Lotka-Volterra 競争方程式と呼ぶ。また係数 R_1, R_2 は内的増殖率、 b_1, a_2 は種間競争率、 a_1, b_2 は種内競争率と呼ばれる。不等式 (2) が成り立つとき、対応する常微分方程式

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{du}{dt} = (R_1 - a_1 u - b_1 v) u, & t > 0, \\ \frac{dv}{dt} = (R_2 - a_2 u - b_2 v) v, & t > 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

の平衡点は 2 つの安定結節点 $p^+ := (R_1/a_1, 0)$, $p^- := (0, R_2/a_2)$, 不安定結節点 $(0, 0)$, 鞍点

$$(u^*, v^*) := \left(\frac{b_2 R_1 - b_1 R_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \frac{a_1 R_2 - a_2 R_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right)$$

のちょうど 4 つであり, 方程式系 (1) は双安定競争系と呼ばれる. (4) が定める流れは, セパトリクス (1 次元多様体) を境にして p^+ に収束する流れと p^- に収束する流れに分かれる. セパトリクスは (u^*, v^*) の安定多様体である. 仮定 1 は, 2 種競争拡散系

$$\begin{cases} U_t = D_1 U_{zz} + (R_1 - a_1 U - b_1 V)U, & z \in \mathbb{R}, t > 0, \\ V_t = D_2 V_{zz} + (R_2 - a_2 U - b_2 V)V, & z \in \mathbb{R}, t > 0 \end{cases} \quad (5)$$

が $(U(\pm\infty), V(\pm\infty)) = p^\mp$ となる定常解 $(U(z), V(z))$ を持つことを意味する. これは, 生態学的には, 2 種の生物の力関係が拮抗していることを示す. それは単独方程式の場合には次のような Allen–Cahn 型方程式に対応している.

$$U_t = U_{zz} + f(U), \quad f(0) = f(1) = 0, \quad f'(0) < 0, \quad f'(1) < 0, \quad \int_0^1 f(u) du = 0.$$

単独の Allen–Cahn 型方程式に対する特異極限の問題は多くの研究者によって研究され, $\varepsilon > 0$ が十分小さいならば, 解は, 初期時刻直後のごく短い間に, その値が 0 に近い部分, 1 に近い部分, 0 から 1 へと急激に移り変わる遷移層の部分に分かれること (界面形成) が示されている. また, 界面形成後のこの遷移層の運動は, 平均曲率流によってよく近似されること (界面運動) が分かっている. この問題, とくに界面運動に関する研究は数多くある一方, 界面形成と界面運動の両方を厳密に扱っている研究ははるかに少ない ([1, 2, 6, 11]). これらの研究の中で, 遷移層付近での解の形式的な漸近展開は実際の解の形状を大まかに近似することや, 遷移層の挙動を厳密に評価する優解, 劣解の構成に用いられる. Chen [6] は, 一般の滑らかな初期値に対して実際の解の遷移層と平均曲率流の解 (極限界面あるいは単に界面) の間のハウスドルフ距離が $O(\varepsilon |\log \varepsilon|)$ であることを示した. Alfaro–Hilhorst–Matano [1] はより一般の空間非一様な Allen–Cahn 方程式の場合を扱い, その誤差評価を $O(\varepsilon)$ まで改善した.

遷移層付近における解の形状に関しては, 初期値がすでに十分形式的漸近展開に近い場合には, Bellettini–Paolini [3] と de Mottoni–Schatzman [12] がそれぞれ誤差 $O(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|^2)$ と $O(\varepsilon^2)$ で実際の解がその漸近展開で近似されることを示した. しかし, より一般の初期値に対して形式的漸近展開が実際の解の形状を近似しているかどうかは長らく未解決であった. Alfaro–Matano [2] はこの問題を肯定的に解決した. すなわち, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき, 広いクラスの初期値に対する解が形式的漸近展開の主部に一様収束することを示した.

2 種競争拡散系 (1) の場合にも, 初期時刻直後のごく短い間に, その解の値が p^+ に近い部分, p^- に近い部分, p^+ から p^- に急激に移り変わる遷移層 Γ^ε

の部分が生じ、その遷移層が駆動力付き平均曲率流の解（界面 Γ ）で近似されることが、形式的な議論から予想される．榮-柳田 [7] はすでに遷移層が形成されている特殊な初期値のクラスに対して、遷移層の動きが平均曲率流で近似されることを示した．Hilhorst-Karali-Matano-Nakashima [8] は、一般の滑らかな初期値に対して、遷移層が生じ、遷移層 Γ^ε と界面 Γ との間のハウスドルフ距離が $O(\varepsilon)$ であることを示した．しかしながら、形式的漸近展開が実際の解を近似しているかどうかは扱われていなかった．本論文では、この形式的漸近展開の正当性、すなわち、一般の初期値に対して、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、その解の形状が形式的漸近展開の主部に一様収束することを示した．また、解の遷移層 Γ^ε が C^1 級の位相で界面 Γ に収束することも示した．つまり、その遷移層 Γ^ε が界面 Γ 上の関数のグラフで表され、その関数が $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 C^1 の位相で 0 に収束することを明らかにした．

証明には、単独の Allen-Cahn 型方程式に対する [2] の手法と類似のアイデアを用いた．すなわち、その証明は、リスケーリングの手法、優解・劣解の手法、および放物型方程式の全域解に対する Liouville 型定理に基づいている．ここで、全域解に対する Liouville 型定理とは、大まかにいえば、2つの進行波解に挟まれた全域解がその進行波解を平行移動したものに一致するというものである．しかしながら、本論文の問題において、解の遷移層 Γ^ε は一点の逆像ではなく、(4) のセパトリクス逆像として定義され、単独の Allen-Cahn 型方程式の場合よりも Γ^ε と Γ の間の距離の評価はより複雑である．また、全域解に対する Liouville 型定理は、単独の Allen-Cahn 型方程式の場合にしか知られていなかった (Berestycki-Hamel [4, 5]) ．本論文では、2種競争拡散系のみならず、より一般の m 種協調拡散系への Liouville 型定理の拡張に成功した．これによって、この問題に限らず、例えば、[9, 10] に見られるような単独方程式の解の長時間挙動に関する解析が連立の方程式系の場合にも可能になるだろうと考えている．

参考文献

- [1] M. Alfaro, D. Hilhorst and H. Matano, *The singular limit of the Allen-Cahn equation and the FitzHugh-Nagumo system*, J. Differential Equations **245** (2008), 505-565.
- [2] M. Alfaro, H. Matano, *On the validity of formal asymptotic expansions in Allen-Cahn equation and FitzHugh-Nagumo system with generic initial data*, Discrete Cont. Dyn. Syst. B **17** (2012), 1639-1649.
- [3] G. Bellettini and M. Paolini, *Quasi-optimal error estimates for the mean curvature flow with a forcing term*, J. Differential Equations **8** (1995), 735-752..

- [4] H. Berestycki, F. Hamel, *Generalized traveling waves for reaction-diffusion equations*, in: Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations. In Honor of H. Brezis, in: Contemp. Math., vol. 446, Amer. Math. Soc., 2007, pp. 101-123.
- [5] H. Berestycki, F. Hamel, *Generalized transition waves and their properties*, Comm. Pure Appl. Math. **65** (2012), 592-684.
- [6] X. Chen, *Generation and propagation of interfaces for reaction-diffusion equations*, J. Differential Equations **96** (1992) 116-141.
- [7] S.-I. Ei and E. Yanagida, *Dynamics of interfaces in competition-diffusion systems*, SIAM J. Appl. Math. **54** (1994) 1355-1373.
- [8] D. Hilhorst, G. Karali, H. Matano, K. Nakashima, *Singular Limit of a Spatially Inhomogeneous Lotka–Volterra Competition-Diffusion System*, Comm. Partial Differential Equations, **32** (2007), 879-933.
- [9] H. Matano, M. Nara, *Large time behavior of disturbed planar fronts in the Allen–Cahn equation*, J. Differential Equations **251** (2011) 3522-3557.
- [10] H. Matano, Y. Mori, M. Nara, *Asymptotic behavior of spreading fronts in the anisotropic Allen–Cahn equations on \mathbb{R}^n* , to appear.
- [11] P. de Mottoni, M. Schatzman, *Development of interfaces in \mathbb{R}^n* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **116** (1990) 207-220.
- [12] P. de Mottoni, M. Schatzman, *Geometrical evolution of developed interfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995) 1533-1589.