論文審査の結果の要旨

氏 名　森 龍之介

論文提出者森龍之介は，次の２種競争拡散系の解の挙動を考察した．

$$\begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon D_1 \nabla \cdot (k(x)\nabla u) + \dfrac{h(x)}{\varepsilon}(R_1 - a_1 u - b_1 v)u & x \in \Omega, t > 0 \\ \varepsilon v_t = \varepsilon D_1 \nabla \cdot (k(x)\nabla v) + \dfrac{h(x)}{\varepsilon}(R_2 - a_2 u - b_2 v)v & x \in \Omega, t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

ここで, Ωは$\mathbf{R}^{\mathrm{N}}$ における有界領域であり, $\partial/\partial\nu$は$\partial\Omega$における外向き法線微分を表す. また, $k(x)$と$h(x)$はなめらかな正値の関数で，ε，R_i，a_i，b_i ($i = 1,2$) は正の定数であり，R_i，a_i，b_iは次の不等式をみたす.

$$\frac{a_1}{a_2} < \frac{R_1}{R_2} < \frac{b_1}{b_2}.$$

パラメーター εが非常に小さいと，方程式系の解 $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ に内部遷移層が現れ，その遷移層の運動が，ある界面方程式で近似できることが知られている．しかし，遷移層自体が実際にどのような形状をしているのか，これまで理論的には未解明であった．論文提出者は，この遷移層の形状を完全に特定することを目標とした．

上記の不等式が成り立つとき，対応する常微分方程式系の平衡点は，２つの安定結節点 $p^+ := (R_1/a_1, 0)$，　$p^- := (0, R_2/a_2)$，不安定結節点(0,0)，鞍点

$$(u^*, v^*) := \left(\frac{b_2R_1 - b_1R_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_1R_2 - a_2R_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

のちょうど４つであり，方程式系は双安定競争系と呼ばれる．この種の方程式系に対する従来の研究と同様に，論文提出者も次のような状況設定の下で解析を進めた．

仮定１．次の２種競争拡散系が$\big(U(\pm\infty), V(\pm\infty)\big) = p^{\mp}$となる定常解$(U(z), V(z))$を持つ．

仮定１は単独方程式の場合には，次のようなAllen－Cahn 型方程式に対応している．

$$U_t = U_{zz} + f(U), f(0) = f(1) = 0,\ f'(0) < 0,\ f'(1) < 0,\ \int_0^1 f(u)du = 0.$$

単独のAllen－Cahn 型方程式に対する特異極限の問題は多くの研究者によって研究され，$\varepsilon > 0$ が十分小さいならば，解は，初期時刻直後のごく短い間に，その値が 0 に近い部分，1 に近い部分，0 から1 へと急激に移り変わる遷移層の部分に分かれること（界面形成）が示されている．また，界面形成後のこの遷移層の運動は，平均曲率流によってよく近似されること（界面運動）が知られている．この問題，特に界面運動に関する研究は数多くある一方，界面形成と界面運動の両方を厳密に扱っている研究ははるかに少ない．Chen (1992) は，一般の滑らかな初期値に対して実際の解の遷移層と平均曲率流の解（極限界面

あるいは単に界面）の間のハウスドルフ距離が $O(\varepsilon|\log\varepsilon|)$であることを示した．Alfaro－Hilhorst－俣野（2008）はより一般の空間非一様なAllen－Cahn 方程式の場合を扱い，その誤差評価を$O(\varepsilon)$まで改善した．

遷移層付近における解の形状に関しては，初期値がすでに十分形式的漸近展開に近い場合には，Bellettini－Paolini（1995）とde Mottoni－Schatzman（1995）がそれぞれ誤差$O(\varepsilon^2|\log\varepsilon|^2)$と$O(\varepsilon^2)$で実際の解がその漸近展開で近似されることを示した．しかし，より一般の初期値に対して形式的漸近展開が実際の解の形状を近似しているかどうかは長らく未解決であった．Alfaro－俣野（2012）は $\varepsilon \to 0$ のとき，広いクラスの初期値に対する解が形式的漸近展開の主部に一様収束することを示し，この問題を肯定的に解決した．

２種競争拡散系の場合には栄－柳田（1994）が，すでに遷移層 Γ^ε が形成されている特殊な初期値のクラスに対して， Γ^εが Γ で近似されることを示した．Hilhorst－Karali－俣野－中島（2007)は，一般の滑らかな初期値に対して，遷移層 Γ^ε が生じ， Γ^ε と Γ との間のハウスドルフ距離が $O(\varepsilon)$ であることを示した．しかしながら， Γ^ε のより精密な形状や形式的漸近展開が実際の解を近似しているかどうかといった問題は扱われていなかった．

論文提出者は，一般の初期値に対して，$\varepsilon \to 0$ のとき，その解の形状が形式的漸近展開の主部に一様収束することを示した．また，その遷移層 Γ^ε が Γ 上の関数のグラフで表され，その関数が $\varepsilon \to 0$ のとき，C^1 の位相で 0 に収束することを明らかにした．

証明には，単独のAllen－Cahn 型方程式に対するAlfaro－俣野（2012）の手法と類似のアイデアを用いた．すなわち，その証明は，リスケーリングの手法，優解・劣解の手法，および放物型方程式の全域解に対するLiouville 型定理に基づいている．ここで，全域解に対するLiouville 型定理とは，大まかにいえば，２つの進行波解に挟まれた全域解がその進行波解を平行移動したものに一致するというものである．しかしながら，論文提出者の問題において，解の遷移層 Γ^ε は一点の逆像ではなく，常微分方程式系のセパラトリクスの逆像として定義され，単独のAllen－Cahn 型方程式の場合よりも Γ^ε の解析はより複雑である．また，全域解に対するLiouville 型定理は，単独のAllen－Cahn 型方程式の場合にしか知られていなかった（Berestycki－Hamel(2007)）．論文提出者は，２種競争拡散系のみならず，より一般の m 種協調拡散系へのLiouville 型定理の拡張に成功した．これによって，この問題に限らず，例えば，俣野－奈良(2011）や俣野－森－奈良の研究に見られるような単独方程式の解の長時間挙動に関する解析を連立の方程式系の場合に拡張することが可能になると考えられる．

論文提出者の研究は，それまで形式的にしか知られていなかった遷移層や解の形状を特定し，さらに，連立の反応拡散方程式系の解の長時間挙動の解明の糸口となるLiouville型定理を証明したという点で高く評価できる．

よって，論文提出者森龍之介は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．