

博士論文 (要約)

平面曲線の曲率フローを用いた
高速形状補間

平野 正浩

Rapid blending of planar curves based on curvature flow

Abstract

Shape interpolation plays a fundamental role in geometry processing; in addition, it offers a wide range of applications across multiple disciplines. From a geometric perspective, shape interpolation can be regarded as a representation of the temporal transformation of a shape; thus, in the development of a shape interpolation method, it is important to have both topological and analytical perspectives of the shape; therefore, we considered planar curves as a starting point so that we can account for both perspectives. Furthermore, it is important to have guidelines for interpolation design; therefore, in all physical simulations, physical fidelity should be considered; however, there is no well-defined counterpart in the case of animation production where the interpolation quality varies depending on the artist's aesthetic senses. Another important property for shape interpolation is the calculation time, which is based on criteria that can be quantitatively measured.

In the dissertation, we focus on a robust and rapid shape fairing scheme that exploits *curvature flow* and constraints via projection onto a carefully selected space. In applying this scheme to shape interpolation, the design problem of curvature flow and constraints becomes evident.

Further, in this dissertation, we provide a design guideline for shape interpolation based on the semantic relationship between shapes and propose a blending technique of planar curves using well-design curvature flows and by enforcing constraints. Furthermore, an inbetweening technique based on the semantics-based design guideline for a complicated structured curve is proposed, which is exemplified by one-strokes animation. As a starting point, smooth and rapid blending for closed curves with the same turning number is achieved using linear curvature flow and some closed curve conditions. To tackle the aforementioned topological issue, this blending technique is extended to consider closed curves with different turning numbers, achieving highly aesthetic blending with a shorter computation time. Further, our proposed scheme is applied to blend open curves with carefully designed conditions to constrain geometric quantities. Finally, an inbetweening method that takes into consideration the semantics relationships between shapes to be interpolated is proposed. Extensive subjective aesthetic evaluations of the interpolated shapes using crowdsourcing were conducted to verify the effectiveness of the proposed methods.

概要

形状補間はジオメトリ処理において最も基本的な処理の一つであり、様々な分野で応用される技術である。形状補間は形状表現を通して時間的な変化を記述することと等価であり、解析的・位相的性質を陽に取り扱うことが重要である。とりわけ位相的な観点から形状補間を取り扱う重要性に着目し、位相的構造が比較的単純な平面曲線を端緒として、異なる位相的性質を持つ曲線対の審美性の高い補間を実現する手法の探求を行う。物理的な意味を持つ形状補間においては物理的忠実性が尊重されるが、アニメーションなどの審美性が問われる場面では、客観的な品質の定量評価基準が存在せず、形状補間は不良設定問題となるため、補間形状生成手法の適切な設計指針を与えることが望ましい。一方で、形状補間の計算に要する時間は、形状補間手法の定量評価における数少ない指標であり、高速な計算手法が望ましい。

そこで、形状のフェアリング問題に対して、曲率フローと呼ばれる発展方程式とそれに課す制約条件を適切な空間に射影することで、安定かつ高速に計算することができるスキームに着目し、形状補間に対してもこのスキームが有効であるという可能性に着目する。しかし、形状補間に応用するためには、どのように曲率フローをデザインするべきか、また補間形状が満たすべき性質をどのように制約条件として記述すればよいか、といった問題を解く必要がある。

本論文では、平面曲線の形状補間を対象に、形状の解析的・位相的性質を陽に扱うことの重要性を指摘し、形状の意味的關係に基づく補間指針を示すとともに、曲率フローと制約条件のデザインによる平面曲線のブレンディングと、形状に意味的關係が強い部分と弱い部分が混在するような複雑な構造を有する平面曲線の中割りを高速に計算する手法を提案する。まず初めに閉曲線対を対象として、曲率で記述した曲率エネルギーの勾配フローを線形な閉曲線条件のもと積分することで、滑らかな形状遷移を高速に計算する手法を提案する。次に、回転数と呼ばれる閉曲線の位相的特徴に着目し、異なる回転数を持つ閉曲線対においても審美性の高いブレンディングを実現する手法を提案する。さらに、曲率フローと制約条件のデザインによるブレンディングというスキームを開曲線対に拡張する手法を提案する。そして最後に、一筆書きアニメーションを題材として、意味的關係に注意した高品質中割り手法を提案する。また、提案した手法によって生成した補間形状の審美性に関して、クラウドソーシングを用いた主観品質評価実験を行い、手法の有効性を確認した。

目次

第 1 章	序論	1
1.1	形状補間とは	1
1.2	曲率フローによる平面曲線補間の高速化	3
1.3	本研究における方針と目的	4
1.4	本論文の構成	6
第 2 章	研究背景	9
2.1	はじめに	9
2.2	曲線の微分幾何学	10
2.3	曲線の位相幾何学	12
2.4	曲率フローを用いたジオメトリ処理	14
2.5	CG における形状補間技術	18
2.5.1	陰的表現を用いた補間	18
2.5.2	メッシュ表現を用いた補間	19
2.5.3	形状空間表現を用いた補間	20
2.6	形状の対応探索	22
2.6.1	画像の対応探索	22
2.6.2	形状の対応探索	24
2.6.3	複数の形状を用いた対応探索	24
2.7	審美性の主観評価方法	25
2.7.1	主観品質評価法	25
2.7.2	クラウドソーシングを用いた評価	28
第 3 章	曲率勾配フローを用いた閉曲線ブレンディング	29
3.1	はじめに	29
3.2	準備	31
3.2.1	曲率	31
3.2.2	離散曲率	33
3.2.3	曲線のエネルギー	33
3.2.4	曲率勾配フロー	34

vi 目次

3.3	関連研究	34
3.4	曲率勾配フローを用いた閉曲線ブレンディング手法	36
3.4.1	概要	36
3.4.2	閉曲線からのポリゴンの構成	36
3.4.3	ジョイントパーティション	36
3.4.4	最急降下法による曲率フローの設計	37
3.4.5	閉曲線条件の適用	38
3.4.6	離散曲線の再構成	39
3.4.7	再構成した離散曲線の幾何学的性質	40
3.5	評価	41
3.5.1	ブレンディング結果	43
3.5.2	ブレンディングに関する誤差評価	47
3.5.3	ブレンディングに要した計算時間	47
3.6	考察	50
3.7	本章のまとめ	52
第 4 章	曲率拡散フローを用いた閉曲線ブレンディング	53
4.1	はじめに	54
4.2	準備	56
4.2.1	回転数	56
4.2.2	曲率拡散フロー	57
4.3	適応的曲率フローと曲率拡散フローを用いた閉曲線ブレンディング手法	58
4.3.1	概要	58
4.3.2	離散化とジョイントパーティション	60
4.3.3	オフセット	61
4.3.4	曲率フローのデザイン	62
4.3.5	閉曲線条件の適用	67
4.3.6	離散曲線の再構成	67
4.4	評価	68
4.4.1	回転数が同じ場合	69
4.4.2	回転数が異なる場合	72
4.4.3	離散化誤差の評価	77
4.5	考察	77
4.6	本章のまとめ	80
第 5 章	曲率勾配フローを用いた開曲線ブレンディング	81
第 6 章	一筆書きアニメーションの対話的中割り	83

第 7 章 結論

85

参考文献

89

第 1 章

序論

1.1 形状補間とは

我々は物体を認識するとき、どのような情報を獲得しているのだろうか。ヒトは五感の中でも、特に視覚に依拠する生き物であるため、その物体の持つ視覚的な特徴を主根拠としてその物体が何であるかを判断する。なかでも物体の形状情報は、物体のシルエットからでもその物体が何かを容易に推測できるように、物体を物体たらしめる非常に重要な要素である。

物体の形状は 2 次元平面や 3 次元空間上で様々な形式で表現される。物理的な正確性を追求することにより写実的な表現を行うこともあれば、全体にエフェクトをかけることであえて非現実感を際立たせることも可能である。このように、物体をどのように表現するかが、我々はその物体に抱く感覚に大きな影響を与える。こうした表現形式の多様性は、主に空間的な自由度に依拠するものであるといえるが、我々は同時に時間的な変化を知覚することができる。空間方向の次元だけで表現された物体は時間的な変化を受けることがないため、時間を知覚できる我々からすると静止物体であるといえるが、空間方向の次元に加えて時間方向の次元を取り込むことで、時間的な変化を持つ物体、すなわち動的物体の表現が可能となる。これにより物体は動きを獲得し、生命が吹き込まれるのである。

こうした形状の時空間的表現を観察すると、自然に幾何学的な構造が見えてくる。このことは、我々自身が知覚する空間を舞台とし、時間という媒介変数に沿った対象の変形や移動を、空間 \mathcal{X} と時間 t の関数 $f(\mathcal{X}, t)$ による表現を通して幾何学的な解析するという観点が数学者の興味の対象となってきた。古代ギリシャにおいては、ゼノンのパラドックスに見られるように時間的な概念を持たない静止したものを対象として初等的な幾何学的性質が研究されてきたが、デカルトによって導入された座標の概念を通して解析学の成果が幾何学に取り入れられた。この流れはオイラーやガウスらによって引き継がれ、今日の解析幾何学の基礎が築かれた。特に、モンジュらによって創始された微分幾何学は、今日でも形状を解析する基本的な道具として用いられている。このようにして発展してきた幾何学では、ニュートンによって構築された力学体系と同様に、幾何学においても空間座標と独立な軸として時間座標を導入し、時間と空間をパラメータとして変形を表現する。時間とともに変化する形状の幾何学的解析手法が発展すると同時に、逆に形状自身の変形に対して不変な、位相的性質の重要性が明らかに

2 第1章 序論

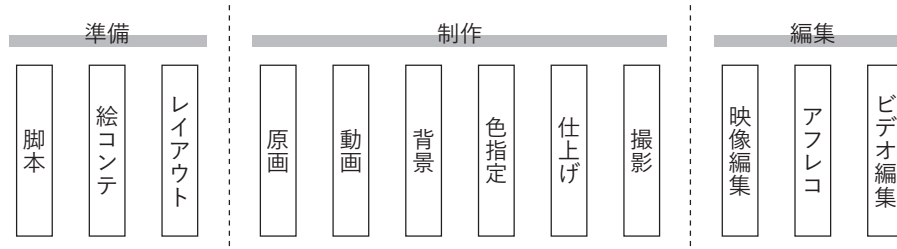


図 1.1. アニメーション制作の流れ。

なってきた。このように、形状の時間変化を取り扱う上で、いわば解析的な手法で形状を解析する「かたい」幾何学と、位相的な解析をする「やわらかい」幾何学の両面から捉えることが重要である。

また、時空間的な動的物体の表現が可能になるということを逆に捉えれば、時空間の双方向に具現化することで物体に生命を吹き込むことができるのである。しかし、空間・時間ともに稠密であるため、何らかの手段をもって我々が運動を知覚できるような物体を生成することは本来非常に困難なものである。では、なぜ我々は動きを持っていると知覚する物体を生成することができるのであろうか。これを理解するカギとなるのが、1912年にMax Wertheimerによって発見されたベータ運動 (Beta movement) [Wer12] と呼ばれるヒトの知覚現象である。ベータ運動とは、静止画を連続的に提示されることにより、仮想的な運動（仮現運動）を知覚する現象である。この現象は、1秒間に10から12枚以上の静止画が提示された場合に起きることが報告されている。また、少しずつ変化している物体を連続的に知覚することで、その物体が動いているように見えるという運動錯視 (Illusion of motion) を引き起こすことが知られている。

このような時間離散化の可用性が、我々に動きの表現を可能にするのである。この効果を利用して、我々に動きを提示する表現形態がアニメーションである。では具体的にどのようにして運動錯視を引き起こすアニメーションを生成するのだろうか。ウォルト・ディズニーにおいて長年磨かれてきたアニメーションの制作技法を解説した“The Illusion of Life” [JT95]によると、動きを生み出すために描く手法には2種類存在する。ひとつは「逐次書き (straight ahead action)」と呼ばれる手法で、アニメーターが1枚1枚順番に描いていくものである。もう一方は「原画による設計 (pose to pose)」と呼ばれ、アニメーターが動作の計画（原画）を最初に立てたのち、その間を順次補間していく手法である。逐次書きはダイナミックかつ流れるようなアニメーションの生成を得意とするが、動きを通して調和の取れた動作を生成することは困難であるとされている。一方で、原画を最初に描く手法は全体の流れを設計することが得意である上に、後段の編集作業と相性がよい。このため、コンピュータアニメーションではしばしば後者の原画による設計をベースに制作される。図 1.1 に示すのは、一般的なアニメーション制作の流れである。図中の原画が動作の計画を制作する部分で、動画がその間を補間する作業を指す。

しかし、一口に補間と言ってもその可能性は無限にある上に、「どのような補間が最も良い

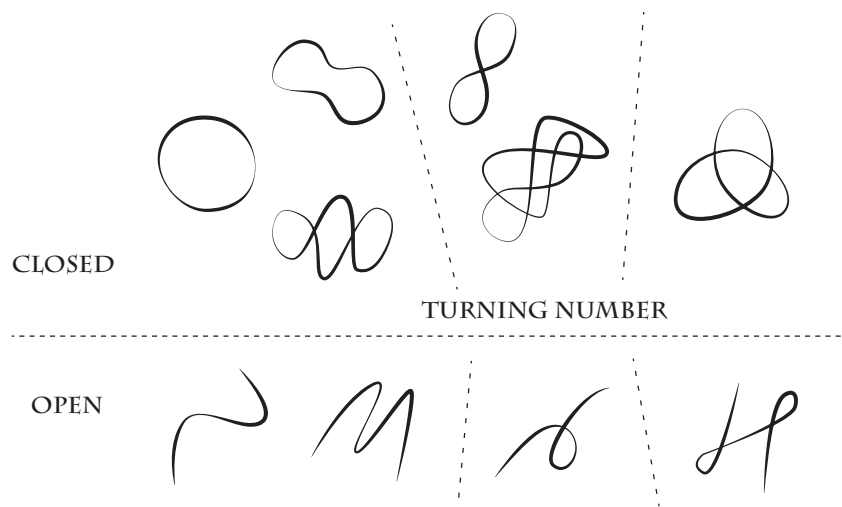


図 1.2. “Zoo of curves in topological cage.”

か」という抽象的な問いに答えを出す一義的な物差しは存在せず、基本的にはアニメータの美的感覚が最も重要視される。一方で、この補間作業はアニメータが多大な労力を割く必要があるため、この補間作業を自動化する手法がコンピュータアニメーションの世界で研究されてきた。しかし前述の通り、補間の品質向上のために何を尊重すればよいかという問いに対する答えは存在しない。このため、何を尊重するか of 優先順位を予め定めたのち、それを高い基準で満たす手法の開発が重要である。また、こうしたコンピュータによる補間作業が最終的にアニメータによる審美眼に叶うかどうかという精査を経て最終的な作品になるという点に注意すると、もう一つ別の、非常に重要な評価軸 — 計算時間 — が見えてくる。時間は示量変数であり、長短に関する客観的な評価を下すことができるため、高速な補間処理はすべての手法が目指すべき性質であるといえる。

1.2 曲率フローによる平面曲線補間の高速化

形状補間において、こういった性質を尊重すべきかを考えるにあたって、形状の持つ幾何学的な特徴（例えば G^1 連続性）に着目する。本研究では、形状の補間を連続的に行うことで得られる形状遷移が、幾何学的な特徴を保つといった制約条件のもと、時間のパラメータを持つ発展方程式として記述できる可能性について考察する。特に、形状が局所的にどの程度滑らかかを記述する曲率を用いた発展方程式である曲率フローを用いる。曲率フローはジオメトリ処理において基本的な道具として、主にフェアリングやデノイジングを対象として研究が進められてきたが、形状補間に応用した手法はごく最近になって少しずつ提案され始めたという段階である [BvTH16]。また、曲率フローの変数として曲率をそのまま用いることによって、曲率フローとそれにかかる制約条件がともに線形に書き下せることを用いて数値計算の安定化・高速化を始めとした恩恵が受けられることが近年の研究で明らかになっている [CPS13]。特

4 第1章 序論

に、この高速性は形状補間において重要視されるべき利点であるため、本研究でもこのフレームワークを端緒とする。しかし、形状補間に応用するためにはどのように曲率フローをデザインすればよいか、また補間形状が満たすべき性質をどのように制約条件として記述すればよいか、といった問題にたちまち直面する。そこで本研究では、曲率フローと制約条件の適切なデザインを行うことで、高速性を維持しつつ様々な幾何的性質を持つ形状補間が実現できる可能性について考察する。

また曲率フローは、ポアンカレ予想の解決において主要な役割を果たしたことで知られるように、形状の位相的性質と密接な関係を持つ。前節でも、形状の補間にあたっては形状の位相的性質に着目する事が重要であると述べたが、3次元空間中の2次元閉曲面でさえ球面、2次元トーラス、2次元実射影空間、クラインの壺、種数 g の曲面などが挙げられ、様々な位相的構造を持つ。たとえば、異なるホモロジー群をもつ形状対は位相同型でないため、これらの間にどのような遷移を構築するべきなのかを考察することは容易ではない。このため本論文では対象を平面曲線に限定して考察する。しかし、一口に平面曲線と言っても図 1.2 に示すように様々な種類が存在するが、2次元多様体と比べて状況は比較的単純である。平面曲線の場合は、曲線が閉じているか、すなわち閉曲線か開曲線かということと、どのような回転数を持つかという2つの主軸で考えれば良い。そこで本論文では、曲率フローを道具として、これら様々な平面曲線の間を高速に補間する手法を提案する。

平面曲線に対してこれまで提案されてきたアプローチでは、補間曲線が満たすべき制約条件のもと、曲率がなるべく線形に変化するように曲線を計算する手法が提案されてきた。しかしこれらの手法の多くで用いられている制約条件が、非線形制約式として書き下されるため、補間形状の計算に時間を要する。さらに閉曲線対の場合では、特異点における滑らかさがブレンディングを通して失われてしまい、審美性に悪影響を及ぼすという問題があった。

1.3 本研究における方針と目的

本論文では、アニメーション制作においてアニメータの審美眼を満たす補間をどのように行うかという観点に立って、補間する形状対の類似度や意味的な関係に着目した補間指針を提示する。すなわち、補間する形状対の意味的な関係が強い場合、例えば人を象った形状などの場合は、形状間の意味的対応を保存するような補間が好ましいと考えられる。一方で意味的な関係が弱い場合、形状から自然に類推される遷移は存在せず、形状の幾何的な特徴がより際立つと考えられる。このため、滑らかさといった幾何的な性質を重視することがより自然な補間の生成に寄与するのではないかと考えられる。こういった意味的な関係の強弱によって補間手法を使い分けることが重要であると予想される。本論文では、補間したい形状の意味的な関係に応じて、補間手法の呼称を使い分ける。意味的な関係が弱い場合をブレンディング (blending)^{*1}、強い場合を中割り (inbetweening) と定義する。

^{*1} 形状の補間については様々な呼称があるようである。単純に interpolation と呼ぶ場合や blending のほかに、morphing や metamorphosis と呼ばれている。また、blending という言葉も画像処理では異なる2つの画像を徐々に遷移させる処理を指す。

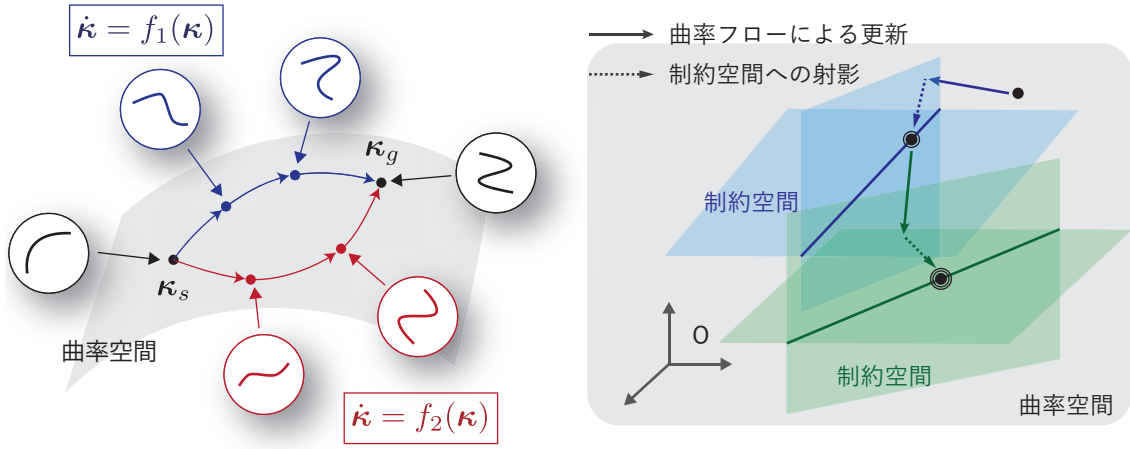


図 1.3. 曲率フローと制約条件のデザイン.

形状の意味的關係が弱い場合には、空間的な滑らかさを重視した補間を行うために、曲率を直接操作する曲率フローを用いる。ここで、平面曲線の種類に応じた適切な曲率フローや制約条件をデザインすることが重要となる。曲率フローを用いたブレンディング手順は、図 1.3 のように要約することができる。異なるフローを用いた場合は、異なるブレンディングが実現されることが理解されるだろう。時空間方向に滑らかなブレンディングを高速に計算するためには、スタートとなる曲線からゴールとなる曲線に至るまで、線形なフローを用いることが重要となる。ブレンディング中の各時刻における形状から、遷移させたい形状に向かうよう適切に設計したフローに従って更新方向を求める。この更新方向に対して制約条件を適用するために、射影勾配法の考え方を用いる。すなわち、更新方向から制約を満たす空間への射影を実際の更新ステップとすることで、制約条件を満たした曲率フローの積分を可能とする。本論文では、図 1.2 で示した曲線たちを対象として、これらの補間を曲率フローによって実現する手法を提案する。特に、回転数の異なるペアも含んだ閉曲線間のブレンディングと、開曲線間のブレンディングを実現する手法を提案する。

一方で、形状の意味的關係が強い場合には、補間形状の計算に先駆けて意味的対応關係を抽出する必要がある。この処理のことを、曲線を構成する対応点を求めるという意味で対応点問題と呼ばれる。一般的に対応点問題は、複数の曲線が存在したときの曲線ごとの対応を求める問題と、1 対の曲線内のパラメトリゼーションに相当する対応を求める問題に分けられるが、本論文では後者を取り扱う。特にこうした対応点問題は、曲線が複雑な構造を持っている場合に顕在化するため、本論文では 1 本の曲線で複雑な形状を表現しようとする一筆書きアニメーション [Oku10] を題材にし、高い精度で対応点問題が解けるように、曲線の各点における局所特徴量を用いた手法を提案する。また、一筆書きアニメーションの中割りでは、1 対の曲線間の補間だけでなく、その前後も含めた時間的な連続性が重要となる。このため、複数フレームにわたる対応点を導出し、これらをスプライン補間することによって中割りを行う手法を提案する。さらに、一筆書きアニメーションでは 1 本の曲線内に意味的關係が強い部分と弱い部分が混在しうするため、曲率フローに基づいた局所的な編集方法を提供することでより自然な中割

6 第1章 序論

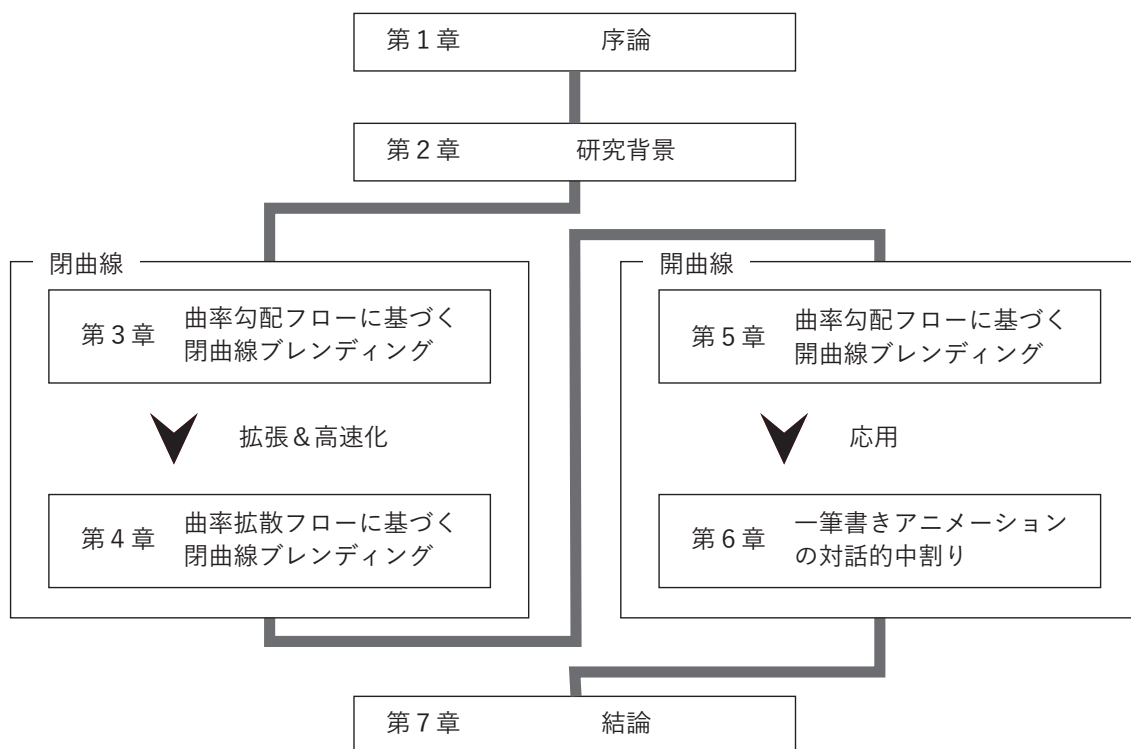


図 1.4. 本論文の構成.

りを実現する手法を提案する.

先述の通り, ブレンディングや中割りで得られる形状遷移に関して, 何が最も良いかということを一義的に定義することは難しいが, 本研究では得られた形状遷移の審美性を主観品質評価実験を行うことで評価し, 手法の妥当性を検証した. 近年では, ユビキタスなインターネット環境の発達により, インターネット上で広く実験参加者を募るフレームワークが登場してきた. これらはクラウドソーシングとよばれ, 近年活発に活用され始めている. 本研究でも, 主観品質評価実験にクラウドソーシングを用いることで, 手法の妥当性を検証した.

1.4 本論文の構成

本論文では, 曲率フローとその制約条件の設計に基づく平面曲線の高速形状補間とその応用について述べる. すなわち, 補間する平面曲線対に課した滑らかさなどの条件を満たすような補間を高速に計算することを目的とする. このため本論文では, 曲率勾配フローを用いた閉曲線の補間手法 (第3章), 曲率拡散フローを用いた高速な閉曲線の補間手法 (第4章) ならびに曲率勾配フローを用いた開曲線の補間手法 (第5章) を提案する. また, 補間する形状間に意味的な対応付けのある部位とそうでない部位が混在するような複雑なストロークを持つ場合における補間手法を, 一筆書きアニメーションを例に取り上げて提案した (第6章).

本論文の構成を図 1.4 に示す. 第1章では, 本論文の対象領域を定義したのち, 本研究でとるアプローチについて概要を述べる. 第2章では, 本論文の対象である平面曲線の幾何的な性

質を概観したのち、曲率フローを用いたジオメトリ処理、CGにおける形状補間技術、形状間の対応探索といった研究背景を述べる。第3章では、閉曲線対から適切に定義した曲率エネルギーの曲率勾配フローを用いた閉曲線のブレンディング手法について述べる。ここで提案するアルゴリズムは本論文を通して核となるものである。しかし、ここで提案する手法は異なる回転数を持つ閉曲線対を扱えず、また数値積分時のタイムステップを小さくする必要があった。そこで第4章では、第3章で提案した手法を拡張し、適応的に構成した曲率勾配フローや曲率拡散フローを組み合わせることで、数値計算の安定化による高速化を達成するとともに、異なる回転数を持つ閉曲線対に対しても滑らかなブレンディングを実現する手法を提案する。第5章では、さらに開曲線を対象とした曲率勾配フローを用いたブレンディング手法を提案する。開曲線の場合は閉曲線と異なり、平面上にどのようにはめ込まれているかが重要となるため、開曲線の場合に応じた制約条件を適切にデザインする。第6章では、複雑にはめ込まれた平面曲線を用いて表現される一筆書きアニメーションに着目し、半自動的な中割生成手法と第5章で提案した手法を用いた対話的編集手法を述べる。第7章では、本研究で提案した手法についての制限と将来的な方向性について述べ、本論文の結論とする。

第 2 章

研究背景

2.1 はじめに

本章では、本論文の主題である形状補間問題と強く関連することがらを整理する。高品質な形状補間では、ある時刻における形状の自然さだけでなく、時間的なつながりの自然さが重要であり、形状の連続的な遷移を記述する問題として定式化することが望ましい。このため、いかに時空間の両方向に対して自然な遷移を実現するかということに主眼に置く。

こうした遷移を実現するための取り掛かりとして、曲線を「かたい」幾何学の「やわらかい」幾何学の両面から性質を明らかにする。「かたい」幾何学とは、「曲線がどの程度曲がっているか（直線から乖離しているか）」という曲線の解析的な性質を明らかにするために用いる微分幾何学を指す。また、「やわらかい」幾何学とは、曲線の局所的な曲がり具合などの具体的な量を一切取りはった先に残る、曲線の位相的な性質を明らかにするために用いる位相幾何学を指す。平面曲線の遷移を正しく捉えるためには、この両面から曲線の性質を捉えることが重要である。この中で、微分幾何的な性質である曲率、位相幾何学的な性質である回転数などの本論文中で重要な役割を果たす概念を導入する。

次に、曲線の遷移の幾何的な表現方法の一つである曲率フローを用いたジオメトリ処理について述べる。曲率フローは、CG 分野では曲面の発展を既述する方程式としてよく用いられており、形状のスミージングやフェアリング、シミュレーションなどに応用されている。本章では、幾何フローの定義から始まり、近年の CG で用いられているフローをその性質とともに概観する。

本論文では特に、形状の遷移を表現するために、形状の空間的な位置そのものを用いて表現するのではなく、曲率を用いた表現をすることにより得られる恩恵を享受する。近年ではこのように、形状の位置そのものを扱うのではなく、別の空間に射影することによりジオメトリ処理を行う手法が盛んに研究されている。本章ではこのような形状の表現方法という観点から、CG 分野においてジオメトリ処理、特に形状補間を行う手法を概観する。こうした手法は CG だけでなく数学的な興味の対称であることから、適宜純粋数学における研究成果にも触れた。

また、形状の自然な遷移を実現するためには、形状間の対応を注意深く選ぶことが重要である。形状間の対応を求める問題は、次元を問わず様々な研究が行われてきたが、特に本章では

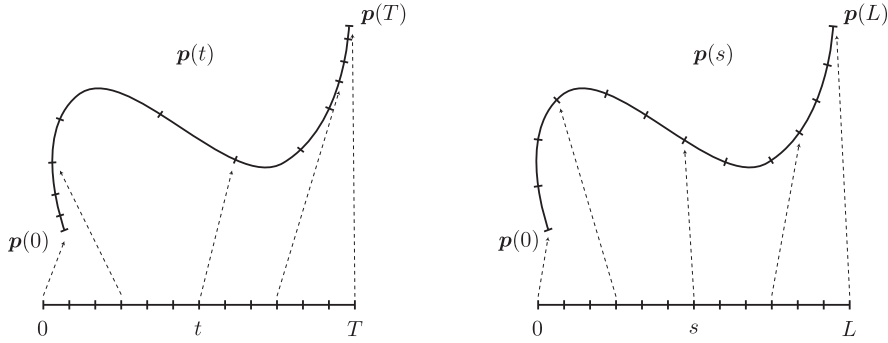


図 2.1. 曲線のパラメトリゼーション.

平面に対象を絞り、画像としての特徴と平面形状としての特徴の両面から整理した.

2.2 曲線の微分幾何学

本節では、本論文を通して用いる平面曲線の微分幾何的な性質を整理する [小林 77].

平面曲線とはその名の通り、像がある平面上に完全に含まれる曲線である. 平面曲線を数学的に表現する方法は大きく分けて、陽的表現, 陰的表現, パラメータ表現がある. 陽的表現とは, x, y -平面上の関数 $y = f(x)$ を用いて, 点 $(x, f(x))$ が平面曲線上の点を表すように関数を与える表現である. この表現方法は解析的な性質を調べるのに効果的であるが, 幾何的な性質を調べるのには向かない. 陰的表現とは, 2 変数 x, y の関数 $F(x, y) = 0$ の解集合として平面曲線を表す表現方法である. 陰的表現を用いて曲線の遷移を記述する方法としてレベルセット法などが挙げられるが, 回転数などの大域的な性質を解析する際に複雑な代数的考察が必要となる. 最後に, 幾何的な性質を調べる際に最も便利であるパラメータ表現では, パラメータ $t \in \mathbb{R}$ を用いて, $x = x(t), y = y(t)$ で与えられる点 (x, y) で曲線を表現する. 本論文でも平面曲線をパラメータ表現を用いて表す.

パラメータ t を用いて表した座標関数 $x = x(t), y = y(t)$ を持つ曲線を考える. この曲線をベクトル表示して $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$ と表すことにする. $\mathbf{p}(t)$ を t で微分したものを $\dot{\mathbf{p}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ とかく. $\dot{\mathbf{p}}(t)$ は時刻 t における速度ベクトルとなる. ここで, 曲線 $\mathbf{p}(t)$ ($0 \leq t \leq T$) の長さ $s(T)$ を計算すると,

$$s(T) = \int_0^T |\dot{\mathbf{p}}(t)| dt \quad (2.1)$$

となる. T は時刻を表すパラメータであったので, 改めて t において $s(t)$ とする. $|\dot{\mathbf{p}}(t)| > 0$ なので, $t_1 < t_2$ のとき $s(t_1) < s(t_2)$ となることから, $s(t)$ の逆関数が存在して $t = t(s)$ とかける. このとき,

$$\left| \frac{d\mathbf{p}(s)}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{p}(s)}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} \frac{dt}{ds} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{ds} = 1 \quad (2.2)$$

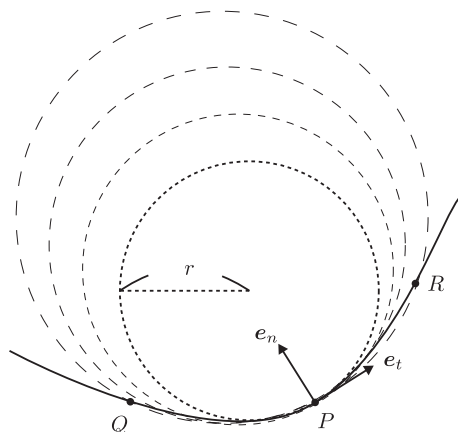


図 2.2. 曲率.

となる. すなわち, 曲線 \mathbf{p} を s を用いてパラメトリゼーションすると, 常に速度が 1 になるということがわかる. このことから, 上記のように定義したパラメータ s を特に弧長パラメータ (arc length parameterization) と呼ぶ. t と s による曲線のパラメトリゼーションを図示したものが, 図 2.1 である. $\mathbf{p}'(s)$ は常に大きさが 1 となるような単位接ベクトルであることから, $\mathbf{e}_t(s) = \mathbf{p}'(s)$ と書く.

$\mathbf{p}'(s)$ を解析的にみると, 点 $\mathbf{p}(s)$ における 1 次近似を特徴づけるベクトルであると考えることができる. このとき, 2 階微分 $\mathbf{p}''(s)$ はどのような性質を持っているのだろうか.

$\mathbf{p}(s)$ を s_0 のまわりでテイラー展開すると

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(s_0) + \mathbf{p}'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\mathbf{p}''(s_0)(s - s_0)^2 + \mathcal{O}((s - s_0)^3) \quad (2.3)$$

となることから, \mathbf{p}'' は \mathbf{p} の近傍において, 曲線がどの程度直線 (1 次近似) から乖離しているかを表していると解釈することができる. これは, 曲線の近傍を円で近似した際の半径を用いて定義される曲線の曲率 (curvature) と深いつながりを持つ [HCV52, GWD⁺08].

曲率とは, 曲線の局所的な曲がり具合を表す基本的な幾何量であり, 本論文でも重要な役割を果たす. 図 2.2 に示すように曲線上に点 P をとり, P を挟むように点 Q, R をとる. Q, R を P の近傍にとると, 点 P, Q, R を通過する円は局所的にこの曲線を近似していると見ることができる. ここで, Q, R を P に限りなく近づけていくと, この円は半径 r の円に収束する. この r を曲率半径と呼ぶ. また, P における曲率 κ_P は, 曲率半径 r の逆数 $\kappa_P = 1/r$ として定義される.

$\mathbf{p}''(s)$ を考察するために, $\langle \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_t \rangle = 1$ を微分する. $2\langle \mathbf{e}_t', \mathbf{e}_t \rangle = 0$ となることから, \mathbf{e}_t' と \mathbf{e}_t は直交する. すなわち, 2 階微分 \mathbf{p}'' は接ベクトルと直交するため, 法線方向を向いたベクトルであることがわかる. ここで, \mathbf{e}_t を反時計回りに $\pi/2$ 回転させた単位ベクトルを \mathbf{e}_n とすると, \mathbf{e}_t' と \mathbf{e}_n は 1 次従属であることから,

$$\mathbf{e}_t'(s) = \kappa(s)\mathbf{e}_n(s) \quad (2.4)$$

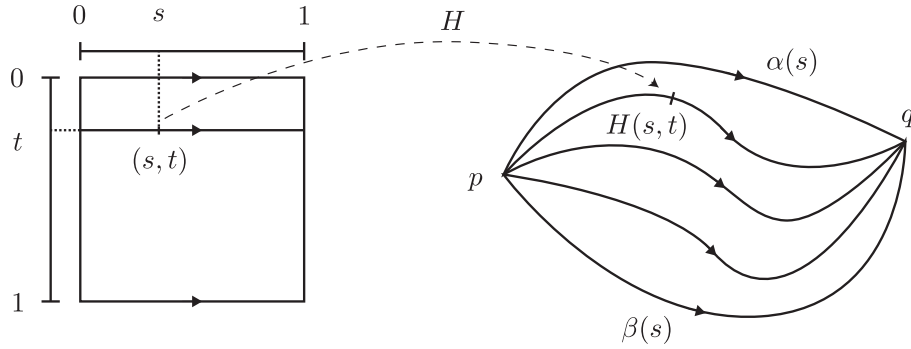


図 2.3. ホモトピー.

とかける. この $\kappa(s)$ は曲線 $p(s)$ の曲率となることが知られている. 特に, 弧長パラメトリゼーションした場合, 曲率関数と呼ぶ.

2.3 曲線の位相幾何学

本節では, 位相幾何学的な面から曲線の遷移を考察するために, 基本的な用語を定義する [谷村 06].

\mathbb{R} 上の閉区間 $I = [0, 1]$ を定義域とし, 位相空間 X を値域として持つ写像 $\alpha : I \rightarrow X$ が連続であるとき, α を道と呼ぶ. X が 2 次元ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 であるとき, 我々が平面曲線と呼んでいるものである. やはりここで注意したいことは, 曲線を写像とみなしているということである. このことから, “曲線の遷移” を “写像の遷移” として捉えるという視点が自然に生じるのである.

図 2.3 に示すように, α, β をともに $[0, 1]$ から X への道とし, 始点 p と終点 q を共有しているとする. すなわち, $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q, \beta(0) = p, \beta(1) = q$ とする. このとき, ある連続写像 $H : (s, t) \in I \times I \rightarrow H(s, t) \in X$ が存在して,

$$\begin{cases} H(s, 0) = \alpha(s), & H(s, 1) = \beta(s), \\ H(0, t) = p, & H(1, t) = q \end{cases} \quad (2.5)$$

となるとき, α と β はホモトピック (homotopic) であるといい, $\alpha \sim \beta$ とかく. また, H を α から β へのホモトピー (homotopy) であるという.

H は, 2 つのパラメータ s, t を持つ連続写像であるため, パラメータ t を固定して得られる道だけでなく, パラメータ s を固定して得られる軌跡についても連続である. すなわち, α から β に遷移する上で, 道が途中で切れたりすることなく, 伸び縮みや曲げ伸ばしだけを許容する変形を記述するものである.

いま, 道 α, β, γ があって, $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$ とする. このとき, α から β へのホモトピー $H_{\alpha \rightarrow \beta}$ と β から γ へのホモトピー $H_{\beta \rightarrow \gamma}$ はそれぞれ連続写像であるため, この写像の合成 $H_{\beta \rightarrow \gamma} \circ H_{\alpha \rightarrow \beta}$ もまた連続写像となる. この写像は α から γ への写像であるため, $\alpha \sim \gamma$ であることがわかる (推移律). また, α から自分自身への恒等写像 1_α は連続なので, $\alpha \sim \alpha$ で

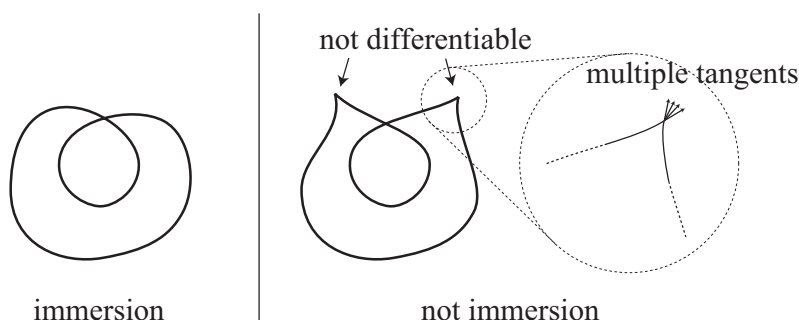


図 2.4. 閉曲線の正則性.

あることがわかる (反射律). さらに, $H_{\alpha \rightarrow \beta}$ の逆写像 $H_{\beta \rightarrow \alpha}$ もまた連続であるため, $\beta \rightarrow \alpha$ である (対称律). 以上より, ホモトピックという関係は同値関係であることがわかる. このように, 道の上に定義されたホモトピックという関係によって, 道全体を分類することができる. この類をホモトピー類という.

さらにホモトピーに滑らかさ (微分) の概念を導入することで, “滑らかな” ホモトピー類を定義することができる. 簡単のために, \mathbb{R} の閉区間 $[0, 1]$ から, \mathbb{R}^2 への写像 γ を考える. 通常, 我々が曲線と呼ぶ場合, γ は空間的に滑らかであることを想像する. ここで滑らかな曲線間の遷移として, 常に曲線が空間的に滑らかであり続けるようなものを考えたい. ただし, ここまでの考察はあくまで位相的な思想のもと進めてきたものであったが, 滑らかさを考慮するにあたり, より微分幾何的な取扱をする必要がある. つまり, 曲線の滑らかさというものを, 写像 γ の微分を通して定義する.

任意の点 $s \in I$ において, 写像 γ の微分

$$(d\gamma)_s : T_s(I) \rightarrow T_{\gamma(s)}(\mathbb{R}^2) \quad (2.6)$$

が 1 対 1 の線形写像であるとき, γ を I から \mathbb{R}^2 へのはめ込み (immersion) であるという. ここで, $T_p(I)$ は, I 上の点 p における接空間を表す. すなわち, 曲線上の任意の点において, 接ベクトルが一意に定まるような曲線をはめ込みであるという.

いま, 2 つの曲線 $\xi, \eta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ がはめ込みであるとする. この曲線の上に定義されたホモトピーであって, 像が常にはめ込みとなるような微分可能写像 $H^R : I \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を特に, 正則ホモトピー (regular homotopy) といい, $\xi \stackrel{R}{\sim} \eta$ で表す. これは, 各点で微分可能な曲線を正則曲線 (regular curve) ということに由来している. 正則ホモトピーを平たく言えば, 微分可能な曲線に対して定義された滑らかな遷移を表すものと解釈できる.

道の中でも, 始点と終点が一致している道をループ (loop) あるいは閉道といい, 特に平面曲線であるとき, 閉曲線であるという. こうした閉曲線は数学的な研究対象となっているだけでなく, コンピュータグラフィックスにおける基礎的な理論構築においても数多くの研究が行われてきた. ここで気になることは, \mathbb{R}^2 内のすべての正則な閉曲線は正則ホモトピックの関係にあるのかということである. 残念ながらこの答えはノーであることが, 1937 年に Hassler Whitney によって示された [Whi37]. また Whitney は, 平面内の正則な閉曲

線 γ の集合 Γ を正則ホモトピーによって類別した同値類 $[\gamma](\in \Gamma / \sim^R)$ は、回転数 (turning number or Whitney index) と呼ばれる整数によって特徴付けられることを示した。逆に捉えれば、閉曲線の回転数が同じであれば正則ホモトピックとなる遷移を構成することができることを意味している。(回転数の詳細な定義については、4.2.1 節を参照せよ。) この定理は Whitney–Graustein の定理^{*1} と呼ばれており、離散曲線についても同様の定理が成立することが証明されている [MY91].

本論文の主題の一つである閉曲線ブレンディングは、閉曲線の間のホモトピーを計算する問題であるといえる。特に滑らかな遷移、すなわち正則ホモトピーとなるようなものが望ましいが、上述のように回転数が異なる閉曲線に対しては、正則ホモトピーとなる遷移が存在しないことが示されている。そこで、回転数が同じ場合と異なる場合とでそれぞれ異なる戦略をとる必要がある。

本論文では、閉曲線間の遷移を表す道具として、曲率を変数とする時間偏微分方程式である曲率フローを用いるが、回転数が同じ場合と、異なる場合でそれぞれ手法を切り替える。この観点から、第3章では閉曲線対の回転数が同じ場合において、曲率フローを用いたブレンディング手法を提案する。続く第4章では回転数が異なる場合において、回転数が異なるタイミングの閉曲線以外では正則ホモトピーとなる手法を提案する。

2.4 曲率フローを用いたジオメトリ処理

曲率フローは、近年のジオメトリ処理において非常に広く用いられる道具であり、コンピュータグラフィックスへの応用を中心に非常に多くの研究がなされてきた [BKP⁺10, RW14]. 本節ではまず、フローを数学的に定義する事から始める [松本 08].

コンパクトな多様体 M では、任意のベクトル場が完備であるので、 M の任意の点 p を初期値とする積分曲線 $c(t, p)$ が $t \in (-\infty, \infty)$ で定義できる。このことから、実数 t を一つ固定した写像 $\varphi_t: M \rightarrow M$ を考え、 M の各点 p に対して点 $c(t, p)$ を対応させる写像が群をなす (例えば、 $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$) とし、 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を M の 1 径数変換群 (フロー) という。

このように、多様体 M 上の完備なベクトル場と 1 径数変換群が一对一に対応しており、ベクトル場が「流れ」のような速度ベクトル場の場合には、 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は「流れそのもの」を表すものであると解釈できる。より簡単な解釈としては、形状を表現する写像 f に時間の変数を付加して時変なものとした $f(t)$ として考えることもできる。

ここで、多様体 M 上にどのようなベクトル場を定義するかが重要となる。曲線や曲面の滑らかさを図る指標として適切に定義したエネルギーが減少する方向にベクトル場を設計することで、形状のフェアリングに用いられるようなフローを設計することができる [BKP⁺10].

このことを数式で表現するために、関数 f を曲線や曲面を表す多様体 M からユークリッド空間へのはめ込み (immersion) であるとする。また、多様体 M 上で定義されたエネルギーを

^{*1} Whitney による論文 “On regular closed curves in the plane” の中で、*“This theorem, together with a straightforward proof, was suggested to me by W. C. Graustein”* と述べられていることから、このように呼ばれている。

E とし, f の関数として表現されとする. このとき, エネルギー E の最急降下方向 $\nabla E(f)$ で定義されるベクトル場に対応するものを考えると, フローは以下の時間偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\nabla E(f) \quad (2.7)$$

の解であると考えることができる.

曲面 S に対するジオメトリ処理において最もよく用いられるエネルギーは, 曲面の面積を表す Membrane エネルギー

$$E_M(f) = \int_M dA \quad (dA \text{ は面積素}) \quad (2.8)$$

である. 境界における位置制約のもと, Membrane エネルギーを最小化して得られる曲面は極小曲面として知られている. しかし, f の第一基本形式を計算する必要があるため, このエネルギーは非線形となり, 安定な数値計算を行うことは困難である. そこで, Membrane エネルギーを 1 次近似することで得られる Dirichlet エネルギー

$$E_D(f) = \int_M |\nabla f|^2 dA \quad (2.9)$$

がよく用いられる. ∇f の中に現れる偏微分は線形であるため, このエネルギーは f に関して 2 次式となる.

こうしたエネルギーの最小値を与える解 f は, 形状の欠損部を補間する穴埋め (hole-filling) 等にも用いられる [BS05]. この際, 端点における位置制約だけでなく, C^1 連続性を考慮することによってより自然な穴埋めを実現する事ができる. C^1 連続性のような滑らかさを制約として加えるためには, 更に高階のエネルギーを定義する必要があることから, 曲率を用いて定義される Thin-plate エネルギー

$$E_T(f) = \int_M |\Delta f|^2 dA \quad (2.10)$$

が提案された.

このような曲率を用いて定義されるエネルギーは, その性質の良さから様々なジオメトリ処理で用いられている. 曲率エネルギーは, 曲面の主曲率 κ_1, κ_2 を用いて表現されることが多く, 特にガウス曲率 $K = \kappa_1 \kappa_2$, 平均曲率 $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ を用いて表される. 中でも Willmore エネルギー [Wil00]

$$E_W(f) = \int_M (H^2 - K) dA \quad (2.11)$$

は曲面の局所的な形状が球からどの程度乖離しているかを表すエネルギーであり, 並進やスケールリングに関して不変であることなどからよく用いられている.

このような種々のエネルギーに対して, 勾配フロー $\partial f / \partial t = -\nabla E(f)$ を計算する. しかし, これらのエネルギーは関数 f を変数として持つ汎関数であるため, 通常のユークリッド空間上で定義された関数のように勾配を取ることができない. このため, 関数の定義域をユーク

リッド空間から、完備なノルム空間であるバナッハ空間へ拡張した微分を考える必要がある。このとき、内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する汎関数の勾配 $\nabla E(f)$ は、方向ベクトル g に対する汎関数のガトー (Gâteaux) 微分 $E'(f)[g]$ を用いて

$$\langle \nabla E(f), g \rangle = E'(f)[g] \left(= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(f + hg) - E(f)}{h} \right) \quad (2.12)$$

として定義することができる [GH86] (より詳しい説明は [山田 09, 畔上 16] を参照せよ)。ここで注意しなければならないのは、バナッハ空間上の微分作用素を用いて定義されていることからわかるように、ノルムの取り方、すなわち内積の定義の仕方に依存しているということである。つまり、勾配を取るにあたり、関数空間上にどのようなノルムを定義するかが重要となる。

Membrane エネルギーに対して L^2 ノルムに関する勾配フローを取ることで得られるフローは、平均曲率フロー (mean curvature flow) $\partial f / \partial t = -2HN$ (ただし、 N は法線ベクトル場) と呼ばれる [Bra78]。平均曲率フローは、形状の法線方向に対して、平均曲率に比例する速度で負の向きに移動させる。Brakke はさらに平均曲率フローを用いて、頂点位置や体積などを保存するような様々な拘束のもと、曲面の遷移を制御する Surface Evolver を提案した [Bra92]。また平均曲率フローは非線形の変曲偏微分方程式であるため、安定的に計算するために非常に厳しい制約を設ける必要がある。すなわち、最小エッジ長を h としたとき、時間ステップ dt を $dt \leq h^2/2$ とする必要があることが知られている [PTBF07]。このことは、不均一なメッシュや離散化を行った場合大きな問題となる。

本論文でも、ジョイントパーティション (後章で詳述) によって得られる離散曲線は、最小エッジ長が非常に小さくなる傾向にあるため問題となる。こうした背景のもと、不均一なメッシュ構造で大きなタイムステップによる平均曲率フローの計算を許容するために、後退オイラー法を用いて計算し、フェアリングを実現する手法が Desbrun らによって提案された [DMSB99]。また、有限要素法による離散化の際に生じる不安定性に対処することで数値的安定性を獲得する手法も提案されている [KSBC12]。しかしこうした手法においても、ラプラシアンが f に非線形な依存をするため、安定性を保証することが困難である。さらに、こうした平均曲率フロー (とその派生) は、形状によってはフェアリングの際に尖った形状が生成されてしまうことが知られている [CI12]。

こうした平均曲率フローは、曲面だけでなく曲線についても定義することができる。平面に埋め込まれた曲線上 γ の各点において、その点における対法線ベクトル \mathbf{n} の方向に曲率 κ の大きさで移動させるようなフロー $\partial \gamma / \partial t = \kappa \mathbf{n}$ を曲線短縮フロー^{*2} (curve-shortening flow) と呼ぶ。曲線短縮フローは、開始曲線から徐々に周囲長を短くしていくことからその名がつけられている。

曲線短縮フローは平均曲率フローの1次元版として捉えることができる。単純閉曲線に対して曲線短縮フローによって曲線を遷移させると、常に単純閉曲線であり続け、徐々に半径の小さくなる円に収束する (Gage–Hamilton–Grayson の定理) といった幾何学的な性質の面白さ

^{*2} 平均曲率フローに比べて、通例とされる和訳は定まっていない様子である。

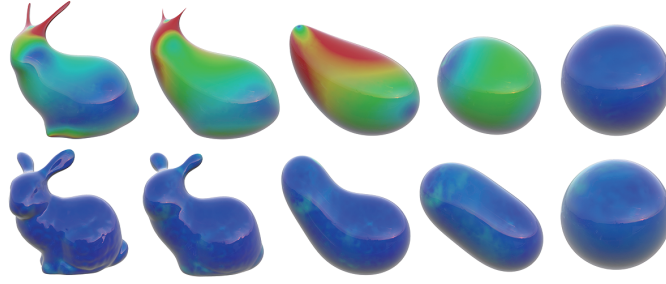


図 2.5. 平均曲率フロー（上段）[KSBC12] と Willmore フロー（下段）[CPS13] によるフェアリングの比較 ([CPS13] より引用).

から長年数学者の関心をひきつけてきた [CZ01]. また, 純粋数学の分野だけでなく, 金属板のアニーリングやセル・オートマトンの動作解析, 反応拡散系のモデリングにも応用できることが知られている.

しかし曲線が自己交差を許すような曲線であった場合, 曲線短縮フローは収束点以外の特異点を生成してしまう場合があることが知られている. Grayson は, 8 の字の形状に対して曲線短縮フローを計算した場合, 線分に収束することを報告している [Gra89].

一方で, より高階のラプラシアンを用いたフローによって, さらに自然なフェアリングを達成しようとする研究が行われてきた. Taubin は, フェアリングやデノイズングを信号処理的な観点から考察し, Laplacian smoothing flow $\partial f / \partial t = \lambda \Delta f$ における係数を 2 次式とすることで, 形状の高周波成分を除去する手法を提案している [Tau95]. ここで提案されているフローは, Thin-plate エネルギーの勾配フローであるバイラプラシアンフロー (Bi-Laplacian flow) $\partial f / \partial t = \lambda \Delta^2 f$ の一般化であると考えられる.

また, G^1 連続性を制約として課すために提案された, 平均曲率のラプラシアンによって定義される曲面拡散フロー (Surface diffusion flow) $\partial f / \partial t = N \Delta H$ [SK01, XPB06] も同様によく用いられている. 本論文で用いる曲率拡散フロー $\partial f / \partial t = \Delta \kappa$ も, 曲率の拡散を用いている点で類似している.

Willmore エネルギーの勾配フローである Willmore フローを用いたフェアリングも近年盛んに研究されている. Willmore フローによるフェアリングは, 平均曲率フローで生成される尖った部位が生成されず, 図 2.5 に示すようにより滑らかであることが検証されている [CPS13]. 様々な離散化手法が提案されており, Yoshizawa らはオイラーラグランジュ方程式を用いた離散 Willmore フローを提案している [YB02]. また Bobenko らは, Willmore エネルギーのメビウス変換に関して不変であるという性質を満たすように離散化する手法を提案している [BS05]. Wardetzky らは, 有限要素法に基づく離散化手法を提案している [WBH⁺07].

しかし, これらの手法は前進オイラー法を用いた場合の平均曲率フローと同様に, 厳しいタイムステップ制約が課される. 特に Willmore フローの場合は 4 階の偏微分が含まれるため, 時間ステップが最小エッジ長 h を用いて $O(h^4)$ で制約される. これらは Willmore フローを曲面の位置を変数として記述しているため, ラプラシアンが f の非線形関数となることに起因しているという観察から, Crane らは形状を曲率を変数として表す事により, Willmore エ

エネルギーが曲率の2次式として表せることに着目し、これらの問題を回避する手法を提案した[CPS13]。しかし、曲率を変数として計算したフローは位置を用いて計算した場合と異なり、必ずしも形状を構成するとは限らないため、可積分条件を満たすようにフローを構成する必要がある。Craneらは更に可積分条件を線形に書き下す手法を提案することで、非常に安定かつ高速にフェアリングを行う手法を提案した。

本論文でも同様に、形状を曲率を変数として表す手法を採用し、フローを適切にデザインすることで、フェアリングからブレンディングへの応用を拓くことを目的としている。

2.5 CGにおける形状補間技術

CGにおいて、形状補間は非常に重要な技術であり、様々な手法を用いて研究されている。その全てを網羅的に取り扱うことは困難であるため、本論文における手法と関連性の高いものや、近年急速に注目を浴びている手法を紹介する。なお、手法との関連性が特に高いものについては各章における関連研究においても言及する。

本論文では、曲線を点の集合ではなく、曲率空間に変換してから形状遷移を記述している。このような視点から、ユークリッド空間への埋め込み以外の表現方法を用いて遷移を記述している手法を概観する。

2.5.1 陰的表現を用いた補間

形状の陰的表現とは、先述したように形状の次元よりも高い次元を持つ関数の解集合として形状を表現する手法である。こうした表現は、形状のトポロジー変化に強いことが知られており、その性質を用いた形状補間手法が提案されている。

画像処理の分野で動的輪郭モデル(Active contour model)と呼ばれる手法は、輪郭の内側と外側をそれぞれ別の指標で表し、その境界線を時間とともに遷移させる手法である。動的輪郭モデルのひとつに、Osherらによって提案されたレベルセット法[OS88]がある。レベルセット法では、表現したい輪郭を1次元高い空間で定義された補助関数(レベルセット関数)のゼロ等位面として表す。この補助関数の時間変化を表す偏微分方程式を解くことで得られた関数のゼロ等位面によって輪郭の時間変化を表現する手法である。

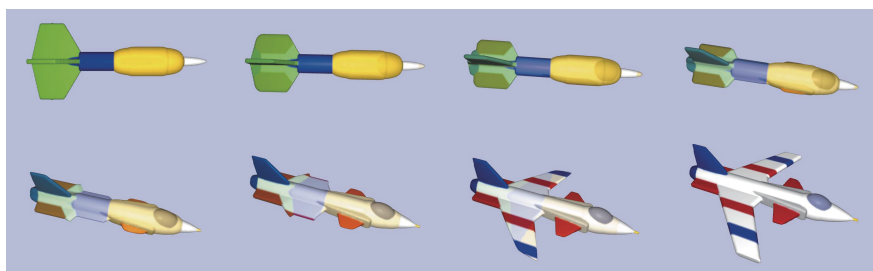


図 2.6. レベルセット法を用いた形状補間 ([BW01] より改変して引用)。

この手法は当初画像処理分野で提案されたものであるが、近年では、コンピュータグラフィックスにおいても形状モデリングや形状編集など様々な応用が見出されている。Musethらは、レベルセット関数で表現された曲面に対して、様々な速度関数を定義することで、形状の接続を滑らかに行うブレンディングなどのジオメトリ処理を行う手法を提案している [MBWB02]。また Breen らは、図 2.6 に示すように、ジオメトリの形状補間をレベルセットを用いて行う手法を提案している [BW01]。

2.5.2 メッシュ表現を用いた補間

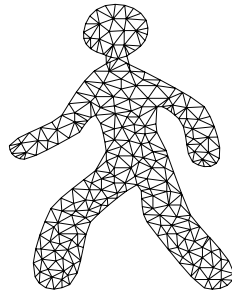


図 2.7. 三角メッシュ

形状のメッシュ表現とは、三角形や四角形の貼り合わせで形状を表現する手法である。特に 2 次元の場合、図 2.7 に示す通り、形状の境界と内部の両方を明示的に表現する。このような表現手法は、コンピュータグラフィックスだけでなく、CAE, CAD, 数値解析などの分野で広く用いられている。

こうした表現を用いた形状の補間は、メッシュを構成する一つ一つの三角形がどのような変形をすればよいかを考察することから始まる。頂点 $\{p_1, p_2, p_3\}$ を持つ三角形 P から、頂点 $\{q_1, q_2, q_3\}$ を持つ三角形 Q への遷移を考える。ここで、形状としては同一でも頂点の順序が異なっていれば別であると考え、これらの三角形の最も単純な補間手法は、頂点位置を線形補間することである。すなわち、時刻 $t = 0$ において P 、時刻 $t = 1$ において Q となるパラメータ t を用いて、 $\{(1-t)p_1 + tq_1, (1-t)p_2 + tq_2, (1-t)p_3 + tq_3\}$ として得られる三角形を補間形状とする手法である。この手法は高速に計算できるというメリットはあるものの、平面への三角形の埋め込まれ方が変わると結果が異なるほか、 P, Q の形状によっては補間形状が潰れてしまうなどの問題がある。

そこで、頂点の位置そのものを補間するのではなく、 P から Q への写像を線形補間することで、形の歪みや大きさの変化をなるべく抑えようというアイデアが Alexa らによって提案された [ACOL00]。この手法は通称 ARAP (As-rigid-as possible) と呼ばれており、以下に述べる手法で補間形状を計算する。この手法では、2 次元平面上の任意の 2 つの三角形の変換はアフィン変換 $A \in \text{Aff}(2, \mathbb{R}^2)$ で記述できることに着目する。アフィン変換は、一般線形群 $GL(2, \mathbb{R})$ と平行移動 \mathbb{R}^2 の半直積であるため、 $L \in GL(2, \mathbb{R}), T \in \mathbb{R}^2$ を用いて

$$Q = LP + T \quad (2.13)$$

とかける. ただし, $P = [p_1, p_2, p_3] \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $Q = [q_1, q_2, q_3] \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ とした. ここで一般線形群 L を, 反時計回りに θ 度回転させる行列 R_θ と正定値対称行列 S の積に分解 (極分解) すると, $Q = R_\theta S P + T$ とかける事がわかる. いま, R_θ, S, T はそれぞれ, $t \in [0, 1]$ の範囲内で線形空間にあるため, R, S, T をそれぞれ線形補間して得られる三角形

$$M = [m_1, m_2, m_3] = R_{t\theta}((1-t)I + tS)P + tT \quad (2.14)$$

を補間形状とするものが, ARAP である. この手法は形状間の内挿にのみ対応する手法であったが, リー群である特殊直交群と正定値対称行列の対数写像は全射であるため, 対数写像を取って得られるリー代数は線形空間であることを利用し, 一度リー代数上で補間してから指数写像によって元の特殊直交群と正定値対称行列に戻す手法が Kaji らによって提案されている [KHS⁺12]. この手法は数学的によく定式化されているだけでなく, 外挿にも安定であるという性質をもつ.

ここまで概観したものは一つ一つの三角形の変形のみを記述するものであったが, 形状全体の補間を行うためには, これを三角形メッシュ \mathcal{T} 全体に行う必要がある. 特に, 一つ一つの三角形 $T = \{t_i, t_j, t_k\}$ に対して計算した変形 $A_{\{i,j,k\}}(t)$ をそのまま適用すると, 隣接する三角形が必ずしも辺を共有するとは限らない. そこで, 隣接する三角形では辺を共有するような変形 $B_{\{i,j,k\}}(t)$ で, エネルギー

$$E(t) = \sum_{\{i,j,k\} \in \mathcal{T}} \|A_{\{i,j,k\}}(t) - B_{\{i,j,k\}}(t)\|_F^2 \quad (2.15)$$

を最小化するものを計算する. ここで, $\|\cdot\|$ はフロベニウスノルムを表す.

こうした手法は物理的な剛性を反映した形状のマニピュレーションへと応用されている. Igarashi らは, 三角メッシュ上でユーザーが選択した頂点を移動させることで, 形状全体が ARAP となるような変形を記述する手法を提案している [IMH05]. この手法ではインタラクティブな操作を可能とするために, 形状の変形推定を2段階に分離し, それぞれを高速に解くことが可能な線形問題に帰着している. このように, 形状の補間やマニピュレーションにおいて, ユーザとのインタラクションを促進するために計算を高速化することが非常に重要である.

さらに性質のよい ARAP を目指して, Renjie Chen らによって積極的に研究が展開されている. Chen らは, 入力となる三角メッシュからの等角誤差 (conformal distortion) を上から抑える方法を提案し, 数学的に証明することで既存の手法で発生していたアーティファクトの除去に成功し, 高品質の補間を実現している [CWKBC13]. また Chien らは, 同様に入力から計算される調和写像を用いて, 歪みが小さいブレンディングを表現する調和写像の計算手法を提案している [CCW16].

2.5.3 形状空間表現を用いた補間

通常, 我々が形状を取り扱うとき, 形状を表現する点群やメッシュなどをそのまま用いるのが一般的であるが, 別の空間に形状を射影して取り扱うことでさまざまな恩恵を受けることが

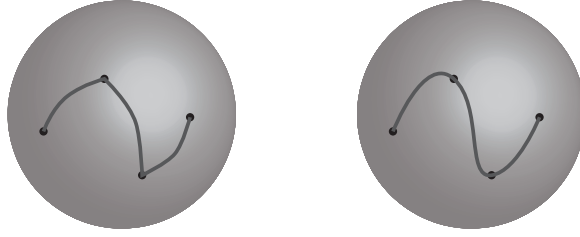


図 2.8. 測地線による補間とスプラインによる補間.

できる. コンピュータビジョンの世界でも, 3次元空間上の点を表すのに4次元の同次座標系を用いることで, 回転, 並進, 射影などの関係が行列の積として記述できることがよく用いられている. 形状処理の世界でも, メッシュをユークリッド空間とは別の性質を持つ空間上で取り扱うことにより, 形状の補間, 外挿その他の基本的なタスクにおいて効果的であることが示されている.

ここではその一例として, Shape space [Ken84] を取り上げる. Shape space とは, 3次元ユークリッド空間上のメッシュ (単体複体) が与えられたとき, そのメッシュと同じ接続構造を持つメッシュが取りうるはめ込み全体の空間と定義される. すなわち, 与えられたメッシュに対して接続関係を維持しながら変形させたメッシュは shape space という空間上の1点として表される. このようなはめ込みは, メッシュの頂点数を m としたとき, ベクトル $P \in \mathbb{R}^{3m}$ として表される. この空間に対してリーマン幾何的な計算を行うことでジオメトリ処理を行う. ここで重要となるのが, どのようなリーマン計量を導入するか, ということである.

Kilian らは, Shape space 上に対して伸縮に基づいたリーマン計量を導入し, 形状の補間, 変形転写 (deformation transfer), 外挿などのジオメトリ処理をそれぞれ, Shape space 上の測地線, 平行移動, 指数写像として計算できることを示した [KMP07]. この計量は剛体運動に対して不変であるという性質を満たしているものの, 物理的に生じ得ないしわなどが生成されてしまうという問題があった. そこで Heeren らは, より物理的に妥当な変形を目指して, 粘性散逸を考慮した計量の導入を提案した. すなわち, 後述する Thin-plate エネルギーのヘッセ行列がリーマン計量となることを示し, 新たなリーマン多様体である Shell space を定義した [HRWW12, HRS⁺14]. また, Shape space 上の幾何フローを考えることで, 物体の非剛体変形を記述する手法も提案されている [BvTH16].

ここまで紹介してきた手法では, 基本的に1対の形状が与えられたときのジオメトリ処理であったが, 近年ではこれを更に拡張し, 複数の形状が与えられた場合のジオメトリ処理へと研究がシフトしている. この背後にある動機は, 時系列に与えられたキーフレームを滑らかに補間することで, より自然なアニメーションの生成を支援したいというものである. このため, 上述の手法では形状の補間を Shape space あるいは Shell space の測地線として計算してきたが, より時空間的な滑らかさを目指して, 図 2.8 に示すとおり, 各キーフレーム間の測地線の接続として表すのではなく, キーフレームにおける滑らかさを考慮したスプライン補間を行う手法が提案されている [HRS⁺16, HPR17]. この潮流は, 本論文における一筆書きアニメー

ションの中割において導入する時間方向のスプライン補間とも沿うものであるといえる。

2.6 形状の対応探索

2.6.1 画像の対応探索

画像における対応点探索は様々な場面で登場し、コンピュータビジョンの根幹をなす技術である。例えば、2枚の視点の異なる画像から、空間上の同一点を指す点を各画像上で対応付けることができれば、ステレオ視の要領で空間点の3次元座標を取得することができる。また、動く物体を捉えた時系列画像上で、物体上で同一の点を逐次検出することで物体のトラッキングに応用することができる。同様に、形状の補間、特にアニメーションの中割をする場合でも、一方の形状のどの点から他方の形状のどの点へ遷移させれば自然な補間形状が得られるかを求めるために、形状間の対応点を求めることは重要である。

こうした対応点探索は一般的に、画像中からエッジやコーナーなどの特徴点を検出する工程を経て、検出した特徴点をよく表現するベクトル（特徴量ベクトル）で記述することにより行われる。しかし形状の補間では、特徴点として選択した点だけではなく、形状を構成するすべての要素（頂点など）において遷移する場所を指定する必要があるため、密な対応点探索（dense correspondence）を行う必要がある。このため、特に特徴量記述について詳述する。

画像の特徴量記述が提案されはじめた1990年代初頭には、対象物全体の輝度分布や信号処理的な手法（ウェーブレット等）を用いた記述が広く用いられてきた。これにより画像単位でのマッチングへの活路が見出されたが、対象が部分的にしか見えていない場合などに弱いことから、画像の局所領域を対象として特徴量を記述する方法が提案された（例えば[SM97]）。こうした局所特徴量は通常ベクトルとして記述され、近傍が似た情報を有している際はベクトル間の距離も短くなるように設計される。つまり、特徴量を記述した点のマッチングは、特徴量ベクトルを何らかのノルムで測る事により行われる。

このような局所特徴量が満たすべき性質は何だろうか。異なる画像上で同じ点を検出するためには、カメラの位置や環境の変化に対して頑健であることが望ましい。このため、局所特徴量の性能を測るベンチマークでも指標として採用されているように、画像の並進、回転、スケール変化、照明環境の変化に対して頑健となるように設計される。なかでも照明の変化に対して頑健となるように、特徴量を記述したい点の周囲を区画に分け、各区画ごと勾配のヒストグラムを取る手法が提案されてきた。勾配のヒストグラムを取ることで得られる特徴量記述子はHOG（Histogram of Gradients）と呼ばれ、その性能の高さから後の特徴量記述子にも影響を与えてきた。こうした中、最も広く用いられている画像特徴量の一つであるSIFT（Scale Invariant Feature Transform）[Low04]が提案され、スティッチング、トラッキングなど様々な応用が提案されてきた。

SIFT自体は特徴点検出と特徴量記述子両方を含む手法であり、その両面に渡って大きな影響を与えてきた。SIFTでは特徴点を検出する際に、画像にスケールの異なるガウシアン

フィルタを連続的にかけて得られるスケールスペース^{*3}の極値を取る点を特徴点として採用し、そのスケールを用いて特徴量を記述する。ガウシアンカーネルを用いる等方性スケールスペースはその後、エッジの強さに応じて拡散の度合いを変化させる非等方性スケールスペース[PM90]へと拡張され、近年ではAKAZE (Accelerated-KAZE) [ANB13]と呼ばれる特徴量記述子へと発展を遂げている。

また、特徴量記述においても様々な改良が提案されてきた。SIFTでは、特徴点の周囲を等間隔のグリッドに分割してそれぞれでヒストグラムを構成しているが、特徴点からの距離に応じて重要度に重みをつけることにより識別力を上げるアイデアが様々な文献で提案されてきた。Mikolajczyk と Schmid によって提案された GLOH (Gradient Location and Orientation Histogram) [MS05]では、特徴点の周囲で等間隔のグリッドを用いるのではなく、対数極座標によって分割したグリッドを用いて記述している。Belongie と Malik によって提案された Shape context[BMP02]も同様に対数極座標を用いて記述している。

このようなHOGベースの手法とは異なり、特徴点の周囲に定義したサンプリングパターンにおける明暗情報を用いて特徴量を記述する手法がPascal Fuaのグループを中心に提案された[CLSF10]。特徴点の周りに事前に定義したサンプリングパターンの中からペアを複数選択し、各ペアにおける明暗を比べることにより0か1かのバイナリ情報にエンコードする。こうした特徴量は、特徴量がバイナリ列で記述されることからバイナリ特徴量と呼ばれる。バイナリ特徴量は他の特徴量に比べて高速に計算できるほか、特徴量同士のマッチングの計算にハミング距離を用いることで高速なマッチングをすることも可能である。初期に提案されたバイナリ特徴量であるBRIEFでは、ランダムに定義されたサンプリングパターンを使用していたが、サンプリングパターンを工夫することでより性能の高いバイナリ特徴量が提案されてきた。ORB[RRKB11]では、サンプリングパターンからペアを選択する際に、分散を大きく設計することで最適なサンプリングペアによる記述を行った。またFREAKでは、人間の目の網膜の構造を参考にサンプリングパターンを定義している[AOV12]。

人がデザインしたこれらの特徴量とは異なり、特徴量記述を学習によって半自動的に獲得する手法も提案されている。Siamese ネットワークと呼ばれる畳み込みニューラルネットワークを用いて、識別が困難なパッチを優先的に学習することで頑健な特徴量を抽出する手法が提案された[SSTF⁺15]。また、近年では特徴点の検出から記述までを深層学習により一気に行う手法も提案された[YTLF16]。

^{*3} 画像や形状のマルチレゾリューション解析で取り上げられるスケールスペースは、1983年にWitkinによって発表された *Scale-space filtering*[Wit83] が始祖であると認識されているが、実はその20年以上も前の1959年に日本人の飯島泰蔵博士によって提案されたものである[WII99]。飯島博士は、現在の産総研の一部である電気試験所でパターン認識の研究を通じて、視覚パターンの本質がボケにあることを見抜き、電気通信学会の研究会において「パターン観測に関する基礎理論」と題して世界に先駆けて発表したのである。余談であるが、飯島博士が東工大時代に師事した山内博士は、本学工学部計測工学科の教授を歴任された方である。

2.6.2 形状の対応探索

画像における対応点探索では、画像のリッチなテクスチャ情報を利用することができる。しかし、形状の輪郭などの情報のみが与えられている場合を想定して、形状の幾何的な情報のみを利用して特徴量を記述する手法が考案されてきた。

もっとも古典的な形状特徴量の一つにフーリエ記述子 [ZR72] がある。輪郭線を関数によって表現し、その関数を複素フーリエ展開して得られる複素数列を特徴量とするものである。輪郭線を関数として表現する手法の違いによって様々な種類のフーリエ記述子が提案されている。その中でも代表的な P 型フーリエ記述子 [上坂 84] では、予め各辺の長さが同じ等辺多角形で近似した形状を用いて記述した累積離散曲率関数を被展開関数として得られるものである。P 型フーリエ記述子でも本論文における手法と同様に、シフトや回転に対して不変となるように、曲線の内在的な性質である離散曲率に着目している点が興味深い。

このような形状の周波数解析は、3 次元形状処理においても基本的な道具として重用されている。1 次元におけるフーリエ変換を 2 次元多様体（曲面）に直接応用することはできないため、ラプラスベルトラミ作用素のスペクトル分解によって得られる固有関数を正規直交基底として用いる。このような形状の信号处理的解析も、既述の Taubin により先鞭がつけられた [Tau95]。

フーリエ記述子は信号处理的なアプローチで特徴量を記述したものであったが、統計的なアプローチによって記述する手法も提案されている。Chen らは形状の輪郭線のみを用いて、シフトやスケール、回転に不変なモーメント特徴量を求める手法を提案した [Che93]。この特徴量は、形状全体を表現する特徴量であるため、形状のマッチング等への応用を持つ。

また、前節において触れたマルチレゾリューション解析を形状の輪郭線に応用した手法も提案されている。Mokhtarian らによって提案された曲率スケールスペース (curvature scale space) [MM86] では、輪郭を表現する曲線に対して、様々な偏差を持つガウシアンカーネルを連続的に適用する。曲率スケールスペースは各スケールスペースにおける曲線の曲率を計算し、曲率が 0 となる点を抽出して得られる。このように、曲率は様々な場面で登場し、形状を記述する基本的な道具であることがわかる。

2.6.3 複数の形状を用いた対応探索

形状間の対応点を求める際に、1 対の形状のみを用いるのではなく、複数の形状セットを用いることで、対応付けの精度が向上することが知られている。

Nguyen らは、与えられた形状セットにおけるペアごとに計算した対応付けの良さを評価し、悪い対応付けをその他の良い対応付けに基づいて計算し直すことで、形状セットの高精度な対応付けを得る手法を提案している [NBCW⁺11]。

また、対応付けの計算に動的計画法を用いた場合においても、複数の形状を用いたほうが高精度な対応付けが得られることが示されている [SY14]。第 6 章において提案している複数フ

レームの頂点对応は、1 対の形状間で計算した対応付けを外装することで計算しているが、このように隣接複数フレームの情報を有効活用することでさらに高精度な対応付けが得られる可能性がある。

2.7 審美性の主観評価方法

本論文で取り扱うようなアニメーションの審美性に関する評価は、人の主観に基づいて行われるものであり、元来客観的な評価することが困難なものである。しかし、電話などのユーザ体験の品質向上が重要な場面において、ユーザが実際に体験する品質 (QoE: Quality of experience) に基づいた設計を行う必要性が指摘され、ユーザが実際に体験したときの品質心理評価に基づいて評価する主観品質評価法の開発・標準化が進められてきた。こうした標準化は、国際電気通信連合の一部門で通信分野の標準策定を行う ITU-T という組織によって行われており、現在では、電話などの通信に限らずマルチメディアなどの様々な対象を包含している。策定された標準は勧告という形で我々が広く利用できる形でまとめられ、そのほぼ全てが ITU-T のウェブサイトから入手できるようになっている。

主観品質評価法に対して、主観評価により得られる評価と同等の評価を、映像などの物理的な特徴から推定する客観評価法が開発されてきた。客観評価法は参加者を集めたり専用の評価環境を用意する必要が無く、時間・コストを大幅に削減できる上に再現性が高いという特徴を持つため、積極的に研究されてきたものの、主観品質評価法に比べて正確な結果が得られないことが指摘されている (例えば [WCCL13])。

こうした背景から、本論文でも主観品質評価に基づくアニメーションの審美性の主観評価を行う。主観品質評価法はそれ自身長い歴史を持ち、様々な手法が提案されてきたものである。本節にてその概要を俯瞰し、本論文で用いる主観品質評価法を概説する。

2.7.1 主観品質評価法

主観品質評価法は、ユーザが知覚する品質を心理実験によって直接測定するため、高い信頼性を持つ評価手法である [難波 98]。Stevens によると、「測定とは、規則に従って対象あるいは事象に数を割り当てること」と定義され [Ste51]、いかなる規則に従って数を割り当てるかで 4 つの尺度 (名義尺度、序数尺度、間隔尺度、比率尺度) が存在するとされている。とりわけ間隔尺度は、ある特性について経験的に等しい距離を、数値的に等しい距離で示す尺度であり、品質評価において様々な場面で用いられる。間隔尺度は相対的な評価であるため、絶対的な零点は存在しないが、何らかの合理的な基準に従って標準化しておくことで絶対量として扱うことができる。(たとえば、温度の目盛りやカレンダーの日付などが挙げられる。) こうした合意の元、基準点を定めると加算 (減算) 演算について閉じるため、統計的な処理が可能となり、統計量や検定などが可能となる。

主観品質評価法のなかで、最も取り扱いやすく、また最も広く用いられているものにオピニオン評価法と呼ばれるものがある [ITUa]。これは、評価者に品質を「非常に悪い」から「非常

に良い」に対応する，1点から5点までの点数によって評価してもらい，全評価者の評点を平均した値を MOS(mean opinion score) として定量化する手法である．しかし，ITU-T 勧告 P.800.2 で述べられているように，オピニオン評価法は非常に多くの要因によってその結果が左右されるため，非常に丁寧に実験をコントロールする必要がある上に，以下に述べる基本的な問題が存在することが指摘されている [WCCL13]．

- (1) 評価スケールマッピング：オピニオン評価法において用いられる「最も良い」，「良い」，「普通」，「悪い」，「非常に悪い」といった尺度が具体的に定義，あるいは説明されていないため，参加者自身が定義したマッピングによって彼らがどう感じたかを尺度に変換する必要がある．
- (2) 評価スケールの異質性：参加者自身が持つ嗜好や選択戦略に従って，スケールの異なる解釈を持つ恐れがある．すなわち，同じような経験で同じ刺激を受けたとしても，異なる評価を下す可能性がある．

これらの問題を排除するために事前に尺度の等間隔性の実験的な検証が行われていない場合は，本来間隔尺度としての役割は果たさず，序数尺度として取り扱わなければならないことに注意されたい．

一方で，参加者がより簡単に，そして確実に評価を下すことができる主観評価法として，ITU-T 勧告 P.910[ITUb] で規定される一対比較法 (paired comparisons) が提案されている．一対比較法とは，全ての評価対象から，取りうる一対の組み合わせの全てに対して優劣を判定する手法である．すなわち， n 個の評価対象が存在する場合，合計 $n(n-1)$ 個（順序効果を考慮しない場合は $n(n-1)/2$ 個）の組み合わせで優劣を判定する．この手法は，実験に要する時間が評価対象の2乗に比例するため時間的なコストが高いものの，オピニオン評定法と比べて容易に判断を下すことができるうえに，参加者の知覚を参加者自身で尺度にマッピングする必要が無いため，オピニオン評定法において指摘されていた問題点を排除することができる．

しかし，一対比較法によって得られる一対比較表（表 2.1）も序数尺度であるため，間隔尺

表 2.1. 一対比較表の例 ([難波 98] より一部改変して引用)．評価対象 1 ～ 5 に対して，評価対象 i のほうが評価対象 j よりも優れていると答えた人数を (i, j) に示す．

		j				
		1	2	3	4	5
i	1	—	207	279	312	251
	2	188	—	269	309	261
	3	116	126	—	261	178
	4	83	86	134	—	168
	5	144	134	217	227	—

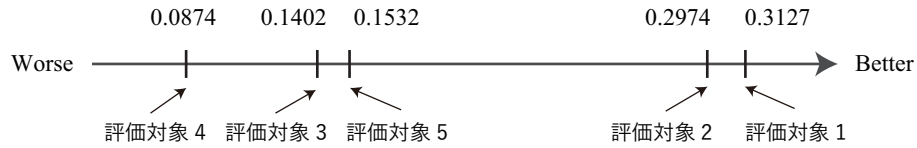


図 2.9. 一対比較表 2.1 を BTL モデルを用いた Thurstone の比較判断の法則を用いて間隔尺度に変換した結果. 図中の数字は各評価対象の評価スコアを表す.

度に変換する必要がある. 一対比較表から間隔尺度を得る代表的な手法として, Thurstone の比較判断の法則 (Thurstone's law of comparative judgment)[Lou27] が現在に至るまで広く用いられている [IT05]. この法則では, ある刺激によって引き起こされる人間の反応は確定的なものではなく, 確率的な挙動を示すものであるという仮定をおく. すなわち, ある評価対象に対する評価スコアが, なんらかの確率分布に従うと仮定する. このような仮定では, ある評価者が 2 つの評価対象 A,B の優劣を決める (評価する) という操作を, A が従う確率分布からサンプリングした値と, B が従う確率分布からサンプリングした値を比較する操作であると考え. このとき, 評価スコアが従う確率分布に課す仮定によって, 様々な比較判断のモデルが提案されている.

最も基本的な比較判断のモデルは Thurstone モデル [Lou27] と呼ばれ, 評価スコアがガウス分布に従うと仮定するものである. このモデルでは, 例えば 2 つの評価対象 A,B が与えられたとき, それぞれの評価対象が従うガウス分布に従って計算される「A が B よりも高い評価を受ける確率 $P(A > B)$ 」が, 「一対比較によって得られた選択比率」と等しいと考える. このときガウス分布のパラメータを推定し, その分布の平均の差を評価スコアの差と考える. このモデルでは, 評価対象が従うガウス分布のパラメータに強い仮定をおく必要があるため, 近年では改良されたモデルが用いられている. Bradley-Terry-Luce (BTL) モデル [BT52, Luc59] では, 評価スコアがガウス分布ではなく, Gumbel 分布に従うと仮定することで, $P(A > B)$ が閉形式の解が得られるため, その簡便さから現在でも広く用いられている. これらのモデルを, 複数の評価対象に拡張する手法が様々な文脈で提案された. (例えば, Mosteller は Thurstone モデルを用いた最小二乗法による方法を提案した [Mos51].) 評価対象が複数ある場合には, 各評価対象の従う分布の平均値が評価スコアとなり, 間隔尺度が得られる. これらの手法の詳細については, David や Tsukida らによってまとめられている [Dav88, TG11]. また BTL モデルに関しては, Wickelmaier らによる実装が公開されており, 本論文でもこの実装を利用した [WS04]. 図 2.9 は一対比較表 2.1 を BTL モデルを用いて間隔尺度に変換し, 図示したものである. 図中の数字は, 各評価対象の評価スコアを表し, 数値が高いほうが高い評価を受けたことを表す.

また, Thurstone の比較判断の法則を用いる際の実験参加人数について, 難波らは 50 人以上を推奨している [難波 98]. さらに, クラウドソーシングを用いたマルチメディアの QoE 評価の精度検証を行った研究 [WCCL13] では, MTurk 上で募った参加者数が 17 ~ 38 人であったことから 50 人以上の参加者が望ましい.

2.7.2 クラウドソーシングを用いた評価

主観品質評価実験はこれまで、実験室の中で参加者を募集して行うものであったが、ユビキタスなインターネット環境の登場により、インターネット上で広く参加者を募集して行うことができるようになり、簡便に実験が行えるようになってきた。このように、幅広いタスクを解決するためにインターネットで協力者を募る方法はクラウドソーシングと呼ばれ、様々な場面で活用されている [鹿島 16]。特に、専門知識を必要とせず短時間で行うことができるクラウドソーシングの実施形態はマイクロタスク型と呼ばれている。マイクロタスク型クラウドソーシングの中でも代表的なものとして、Amazon 社によって提供されているクラウドソーシング市場である Amazon Mechanical Turk (MTurk)[Ama] が挙げられる。MTurk では、画像のアノテーションなど様々なタスクを依頼することが可能なほか、専用のサーベイサービス（例えば、SurveyMonkey[Sur]）と組み合わせることで本研究で行うようなマルチメディアの主観評価を行うことができる。本論文でも、主観品質評価実験を MTurk 上で募集した参加者を対象として行った。また、被験者を伴う実験を行う場合には、一般には事前に倫理審査によって実験の遂行が許可されていることが必要であるが、医学系研究でなく、かつ無記名形式の実験を行う分には倫理申請は必要ない^{*4} ため、本研究で対象とするアニメーションの審美性の評価といった主観品質評価実験は倫理審査が不要であることに注意する。

クラウドソーシングは、比較的低い経済的・時間的コストで実験を実施できる一方で、参加者が監督なしに実験を行うため、実験結果の品質の確保は挑戦的な課題であることが指摘されている [WCCL13]。クラウドソーシングにおける挑戦的課題の一つとして、実験に参加する対価として支払われる報酬を目当てとした不誠実な参加者をいかにして検知し、排除するかということが挙げられる。この課題は、クラウドソーシングの品質管理として活発に研究が進められている。本研究では、予め選定された信頼できるユーザにのみ実験への参加を依頼することで、この問題に対する対処を行っている。

また、クラウドソーシングによる主観品質評価の信頼性を高めるために、測定法を注意深く設計する必要があることが指摘されている [WCCL13]。先述の通り、タスクがオピニオン評定法における評価のように直感的かつシンプルでない場合、どういった評価を下すべきか完全に理解していない参加者が含まれる恐れがあるため、問題のある回答を与える場合があり、信頼性の低い結果を招いてしまう。このため、参加者が監督下でなくても、なるべく確実な評価を下せるように実験を設計する必要がある。Wu らはクラウドソーシングを用いたマルチメディアの信頼性の高い QoE 評価を得る手法として一対比較法に基づいた実験設計法を採用し、Thurstone の比較判断の法則を用いて間隔尺度を計算しているため [WCCL13]、本研究でもこのスキームに基づいて実験設計を行うことで実験結果の信頼性を高める工夫を行った。

^{*4} 東京大学工学系・情報理工学系等安全衛生管理室の倫理審査に関するガイドライン [東京] によると、ヒトを対象とする実験のうち、医学系研究や機器を開発し、ヒトに使用する研究、個人情報取扱等、倫理的配慮が必要な研究に限り事前の倫理申請が必要であることが規定されている。なお、本研究で行った実験に関しても、倫理審査が必要な研究に当てはまらないことを同安全衛生管理室に事前に確認した。

第3章

曲率勾配フローを用いた閉曲線ブレンディング

本論文では，平面上にある閉曲線間の滑らかな遷移を記述する閉曲線ブレンディングと呼ばれる問題について，曲率フローを用いて定式化する手法を提案する．従来の閉曲線ブレンディング手法では，閉曲線を生成するための制約条件が曲線の位置を変数として記述されるため，非線形制約下での最適化問題を解く方針が主流であった．そこで，閉曲線条件が曲率の時間微分に関して線形に記述できることを利用して，曲率の L^2 内積に関する曲率エネルギーの勾配フローをとることにより，線形制約下での線形フローとして閉曲線ブレンディングを定式化する．これにより提案手法は，自然なブレンディング曲線を生成するだけでなく効率的に計算する事ができるため，高速なブレンディングを実現する．



図 3.1. 提案手法による閉曲線ブレンディングの例．この例では，「1」から「2」への閉曲線ブレンディングを実現している．

3.1 はじめに

シェーブブレンディング（シェーブモーフィング）とは，閉曲線やソリッドモデルの間の遷移を連続に表現する手法であり，コンピュータグラフィックスや計算幾何学等の分野で活発に研究されている問題である．その中でも対象を閉曲線に限定した問題を閉曲線ブレンディングと呼び，アニメーションの生成 [ACOL00] やシェーブマッチング [BMP02] 等の様々なアプリケーションにおいて重要な役割を果たしている．閉曲線ブレンディングを計算機で行うためには，ブレンディングする閉曲線を離散化したポリゴンに対して，初期状態のポリゴンの頂点が

30 第3章 曲率勾配フローを用いた閉曲線ブレンディング

終了状態のポリゴンのどの頂点に対応するのか、という対応関係を明らかにする必要がある。この問題は頂点对応問題と呼ばれ、多くの研究が行われている [MS01, LJ07]。閉曲線ブレンディングは、このような頂点对応問題に加え、各頂点がブレンディング中に通過するパスを求める頂点パス問題と呼ばれる問題を解く必要がある。本論文では、特に頂点パス問題に着目し、図 3.1 に示すような閉曲線ブレンディングを行う手法を提案する。

平面曲線の補間を考察する上で、平面曲線がはめ込まれている空間をまず設定することが必要である。例えば、平面曲線が 3 次元空間の超平面（すなわちある平面）上にはめ込まれていると考えたとき、その間の遷移が必ずしも 2 次元平面にはめ込まれるとは限らない。このように高次の空間上で考えることで補間曲線に対して、2 次元空間にはめ込まれた曲線だと満たすことが困難な性質を付与できることが期待される。しかし、この問題は次元の増加による自由度があるため、ブレンディング曲線に課すデザインにより深い考察を要する。このため、2 次元曲線がはめ込まれた空間も 2 次元平面であるとして考察する。

従来の閉曲線ブレンディング手法では、曲線に関する長さや角度などの値を線形補間することによって曲線の遷移を求めるという方針が採用されてきた。しかし、このように線形補間した値から再構成した曲線は一般に閉曲線にならないという問題がある。このため、再構成した曲線をわずかに変形させることで曲線の端点を一致させることにより、閉曲線にする処理が必要となる。端点の位置が一致するという G^0 条件のもと記述し、エッジ長を変化させることで閉曲線とする方法が Sederberg らによって提案された [SGWM93]。この方法は閉形式として解けるため高速に解ける一方で、ブレンディング中によじれ (kink) と呼ばれるアーティファクトが発生する可能性があることが知られている。また近年になって、端点の位置に関する非線形な制約式として書き下し、最適化問題に帰着して解く手法も提案されている [SSHS14, DSL15] が、局所最適解に陥る可能性がある他に、計算コストが大きくリアルタイムな処理に不向きであるという課題がある。

第 1 章でも述べた通り、ブレンディング手法を設計する上で重要なのは、どのような遷移が望ましいのかという設計指針を最初に示すことである。そこで本研究では、曲線上の各点における局所的な曲がり具合を示す値である曲率を用いて、「ブレンディング中の任意の時刻において、入力形状対の曲率に対するブレンディング形状の曲率の割合がすべての頂点で一致する。」という設計指針を定める。すなわち、これは全頂点における曲がり具合が均一に変化することを意味するものであり、ブレンディングの設計指針として妥当であると言え、関連手法でされている指針もこの指針の特別な場合である。

本論文では、閉曲線に関する制約式が曲率の時間微分に関して線形に書き下せる [CPS13] ことを利用して、曲線間の遷移を記述する閉曲線ブレンディング問題を、線形制約条件下の曲率フローを用いて定式化することを提案する。

曲率フローを用いる手法は、曲線や曲面に関するジオメトリ処理において近年よく用いられている手法 [BKP⁺10] である。Desbrun らは、曲面に対して定義された Membrane エネルギーに対して最急降下法により導出される平均曲率フローを用いることで、曲面のフェアリングを実現している [DMSB99]。また、Willmore エネルギーに基づく Willmore フローを用いる事でフェアリングを実現している研究も行われている [BS05, WBH⁺07, CPS13]。このよ

うに、曲率フローは曲線や曲面の形状の遷移を記述する手法であると解釈することができるため、本論文で提案するように、閉曲線ブレンディングにも応用することが可能であると考えられる。しかし、フェアリングの際に用いられるエネルギーは一般に、対象となる形状の次元において最もエネルギーの低い形状（2次元の場合は円）を基準としたものであるため、直接閉曲線ブレンディングに応用することはできず、エネルギー関数の最適な設計が必要である。そこで、閉曲線対の曲率の差の2乗をエネルギー関数とする事で、曲率フローが閉曲線ブレンディングに応用できることを提案する。この曲率フローは線形であり、また閉曲線に関する条件が曲率の時間微分に関して線形に書き下せることから、数値的に安定であり高速に計算することが可能である。

また曲率は、形状認識にも用いられる [LZW⁺13] ように曲線の性質を良く捉えたものであり、パラメトリゼーションや剛体変換に不変な内在量である。さらに関連研究 [SSHS14, SE02] でも閉曲線ブレンディングに用いられているように、審美性の観点からも有効であると考えられる。これらの点から、曲率フローを用いる本手法は、関連手法と比較して遜色ない品質を持つブレンディングを、非常に高速に実現できることが期待できる。

閉曲線ブレンディング問題が対象とする閉曲線としては、しばしば C^2 -級の曲線が仮定されている [SE02] が、曲率関数を構成する際に必要な弧長パラメトリゼーションを解析的に行うことが困難であることから、本論文では閉曲線を離散化したポリゴンを対象とする。本論文では、ポリゴンから計算した離散曲率ベクトルを用いて構成した曲率フローにより、ブレンディングしたポリゴンを求める。また、提案手法の有効性を確認するため、クラウドソーシングによる主観品質評価実験を用いた関連研究との比較を行うことにより、従来手法と比較して高速性と審美性を両立するブレンディングが可能であることを確認した。

本章に関する貢献は以下のようにまとめられる。

- 入力閉曲線対の曲率関数の差の2乗和として設計したエネルギーの勾配フローを考えることにより、ブレンディングを実現する曲率フローを提案した。
- 補間形状上のある頂点における外角が、入力閉曲線対の外角間で単調に変化することを示し、よじれが発生しないことを示した。
- 主観品質評価実験を通して、審美性と高速性を両立するブレンディング手法であることを示した。

3.2 準備

3.2.1 曲率

\mathbb{R}^2 上の C^2 -級曲線に関する基本的な知識を整理する。 \mathbb{R}^2 上の任意の曲線 $\gamma(u) : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ が与えられたとき、弧長パラメータ s を

$$s = \int_a^u \left| \frac{d\gamma}{du} \right| du \quad (3.1)$$

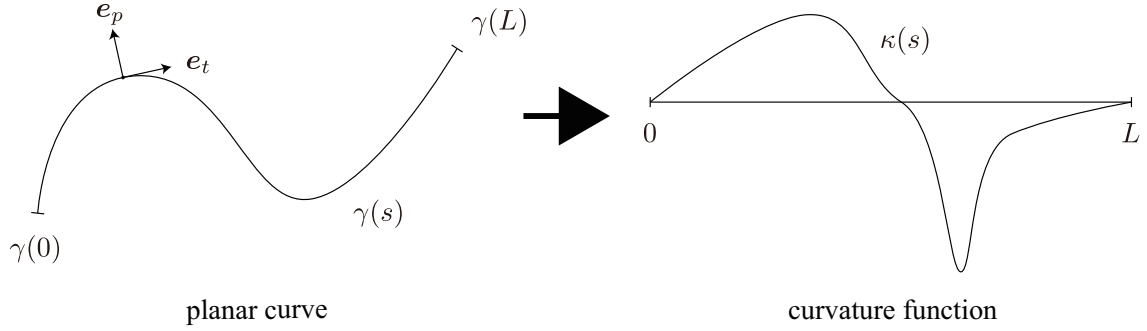


図 3.2. 平面曲線と曲率関数.

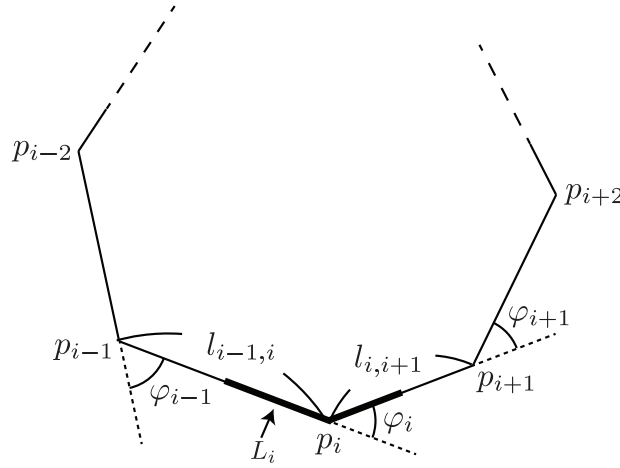


図 3.3. ポリゴンに関するパラメータの定義

と定義する. このとき, この曲線が正則 (任意の u に対して $|\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}u| \neq 0$) であると仮定して, 曲線 γ を弧長パラメータ s で書き表したものを $\gamma(s) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ とする. (ただし, L は曲線 γ の長さ.) ここで, $|\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}s| = 1$ となることに注意する. 任意の弧長パラメータ $s \in [0, L]$ に対応する曲線上の点における単位接ベクトルを e_t とし, それに反時計回りに直交する単位法線ベクトルを e_p とする. このとき, 曲線 $\gamma(s)$ に対応する曲率関数 $\kappa(s)$ を

$$e'_t = \kappa(s)e_p \quad (3.2)$$

と定義する. (ただし, $e'_t = |\mathrm{d}e_t/\mathrm{d}s|$.)

弧長パラメータを持つ 2 曲線 $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$ の曲率関数 $\kappa_1(s), \kappa_2(s)$ が一致するための必要十分条件は, 回転と並進によって $\gamma_1(s)$ を $\gamma_2(s)$ に重ねることができることである [小林 77]. 本論文では, 回転と並進によって重ね合わせることができる曲線を同一視する.

3.2.2 離散曲率

正則な閉曲線 $\gamma(u) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を離散化することを考える. $[a, b]$ の任意の分割 $\sigma = \{a = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n = b\}$ に対して, 図 3.3 に示すように, 対応する曲線上の点 $p_i = \gamma(\sigma_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) の集合を得る. γ は閉曲線であるので, $p_0 = p_n$ であることに注意する. ここで, 区分線形な \mathbb{R}^2 上の関数

$$\hat{\gamma}(u) = \frac{u - \sigma_{i-1}}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} p_i + \frac{\sigma_i - u}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} p_{i-1} \quad (\sigma_{i-1} \leq u \leq \sigma_i) \quad (3.3)$$

($i = 1, 2, \dots, n$) を考える. この区分線形関数 $\hat{\gamma}$ の像をポリゴンと呼び, $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ をその頂点集合と呼ぶ. P を結ぶ線分をエッジと呼び, その集合を E で表す. 文脈から明らかなきは, 頂点集合 P によってポリゴン自体を指す.

前節で定義した曲率は微分を伴う操作であったため, ポリゴンに対して直接適用することはできない. そこで, 離散微分幾何 [CdGDS13] に基づいて離散曲率を定義する. 頂点 p_i における離散曲率 $\hat{\kappa}_i$ は, 双対辺の長さ

$$L_i = \begin{cases} (\|p_1 - p_0\| + \|p_0 - p_{n-1}\|)/2 & (i = 0) \\ (\|p_{i+1} - p_i\| + \|p_i - p_{i-1}\|)/2 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3.4)$$

と外角 φ_i を用いて,

$$\hat{\kappa}_i = \frac{\varphi_i}{L_i} \quad (3.5)$$

と書ける. また, 頂点集合 $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ を持つポリゴンの離散曲率ベクトルを,

$$\hat{\kappa} = [\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1, \dots, \hat{\kappa}_{n-1}]^T \quad (3.6)$$

と定義する.

ここで, 各エッジの長さや離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}$ が与えられれば, ポリゴンが回転や並進を除いて一意に定まることに注意する.

3.2.3 曲線のエネルギー

曲線に対してエネルギーを定義することを考える. 弧長パラメータによって表された正則な閉曲線 $\gamma(s) : I = [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ のエネルギーを, その曲率関数 $\kappa(s)$ を用いて

$$E(\gamma) = \int_0^L \kappa(s)^2 ds \quad (3.7)$$

と定義し, 曲率エネルギーと呼ぶ. この曲線を離散化して得られるポリゴンの曲率エネルギーは, 離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}$ を用いて

$$E(P) = \|\hat{\kappa}\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\kappa}_i^2 \quad (3.8)$$

となる.

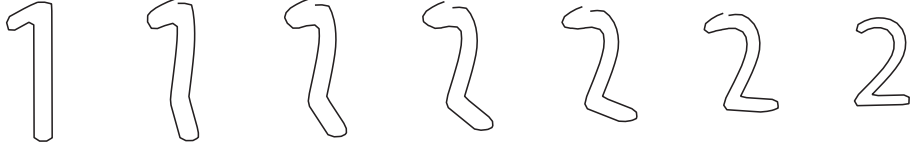


図 3.4. 曲率を線形補間し，再構成した曲線は一般に閉曲線にならない．

3.2.4 曲率勾配フロー

曲線 γ とそのエネルギー $E(\gamma)$ に対して定義される偏微分方程式

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\nabla E(\gamma) \quad (3.9)$$

を考える．この解は，曲線を要素とする多様体上の 1 パラメータ変換群（フロー）となる [松本 08]．特に，曲率に変数変換したものを曲率フローと呼ぶ．このようにして定義した曲率フローは，曲率エネルギーの最急降下方向に曲率関数を更新するようなフローであると理解できる．しかし，曲率エネルギーは無限次元の関数空間上で定義されるものであるため，式 (3.9) 中の ∇ は汎関数微分を表す勾配作用素となる．このような勾配は，その空間に入っている計量によって定義された内積によって定義されるため，どのような内積をとるかが重要となる．例えば式 (3.7) に示す曲率エネルギーに関する曲率フローの場合，曲線の位置 γ に関する勾配は非線形となるが，曲率を変数とする曲率エネルギー $E(\kappa)$ に対して曲率の L^2 ノルムに関する勾配を計算すると，曲率フローは

$$\dot{\kappa} = -2\kappa \quad (3.10)$$

となり，空間微分を含まない線形なフローに帰着することが知られている [CPS13]．こうしたフローの解は数値的に安定に計算できるため，計算コストの低い前進オイラー法を用いて計算することができる．

ポリゴンに対しては，有限次元ベクトルである離散曲率ベクトルを用いてフローを書き下すことができる．すなわち，ポリゴンの曲率エネルギー $E(\kappa) = \|\kappa\|^2$ に対する曲率フローは

$$\dot{\kappa} = -\nabla E(\kappa) = -2\kappa \quad (3.11)$$

となり，ポリゴンのフェアリングなどに用いられる [CPS13]．

3.3 関連研究

閉曲線ブレンディングとは，2つの閉曲線 $\gamma_s : I_s(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_g : I_g(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，パラメータ t に関する写像 $t \mapsto \gamma_t$ が連続であり，かつ $\gamma_{t=0} = \gamma_s, \gamma_{t=T} = \gamma_g$ となるような曲線族 $\{\gamma_t\}_{t \in [0, T]}$ を求める問題であると考えられる．

最も単純なブレンディング手法は、閉曲線対 γ_s, γ_g そのものを線形補間することで曲線族 $\{\gamma_\tau\}_{\tau \in [0,1]} = (1-\tau)\gamma_s + \tau\gamma_g$ を得るものである。しかしこの手法は、3.5 章でも示すように、曲線のパラメトリゼーションや方向によって結果が異なることなどにより、不自然なブレンディングを生成するという欠点がある。

そこで曲線の位置や方向、パラメトリゼーションによらないブレンディングを実現する手法が提案されてきた [SGWM93, SE02, SSHS14, DSL15]。これらの手法の多くは閉曲線を離散化したポリゴンを対象とし、ポリゴンのエッジ長や外角、曲率等の幾何量を線形補間して得られた値から再構成したものを理想的なブレンディング曲線としているが、図 3.4 に示すように一般に始点と終点が一致せず、これらを閉じる操作を行う必要がある。

閉じる操作には大きく分けて 2 つあり、内角を保ったままエッジ長を調整する手法 [SGWM93, SE02, DSL15] と、エッジ長を保ったまま内角を調整する手法 [SSHS14] が提案されている。エッジ長を調整する手法では、単純な閉曲線同士のブレンディングにおいても大きくエッジ長を調整しなければならないケースやよじれ (kink) と呼ばれるアーティファクトが存在するケースがあることが知られている [SGWM93]。Dym らによって提案されている方法 [DSL15] は、Sederberg らによって提案された手法 [SGWM93] をベースにしており、外角とエッジ長をそれぞれ線形補間して得た値からもっとも近い閉曲線への射影を二次錐計画問題として定式化し、正則ホモトピーが数学的に保証されたブレンディングを実現している。一方で、内角を調整する手法においても非線形最適化問題として定式化した上で解く手法が提案されている [SSHS14] が、問題の制約式が強い非線形性を持つことから、求めた解が大域的最適解を持つことが保証されない上に、多くの計算時間を要するという問題点がある。

また、関連する手法として、閉曲線内を三角形分割して得られた領域間の遷移を求めることでブレンディングを行うものがある。Alexa らは、三角形分割した領域の対応付けが与えられた条件で、もっとも剛体変形に近いブレンディングを計算する手法を提案している [ACOL00]。また Chien らは、同様に入力から計算される調和写像を用いて、歪みが小さいブレンディングを表現する調和写像の計算手法を提案している [CCW16]。

他にも、ブレンディング曲線に関して特別な条件を付与して閉曲線ブレンディング問題を解く研究も存在する。例えば、ポリゴンの頂点と辺に対してエネルギーを適切に設計することで、自己交差を回避するフェアリングやブレンディングを実現する手法が提案されている [CDIO04, IOD09]。Iben らによって提案されているブレンディング手法 [IOD09] では、頂点と辺の間のユークリッド距離の 2 乗に反比例するエネルギー関数を用いているが、その勾配は非線形形式となってしまう大域的最適解が保証されない。さらに、多くの計算時間を要するため、リアルタイムな処理が必要とされる場面では適用することが困難な手法である。

3.4 曲率勾配フローを用いた閉曲線ブレンディング手法

3.4.1 概要

提案手法では以下のようにして、与えられた2つの曲線から計算した曲率フローに対して閉曲線条件を適用しながらブレンディングしたポリゴンを求める。

- (1) 閉曲線を離散化してポリゴンを構成する。(3.4.2 節)
- (2) ジョイントパーティションによってエッジ長を共有する新たなポリゴンを生成し、離散曲率ベクトルを計算する。(3.4.3 節)
- (3) ブレンディングを実現する曲率フローを求め(3.4.4 節)、閉曲線条件を適用しながら離散曲率ベクトルを更新する(3.4.5 節)。
- (4) 離散曲率ベクトルと(2)で求めたエッジ長を用いてポリゴンを再構成する。(3.4.6 節)
- (5) 収束するまで(3), (4)を繰り返す。

3.4.2 閉曲線からのポリゴンの構成

はじめに、3.2.2 節で述べた方法に基づいて閉曲線 $\gamma(u) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ からポリゴンを構成する。

曲率の大きさに応じてサンプリング密度を変える事により離散化誤差を抑える手法が提案されている [SS05] が、本論文では簡単のため、 $\gamma(u)$ の定義域を等間隔にサンプリングするような分割 $\sigma = \{\sigma^i = a + i(b-a)/n | i = 0, 1, \dots, n-1\}$ によって得られる $\gamma(\sigma^i)$ ($\sigma^i \in \sigma$) を頂点とするポリゴンを考える。ここで $\gamma(u)$ のパラメータは任意であるので、この離散化手法によって得られるポリゴンの辺長は必ずしも等しくならないことに注意する。提案手法ではエッジ長を固定し、離散曲率ベクトルを変化させることでポリゴンの変形を表現するため、全長が1となるように正規化してポリゴンを構成する。ブレンディングする閉曲線対を上述のように離散化して得られるポリゴンを、それぞれスタートポリゴン P_s 、ゴールポリゴン P_g と呼ぶ。

3.4.3 ジョイントパーティション

曲率フローは、同じエッジ長を持つ2つのポリゴンの間の遷移を記述するものであるが、上述のようにして構成したスタートポリゴン P_s とゴールポリゴン P_g のエッジ長は必ずしも同じであるとは限らない。このため、 P_s, P_g それぞれに対して新たに頂点を挿入することで、エッジ長を共有させることを考える。

そこで、ジョイントパーティション [SSHS14] と呼ばれる手法によって分割を一致させる。スタートポリゴン P_s とゴールポリゴン P_g はそれぞれ、 $[0, 1]$ 上で定義された弧長パラメータ s を持つ区線形関数 $\hat{\gamma}_s(s), \hat{\gamma}_g(s)$ の像であると考えることができる。このとき、 $\hat{\gamma}_s(s), \hat{\gamma}_g(s)$ に対応する分割を σ_s, σ_g とし、そのジョイントパーティションを $\sigma_j = \sigma_s \cup \sigma_g$ と定義する。

ジョイントパーティション σ_j によって、新たに頂点が追加されたポリゴンを \bar{P}_s, \bar{P}_g とすると、

$$\bar{P}_s = \{p_j | p_j = \hat{\gamma}_s(s); s \in \sigma_j\} \quad (3.12)$$

$$\bar{P}_g = \{p_j | p_j = \hat{\gamma}_g(s); s \in \sigma_j\} \quad (3.13)$$

と書ける。これらのポリゴンは分割を共有しているため、エッジ長も共有している。このようにして、エッジ長を共有するポリゴン対を構成することができる。 \bar{P}_s, \bar{P}_g から計算した離散曲率ベクトルを $\hat{\kappa}_s, \hat{\kappa}_g$ とする。

3.4.4 最急降下法による曲率フローの設計

フェアリングを目的として曲率フローを用いる手法 [CPS13] では、曲率フローを導出するエネルギー関数として曲率エネルギーを用いているが、ブレンディングに応用する際には、最適なエネルギー関数の設計が必要である。すなわち、初期条件を $\hat{\kappa} = \hat{\kappa}_s$ として、 $t \rightarrow \infty$ のとき $\hat{\kappa}_g$ に収束するような曲率フローを導くエネルギー関数を設計したい。ここで、例えば曲率エネルギーの差

$$E = \|\hat{\kappa}\|^2 - \|\hat{\kappa}_g\|^2 \quad (3.14)$$

をエネルギー関数とする曲率フローは、フェアリングと同様に $\dot{\hat{\kappa}} = -2\hat{\kappa}$ となるため、 $\hat{\kappa}$ は $\hat{\kappa}_g$ に収束しない。そこで本論文では、エネルギー関数として

$$E = \|\hat{\kappa} - \hat{\kappa}_g\|^2 \quad (3.15)$$

を用いる事を提案する。このエネルギーに対して 3.2.4 節で見たように、 L^2 内積に関する勾配をとる事で得られるフローは

$$\dot{\hat{\kappa}} = -2(\hat{\kappa} - \hat{\kappa}_g) \quad (3.16)$$

となり、線形なフローとなる。この曲率フローの初期条件として $\hat{\kappa}_{t=0} = \hat{\kappa}_s$ を用いることで、ブレンディングをこの曲率フローで表現することができる。このようにして定義された曲率フローは $\hat{\kappa}_g$ に向かって収束する。

以上のようにして設計した曲率フローは各点ごとに計算され、その解析解は $\kappa(t) = (1 - e^{-2t})\kappa_g + e^{-2t}\kappa_s$ となり、任意の時刻において、入力曲線対の曲率に対するブレンディング曲線の曲率の割合がすべての頂点で一致するため、3.1 節で述べた設計指針を満たすものであることがわかる。

また数値計算するために、この曲率フローを時間的に離散化する。この曲率フローは線形であり、位置に関する微分を含まないため安定性が高く、計算コストの低い前進オイラー法を用いて差分化し、直接次の値を計算することができる。すなわち、

$$\hat{\kappa}_{t=t+dt} = \hat{\kappa}_{t=t} - 2(\hat{\kappa}_{t=t} - \hat{\kappa}_g)dt \quad (3.17)$$

にしたがって離散曲率ベクトルの更新ステップを数値計算する。しかし、このようにして求めた更新ステップをそのまま適用すると閉曲線とならないため、次節で述べる閉曲線条件をこの更新ステップに適用する。

3.4.5 閉曲線条件の適用

3.4.4 節で導出した曲率フローを閉曲線ブレンディングに用いるために, Crane らによって提案された閉曲線条件 [CPS13] を用いる. 本節では読者の理解のため, その概要を説明する. 弧長パラメータを持つ C^2 -級の閉曲線 $\gamma(s) : [0, L](\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して,

- $\gamma'(0) = \gamma'(L)$ (Neumann 境界条件)
- $\gamma(0) = \gamma(L)$ (Dirichlet 境界条件)

を満たすように曲率フローを構成する. このうち Neumann 境界条件は, 曲線の端点における接ベクトルが等しいことを意味するため, 閉曲線における曲率の和が 2π の整数倍と等しくなることと同値である. すなわち,

$$\int_0^L \kappa ds = 2\pi k \quad (3.18)$$

と書ける. ここで, k はこの曲線の回転数と呼ばれる. 初期状態に対応する閉曲線の回転数が等しいと仮定すると, 上記の積分値はブレンディングを通して常に一定値となる. すなわち,

$$\int_0^L \kappa ds = \text{const} \quad (3.19)$$

となる. いま, 両辺を時間微分した

$$\int_0^L \dot{\kappa} ds = 0 \quad (3.20)$$

を考えると, これは元の条件を満たす必要条件となり積分定数の不定性が残るが, 初期状態に対応する回転数が既知であるため, 積分定数に関する不定性が取り除かれ, 十分条件となることがわかる. 以上より, $\dot{\kappa}$ と定数関数 $\mathbf{1}$ が L^2 直交すれば, 曲率フローが Neumann 条件を満たすことがわかる.

一方で Dirichlet 境界条件は, $T = \gamma'$ として,

$$\int_0^L T ds = 0 \quad (3.21)$$

と書けることから, こちらも両辺を時間微分して

$$\int_0^L \dot{T} ds = 0 \quad (3.22)$$

を得る. 以降では簡単のため, 積分因子 ds を省略する. \mathcal{J} を, ベクトルを反時計回りに $\pi/2$ 回転させる作用素すると, 式 (3.22) は

$$0 = \int_0^L \dot{T} = \int_0^L \langle \mathcal{J}T, \dot{T} \rangle \mathcal{J}T. \quad (3.23)$$

となる．ここで， $\gamma' = T, T' = \kappa N$ であることに注意すると，

$$0 = \int_0^L \langle \mathcal{J}T, \dot{T} \rangle \mathcal{J}T \quad (3.24)$$

$$= \mathcal{J} \int_0^L \langle \mathcal{J}T, \dot{T} \rangle \gamma' \quad (3.25)$$

$$= \mathcal{J} \left(\left[\langle \mathcal{J}T, \dot{T} \rangle \gamma \right]_0^L - \int_0^L \langle \mathcal{J}T, \dot{T} \rangle' \gamma \right) \quad (3.26)$$

$$= -\mathcal{J} \int_0^L (\langle \mathcal{J}T', \dot{T} \rangle + \langle \mathcal{J}T, \dot{T}' \rangle) \gamma \quad (3.27)$$

$$= -\mathcal{J} \int_0^L \langle \mathcal{J}T, \kappa \dot{N} \rangle \gamma \quad (3.28)$$

$$= -\mathcal{J} \int_0^L (\langle \mathcal{J}T, \dot{\kappa}N \rangle + \langle \mathcal{J}T, \kappa \dot{N} \rangle) \gamma \quad (3.29)$$

$$= -\mathcal{J} \int_0^L \dot{\kappa} \gamma, \quad (3.30)$$

となることがわかる．ここで，式 (3.25) では部分積分の公式により変形している．式 (3.27), (3.29) では， $\langle \mathcal{J}T', \dot{T} \rangle$ は $\langle \mathcal{J}T, \kappa \dot{N} \rangle$ は共に直交することから 0 となることに注意する．以上より，Dirichlet 境界条件は

$$\int_0^L \dot{\kappa} \gamma = 0 \quad (3.31)$$

となる．したがって Dirichlet 境界条件は， $\dot{\kappa}$ と x -座標関数 γ^x ， y -座標関数 γ^y それぞれが L^2 直交することであるとわかる．

以上の制約条件を離散化すると，

$$\langle \dot{\kappa}, \mathbf{1} \rangle = \langle \dot{\kappa}, \gamma^x \rangle = \langle \dot{\kappa}, \gamma^y \rangle = 0 \quad (3.32)$$

とかける．ここで， L^2 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を計算するために，離散曲線に関する質量行列 (mass matrix) を計算する．質量行列とは，各頂点がどの程度全体に影響を及ぼすかを決定する行列であり，離散微分幾何において基本的な量である．離散曲線の場合は，双対辺の長さを対角要素に持つ行列 $B = \text{diag}[L_0, L_1, \dots, L_{n-1}]$ を質量行列とする．このとき， L^2 内積は $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \mathbf{p}^T B \mathbf{q}$ となる．

3.4.4 節で導出した曲率フローにこれらの制約条件を課すためには，曲率の更新ステップ $\delta \hat{\kappa} = -2(\hat{\kappa} - \hat{\kappa}_g)dt$ から，定数ベクトル $\mathbf{1}$ ， x -座標関数 γ^x ， y -座標関数 γ^y と直交する成分のみ求めればよい．これは，Gram-Schmidt の直交化によって行うことができる．

3.4.6 離散曲線の再構成

上記のプロセスに従って得られた各頂点の離散曲率ベクトル $\hat{\kappa} = [\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1, \dots, \hat{\kappa}_{m-1}]$ (ただし， $m = |\bar{P}_s| = |\bar{P}_g|$) から頂点集合 $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{m-1}\}$ を計算し，ポリゴンを再構成す

40 第3章 曲率勾配フローを用いた閉曲線ブレンディング

る。ポリゴンのエッジの長さは、3.4.3節で生成したときの値を用いればよいので、 p_i と p_{i+1} の距離を $l_{i,i+1}$ とする。3.2.2節で述べたように、離散曲率ベクトルは曲線の回転及び並進移動に対して不変であるので、 $p_1 - p_0$ が x 軸と平行でかつ p_0, p_1 間の距離が $l_{0,1}$ となるように p_0, p_1 を固定する。各頂点に対応する外角 $\varphi_i (i = 0, 1, \dots, m-1)$ は、式 (3.5) を用いて、

$$\varphi_i = \hat{\kappa}_i L_i \quad (3.33)$$

となることから、 $p_i (i = 2, 3, \dots, m-1)$ の位置は

$$p_i = p_{i-1} + l_{i-1,i} \left[\cos \left(\sum_{j=1}^{i-1} \varphi_j \right), \sin \left(\sum_{j=1}^{i-1} \varphi_j \right) \right]^T \quad (3.34)$$

にしたがって帰納的に計算できる。

3.4.7 再構成した離散曲線の幾何学的性質

提案手法では、曲率フローの時間離散化によって得られた離散曲率ベクトルの更新ベクトルに対して Gram-Schmidt の直交化による閉曲線条件の適用というプロセスでブレンディングを実現していた。本節では、得られたブレンディング曲線がよじれを生成しないということを示す。よじれとは、Dym らによって報告 [DSL15] されている Sederberg らの手法 [SGWM93] において発生するブレンディングのアーティファクトを指す。(図 3.8, 図 3.12 を参照せよ。) ここでよじれと呼ばれる現象を数学的に解析するために、本論文ではポリゴン上のある頂点における外角の絶対値が、そのスタートポリゴンとゴールポリゴンにおける外角の絶対値を上回ることと定義する。

証明に先立ち、Gram-Schmidt 法による直交化を用いた制約条件の適用に関して以下の補題を示す。

補題 3.4.1. $B_i \in (0, 1) (i = 1, 2, \dots, n)$ を対角要素として持つ行列 $B = \text{diag}[B_0, B_1, \dots, B_n]$ で定義される内積 $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \mathbf{p}^T B \mathbf{q} (\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n)$ を持つ距離空間を考える。また、正規化された制約条件 $\mathbf{c}^m \in \mathbb{R}^n (m = 1, 2, \dots, M)$ を考える。Gram-Schmidt の直交化によってベクトル $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^n$ を $\{\mathbf{c}^m\}_{m=1,2,\dots,M}$ と直交する空間に射影したベクトル $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n]$ は以下の性質を満たす。

$$\hat{v}_i = k_i v_i (k_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.35)$$

■

この補題はすなわち、閉曲線条件を適用した後の更新ベクトルである $\hat{\mathbf{v}}$ の各要素 \hat{v}_i の絶対値は、 v_i の絶対値以下であり、かつ同符号であることを意味する。

以下、この補題に簡単な証明を与える。ある制約ベクトル \mathbf{c}^m について、Gram-Schmidt の直交化を用いてベクトル \mathbf{v} から射影されたベクトル $\hat{\mathbf{v}}^m$ は、

$$\hat{\mathbf{v}}^m = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{c}^m \rangle \mathbf{c}^m \quad (3.36)$$

$$= \mathbf{v} - (\mathbf{v}^T B \mathbf{c}^m) \mathbf{c}^m \quad (3.37)$$

と書けることから,

$$\hat{v}_i^m = v_i - v_i B_i (c_i^m)^2 \quad (3.38)$$

$$= (1 - B_i (c_i^m)^2) v_i \quad (3.39)$$

となる. ここで, 仮定より $0 < B_i < 1$ かつ $0 \leq (c_i^m)^2 \leq 1$ であるので, $0 \leq 1 - B_i (c_i^m)^2 \leq 1$ となり, $|\hat{v}_i^m| \leq |v_i|$ であることがわかる. 他の制約ベクトルについても成立することに注意すると, 全ての制約ベクトルが張る空間についても同様のことが成立するため, $|\hat{v}_i| \leq |v_i|$ が成り立つことがわかる. \square

以上の補題をもとに式 (3.17) で表される時間離散化した曲率フローについて考察する. この曲率フローは頂点ごとに計算できるため, ある頂点 p における曲率 κ^p に注目すると,

$$\kappa_{t=t+dt}^p = \kappa_{t=t}^p - 2(\kappa_{t=t}^p - \kappa_g^p)dt \quad (3.40)$$

と書ける.

スタートポリゴンとゴールポリゴンにおける頂点 p の外角をそれぞれ φ_s^p, φ_g^p とおくと, $\varphi_s, \varphi_g \in (-\pi, \pi)$ である. また, 頂点 p における双対辺の長さを $L^p(>0)$ とおくと, 頂点 p における離散曲率 κ_s^p, κ_g^p は,

$$-\frac{2\pi}{L^p} < \kappa_s^p < \frac{2\pi}{L^p}, \quad -\frac{2\pi}{L^p} < \kappa_g^p < \frac{2\pi}{L^p} \quad (3.41)$$

となる. いま, $\varphi_s^p \leq \varphi_g^p$ と仮定しても一般性を失わない. 式 (3.40) において $t=0$ のとき,

$$\kappa_{t=dt}^p = \kappa_s^p - 2(\kappa_s^p - \kappa_g^p)dt \quad (3.42)$$

$$\kappa_{t=dt}^p - \kappa_s^p = -2(\kappa_s^p - \kappa_g^p)dt \quad (3.43)$$

となることに注意すると, 仮定より $\kappa_s^p - \kappa_g^p \leq 0$, $dt > 0$ であるため, $\kappa_{t=dt}^p - \kappa_s^p \geq 0$ であることがわかる. こうして計算された更新ベクトル $\delta_{t=dt}^p = \kappa_{t=dt}^p - \kappa_s^p$ に対して, Gram-Schmidt による直交化を用いて閉曲線条件を適用することを考える. いま, 質量行列 B は補題 3.4.1 の仮定を満たすことに注意すると, 更新ベクトル $\delta_{t=dt}^p$ に対して閉曲線条件を適用して得られるベクトル $\hat{\delta}_{t=dt}^p$ は, $0 \leq \hat{\delta}_{t=dt}^p \leq \delta_{t=dt}^p$ を満たすことがわかる.

同様の事実が任意の時刻において成立することを帰納法によって示すことができる. 以上より, 曲率フローによって計算された更新ベクトルに閉曲線条件を適用して得られたベクトルの各要素 κ^p はブレンディングを通して $\min(\kappa_s^p, \kappa_g^p) \leq \kappa^p \leq \max(\kappa_s^p, \kappa_g^p)$ の範囲で広義単調な変化をすることがわかる. また同時に $-2\pi/L^p \leq \kappa^p \leq 2\pi/L^p$ であることから, $\min(\varphi_s^p, \varphi_g^p) \leq \varphi^p \leq \max(\varphi_s^p, \varphi_g^p)$ を満たすことがわかる. 以上より, 提案手法ではよじれが生成されないことが確認できた.

3.5 評価

提案する曲率フローに基づく閉曲線ブレンディング手法の有効性を確認するために, 3.4 章で述べた提案手法と関連手法によって実験を行った.

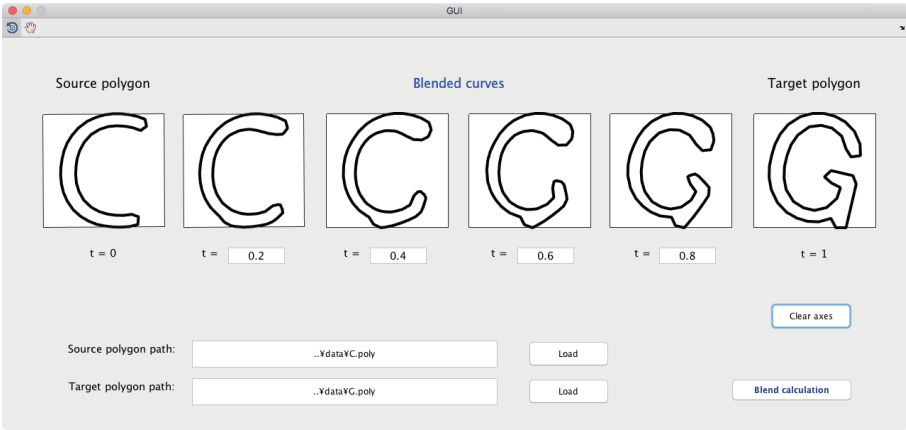


図 3.5. グラフィカルユーザインタフェース

実験で使用したスタートポリゴン，ゴールポリゴンの頂点数は 3.1 の通りである．提案手法におけるタイムステップは $dt = 0.01$ とし，合計 400 ステップ行った．なお，実験では 2.6GHz Intel Core i7 を搭載する MacBook Pro (Retina, Mid2012) を使い，提案手法，比較手法ともに MATLAB で実装した．図 3.5 は，提案手法を実装したグラフィカルユーザインタフェースである．

また，提案手法の定量評価を行うために，提案手法並びに関連研究で得られたブレンディング結果に対してクラウドソーシングを用いた主観品質評価実験を行った．クラウドソーシングのプラットフォームとして，Amazon Mechanical Turk (MTurk)[Ama] を使い，MTurk 上でヒューマンインテリジェントタスク (HIT) を掲載して実験参加者を募った．また，オンラインサーベイのプラットフォームとして，SurveyMonkey[Sur] を用いた．

主観品質評価実験では，2.7.2 節で議論したように一対比較法を用いた．順序効果にも配慮し，各設問中で提示するアニメーションの順番は各参加者ごとにランダムとし，設問の順番もランダムに提示した．参加者は各設問に対して 2 つのアニメーションを提示され，そのうち好ましいと思う方と回答するという形式を取った．また，各アニメーションでは 19 個の中割りフレームを含む 21 フレームから生成したブレンディング結果をスロー再生 (6[fps]) し，3 回連続して提示することにより全体で約 11 秒のアニメーションを見せた．なおここで，アニメーションの時間については ITU-T 勧告 P.910[ITUb] に基づいて，全体で約 10 秒となるように設計した．一対比較法を用いた主観品質評価実験における参加者数については，同じく 2.7.2 節で議論したように本実験でも 50 人とした．また，不誠実な参加者による影響を極力

表 3.1. ポリゴンの頂点数

	実験 1	実験 2	実験 3	実験 4
Start polygon	50	50	220	90
Goal polygon	50	50	105	144

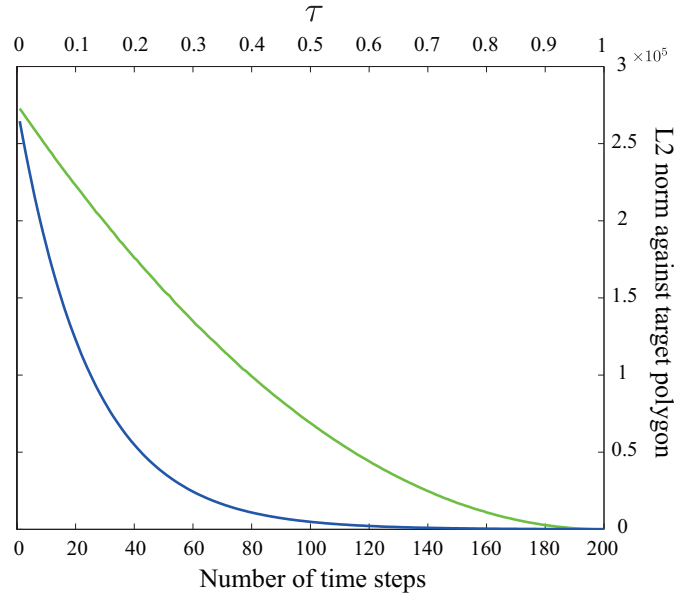


図 3.6. ポリゴンとゴールポリゴンとの L^2 ノルムの収束性の違い. 緑の線が Saba らによって提案された手法によるもの [SSHS14] で, 青の線が提案手法によるもの.

排除するため, MTurk 上で Master と呼ばれる信頼度の高いユーザ 50 人を対象として実験を行い, 49 人分の有効参加者を得た. 参加者には実験参加の対価として 2.0 米ドルの報酬を支払った.

3.5.1 ブレンディング結果

提案手法の有効性を確認するために, 「チョコキ」から「パー」に遷移する閉曲線ブレンディング (実験 1), 「ネズミ」から「コウモリ」に遷移する閉曲線ブレンディング (実験 2), 「箒に乗る少女」から「コウモリ」に遷移する閉曲線ブレンディング (実験 3) と回転数が 0 同士の閉曲線ブレンディング (実験 4) を行った. 図 3.8, 図 3.9, 図 3.10, 図 3.11 は, その結果を示した図である.

比較対象として用いたのは, 3.3 章で述べた頂点位置の線形補間による手法, Sederberg らによって提案された手法 [SGWM93], Saba らによって提案された手法 [SSHS14] と Dym らによって提案された手法 [DSL15] である. Saba らの手法における非線形最適化ソルバーは Matlab の `fmincon` を用い, 内点法により非線形最適化問題を解いた. ここで, 関数評価の最大回数のパラメータを 10,000 とした. これらの比較手法は, スタートポリゴンとゴールポリゴンの頂点位置や離散曲率等をパラメータ $\tau \in [0, 1]$ を用いて線形補間して再構成したものを理想的なポリゴンとしているが, 提案手法ではパラメータ τ に相当するものが存在しない上に, ゴールポリゴンへ向かう速度が異なる.

そこでまず, 提案手法による閉曲線ブレンディングにおける曲率エネルギーの収束速度について議論する. すなわち, 任意の時刻 $t > 0$ における離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}(t)$ とゴールポリゴ

44 第3章 曲率勾配フローを用いた閉曲線ブレンディング

ンの離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}_g$ のユークリッドノルムの2乗を導出する.

提案手法で用いる曲率フローは

$$\dot{\hat{\kappa}} = -2(\hat{\kappa} - \hat{\kappa}_g) \quad (3.44)$$

であるので, 曲率フローの初期条件 $\hat{\kappa}(0) = \hat{\kappa}_s$ の下, この微分方程式を解くと

$$\hat{\kappa}(t) = \hat{\kappa}_s e^{-2t} + (1 - e^{-2t})\hat{\kappa}_g \quad (3.45)$$

となる. よって, ゴールポリゴンとのユークリッドノルムの2乗は

$$\|\hat{\kappa}(t) - \hat{\kappa}_g\|^2 = (\hat{\kappa}_s - \hat{\kappa}_g)^2 e^{-4t} \quad (3.46)$$

となることから, 指数関数的に減少することがわかる.

一方で, スタートポリゴンとゴールポリゴンの離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}_s, \hat{\kappa}_g$ の線形補間により求めた離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}(\tau)$ ($\tau \in [0, 1]$) は,

$$\hat{\kappa}(\tau) = (1 - \tau)\hat{\kappa}_s + \tau\hat{\kappa}_g \quad (3.47)$$

与えられることから, ゴールポリゴンとのユークリッドノルムの2乗は

$$\|\hat{\kappa}(\tau) - \hat{\kappa}_g\|^2 = (1 - \tau)^2 (\hat{\kappa}_s - \hat{\kappa}_g)^2 \quad (3.48)$$

となり, 2次関数的に減少することがわかる.

図3.6に示すのは, 実験1において, ゴールポリゴンとの L^2 ノルムの2乗を手法ごとにプロットしたものである. この結果からも, 提案手法と比較手法において収束性が異なることがわかる.

このため, 比較を行うために, 提案手法によって求めたブレンディング曲線の中から, これらの線形補間をベースにした手法に対応するブレンディング曲線を求める必要がある. そこで, スタートポリゴンの離散曲率 $\hat{\kappa}_s$ とゴールポリゴンの離散曲率 $\hat{\kappa}_g$ を線形補間して求めた値 $(1 - \tau)\hat{\kappa}_s + \tau\hat{\kappa}_g$ に対して, 提案手法によって生成されたポリゴンのなかから離散曲率ベクトルのユークリッド距離が最も近いものを選択した. このようにして選択されたポリゴンは, パラメトリック距離^{*1}の意味で近いことが示されている [SSHS14]. また, 生成したいポリゴン数の約5~10倍以上のブレンディング曲線をあらかじめ生成することで, 十分近いものが選択できることを実験的に確認した.

頂点位置の線形補間によるブレンディング結果は, 実験1, 2では良好であったが, 他の実験では潰れた形状が生成された他, 部分的に縮退することが確認できた. これは, 曲線の頂点位置が外在的な量であるため, 2次元平面上にどのように埋め込まれているかといったことに強く影響を受けることが原因であると考えられる. また Sederberg らの手法では Dym らのによって指摘されているとおり [DSL15], 実験1や実験2においてブレンディング中によじれ

^{*1} パラメトリック距離とは, 弧長パラメータで表現された2つの曲線 $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$ に対して, $d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{s \in [0, 1]} \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\|$ として定義される距離である.

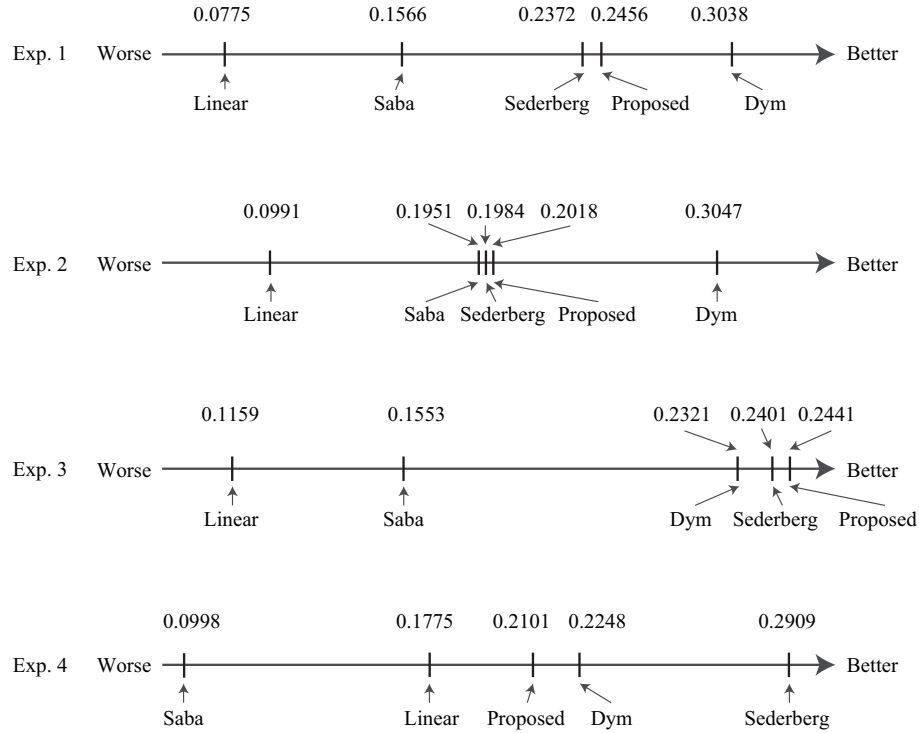


図 3.7. 核実験において、頂点位置の線形補間 (Linear), Sederberg らによる手法 (Sederberg), Saba らによる手法 (Saba), Dym らによる手法 (Dym), 提案手法 (Proposed) を比較する主観品質評価実験を行って得られた間隔尺度 (評価スコア)。

(kink) (図 3.8 と図 3.9 における Sederberg の結果の $\tau = 3/6$) と呼ばれる、部分的に縮退する現象が発生することを確認した。詳細を確認するために、実験 1 において Sederberg らによる手法を用いて得たブレンディング (時刻 $t = 1/2$) を拡大したものが図 3.12 である。一方で Saba らの手法では、最適化計算が収束していないため、実験 3 の $\tau = 5/6$ や実験 4 において閉じた曲線の生成に失敗していることが確認できた。また、提案手法は Dym らの手法と比較して遜色ない自然なブレンディング曲線が生成できていることが確認できた。

また、ブレンディング結果の審美性を評価するために、クラウドソーシングを用いた主観品質評価実験を行った。すなわち、各手法で生成されたブレンディング結果に対して、オンラインサーベイによる一対比較実験を行った。この主観品質評価実験の結果得られた一対比較表を表 3.2 に示す。また、得られた一対比較表を、2.7.2 節で述べた Thurstone の比較判断の法則に基づいて間隔尺度に変換した結果が図 3.7 である。これらの結果から、提案手法は頂点位置の線形補間や Saba らによる手法により得られたブレンディングよりも、全体的に好ましい結果が得られていることが確認できる。また、提案手法と Sederberg らによる結果を比べると、概ね提案手法のほうが良いとする傾向にあるが、入力となる閉曲線対によっては Sederberg らによる手法のほうが好ましいとする結果が得られた。さらに、提案手法と Dym らによる結果を比較すると、概ね Dym らによる手法のほうが好ましいとする結果が得られたが、入力となる閉曲線対によっては提案手法のほうが好ましいとする結果が得られた。

表 3.2. 頂点位置の線形補間 (Linear), Sederberg らによる手法 (Sederberg), Saba らによる手法 (Saba), Dym らによる手法 (Dym), 提案手法 (Proposed) を比較する主観品質評価実験を行って得られた一対比較表. 評価対象 i のほうが評価対象 j よりも優れていると答えた人数を (i, j) に示す.

Exp. 1		j				
		Linear	Sederberg	Saba	Dym	Proposed
i	Linear	–	16	35	16	21
	Sederberg	33	–	37	21	21
	Saba	14	12	–	10	14
	Dym	33	28	39	–	26
	Proposed	28	28	35	23	–

Exp. 2		j				
		Linear	Sederberg	Saba	Dym	Proposed
i	Linear	–	15	17	16	13
	Sederberg	34	–	26	17	24
	Saba	32	23	–	19	26
	Dym	33	32	30	–	31
	Proposed	36	25	23	18	–

Exp. 3		j				
		Linear	Sederberg	Saba	Dym	Proposed
i	Linear	–	17	22	16	14
	Sederberg	32	–	33	23	24
	Saba	27	16	–	23	20
	Dym	33	26	26	–	25
	Proposed	35	25	29	24	–

Exp. 4		j				
		Linear	Sederberg	Saba	Dym	Proposed
i	Linear	–	19	33	26	16
	Sederberg	30	–	35	26	29
	Saba	16	14	–	15	16
	Dym	23	20	34	–	31
	Proposed	33	20	33	18	–

3.5.2 ブレンディングに関する誤差評価

ブレンディング結果を定量的に評価するために、Saba らによる手法と Dym らによる手法がともに、「スタートポリゴンとゴールポリゴンに関する外角や辺長といった幾何量を線形補間して得た値から再構成したポリゴンが必ずしも閉じないため、最適化等の処理を行うことで閉じたブレンディング曲線を計算する」というプロセスを経ている点に着目する。この閉じる操作の際に、外角と辺長がそれぞれの手法が採用している理想的な量からどの程度ずれているかを、全ての頂点に渡って平均値を計算することで評価した。

この評価方法を実験 1 のデータセットに対して行ったものが、図 3.13 と図 3.14 である。ここで提案手法では、タイムステップ dt を $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ としてそれぞれ実験を行った。また、外角は理想値との絶対的な誤差、辺長は理想値との相対的な誤差を評価した。なお、Saba らの手法や Dym らの手法は、理想的なポリゴンを線形補間によって計算しているが、提案手法では曲率フローによって計算される曲率によって計算しているため、手法によってブレンディングの時間軸が異なることに注意する。

この結果から、提案手法では外角の誤差が最大で 0.2 [rad] 以下であるのに対し、辺長の誤差は $dt = 10^{-2}$ のときで 0.2 [%] 以下となり、 dt に比例して小さくなることがわかった。一方で、Dym らの手法では辺長を調整して閉じるため、外角の誤差は 0 [rad] であるが、辺長の誤差は最大で 20 [%] 程度となることがわかった。また、Saba らの手法では外角を調整する手法であるので、辺長の誤差は 0.02 [%] 以下に抑えられているが、外角の誤差は提案手法と同様に最大で 0.2 [rad] 以下の誤差が生じた。しかし、辺長・外角の誤差がともに時間に関して連続ではないことから、時間に関して滑らかなブレンディングが生成できていないことが確認できる。これらのことから、提案手法は関連手法と比較して遜色ない自然なブレンディングが実現できる事が確認できた。

3.5.3 ブレンディングに要した計算時間

実験 1 において、1 つのブレンディング曲線を生成するのに要した計算時間の平均を、提案手法と比較手法それぞれで計測した結果を表 3.3 に示す。この結果から提案手法は、非常に高速にブレンディング曲線が計算でき、リアルタイムな曲線ブレンディングを可能にする手法であることがわかる。

また前節で述べたように、提案手法と関連手法ではブレンディング曲線群を求める手順が異なるため、時間的に等間隔な合計 10 個のブレンディング曲線を生成するのに要する

表 3.3. 1 つのブレンディング曲線の生成に要した平均計算時間 [秒]

Sederberg,1993[SGWM93]	Saba,2014[SSHS14]	Dym,2015[DSL15]	Proposed
2.405×10^{-3} [s]	1.732 [s]	0.3276 [s]	7.259×10^{-4} [s]

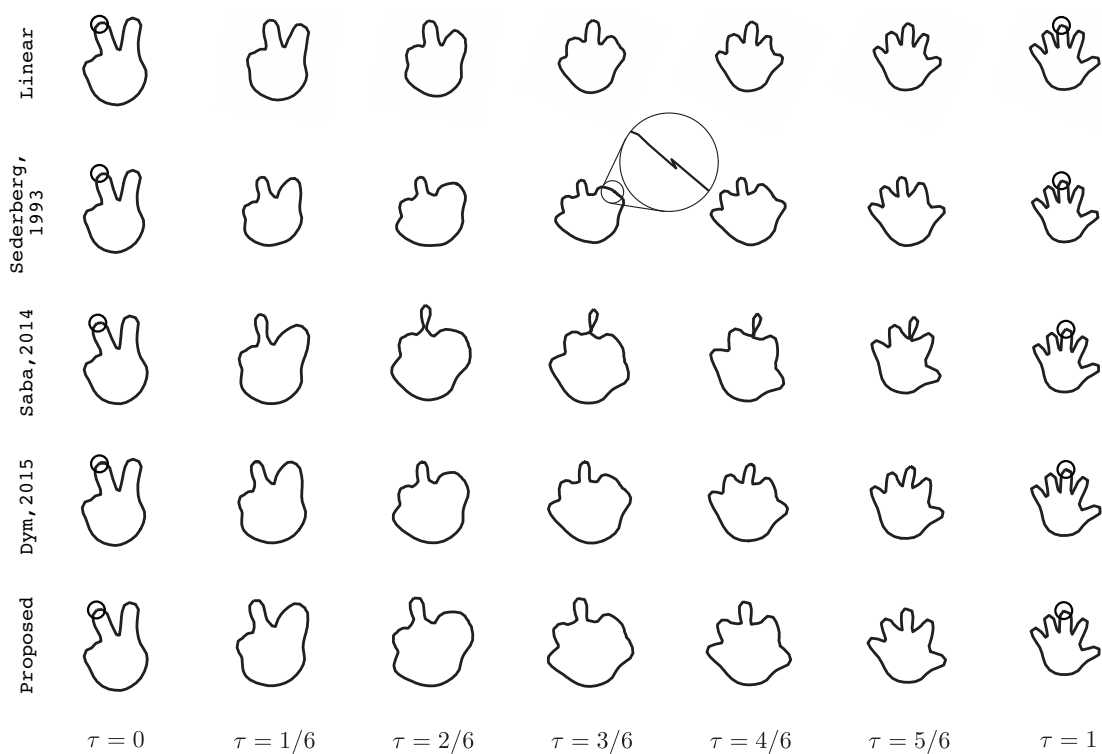


図 3.8. 実験 1 におけるブレンディング結果 (「チョキ」から「パー」). ただし, 入力ポリゴン対で対応させた頂点を円で示した.



図 3.9. 実験 2 におけるブレンディング結果 (「ネズミ」から「コウモリ」). ただし, 入力ポリゴン対で対応させた頂点を円で示した.

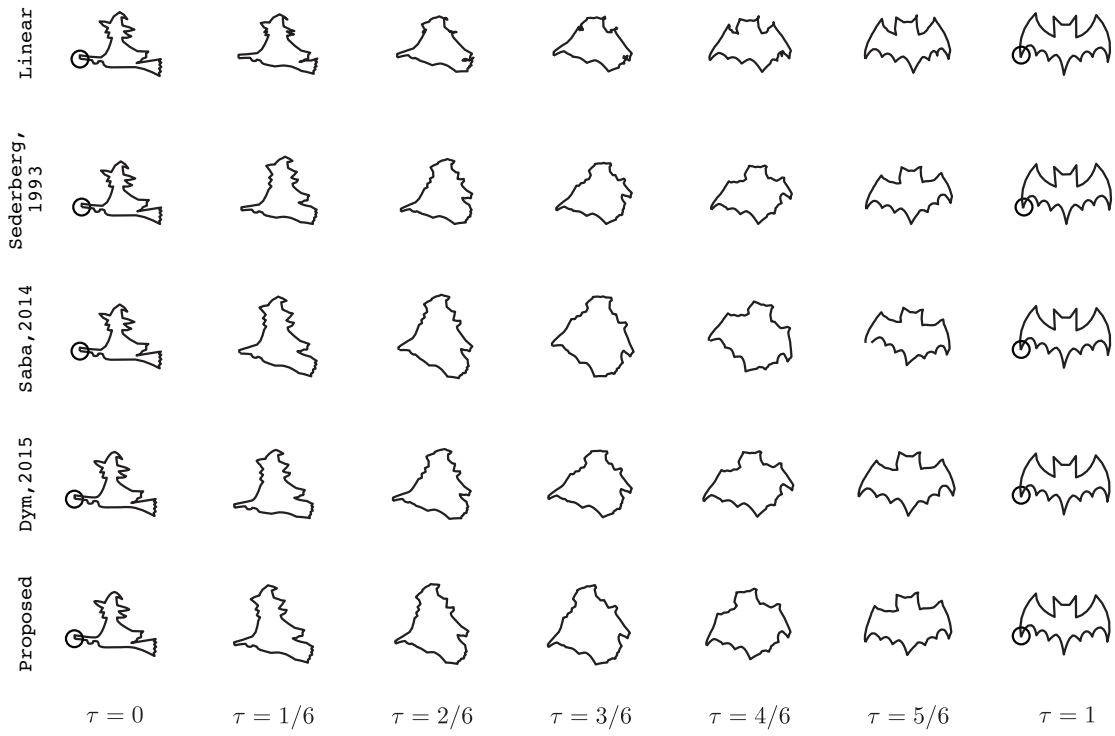


図 3.10. 実験 3 におけるブレンディング結果（「箒に乗る少女」から「コウモリ」）。ただし，入力ポリゴン対で対応させた頂点を円で示した。

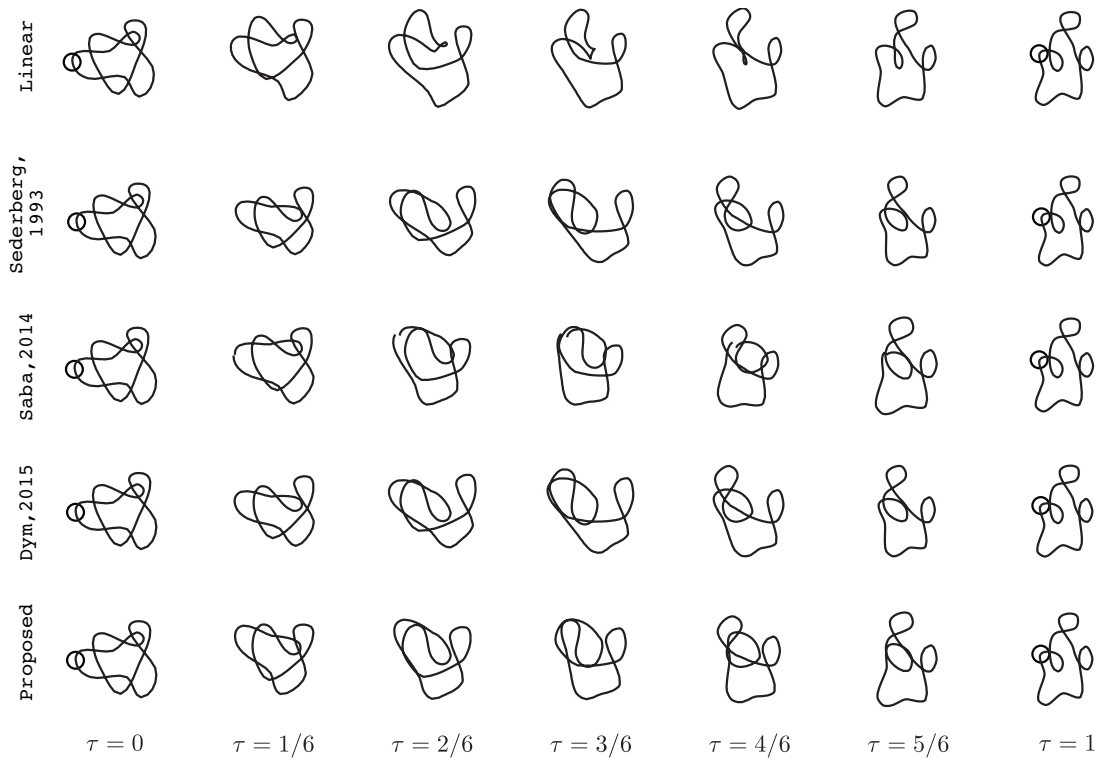


図 3.11. 実験 4 におけるブレンディング結果（回転数が 0 同士の曲線）。ただし，入力ポリゴン対で対応させた頂点を円で示した。

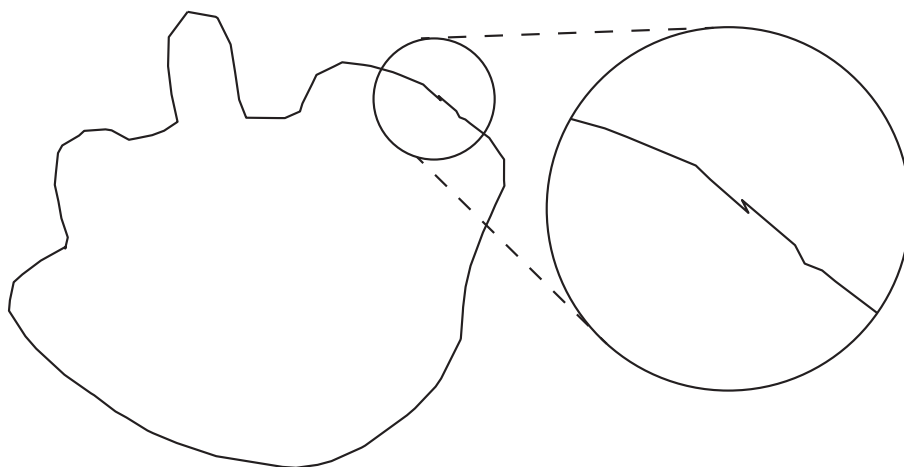


図 3.12. Sederberg らの手法 [SGWM93] において生じうるよじれ

合計時間を比較した。比較手法では、最適化手法により各ブレンディング曲線をそれぞれ計算するため、10 個のブレンディング曲線を直接計算するものであるが、提案手法ではあらかじめ大量に計算したブレンディング曲線から、求めたいブレンディング曲線を抽出する。本実験では、400 個のブレンディング曲線から 10 個のブレンディング曲線を抽出したため、 $7.259 \times 10^{-4} \times 400 = 0.2904$ [s] 要したのに対し、Sederberg らの手法では $2.405 \times 10^{-3} \times 10 = 0.024$ [s]、Saba らの手法では約 $1.732 \times 10 = 17.32$ [s]、Dym らの手法では約 $0.3276 \times 10 = 3.276$ [s] 要した。このことから、Sederberg らの手法に比べて低速であるものの、提案手法は Saba らの手法や Dym らの手法と比べて高速であることがわかる。

3.6 考察

提案手法と関連手法によって得られたブレンディング曲線群に対して、定性的に確認できる現象や主観品質評価実験によって得られた審美性に関する評価、ブレンディングに要した計算時間をあわせて考察する。全体的に頂点位置の線形補間によって得られるブレンディングの審美性が低いと評価されているのは、ブレンディング中に潰れた形状が生成されているためであると考えられる。また、実験 3, 実験 4 において Saba らによる手法のブレンディング結果の審美性が低いと評価されているのは、補間する対象とした曲線が閉じているにも関わらず、補間形状が閉じていないためであると考えられる。Sederberg らによる手法では提案手法よりも高速に計算できる一方で、ブレンディング中によじれが発生することが確認できるため、このようなアーティファクトを望まない場合に提案手法が有効であると考えられる。また、Dym らによる手法は、全体的に提案手法よりも好ましいとする結果が主観品質評価実験によって得られたものの、提案手法のほうが高速に計算できるという特徴をもち、インタラクティブな計算が要求されるような場面では、提案手法が有効であると考えられる。

また、提案手法には幾つかの制限事項がある。提案手法ではブレンディング曲線の C^1 連続性を持たせるために Neumann 境界条件 (接線連続性) を用いたが、閉曲線対が異なる回転数を

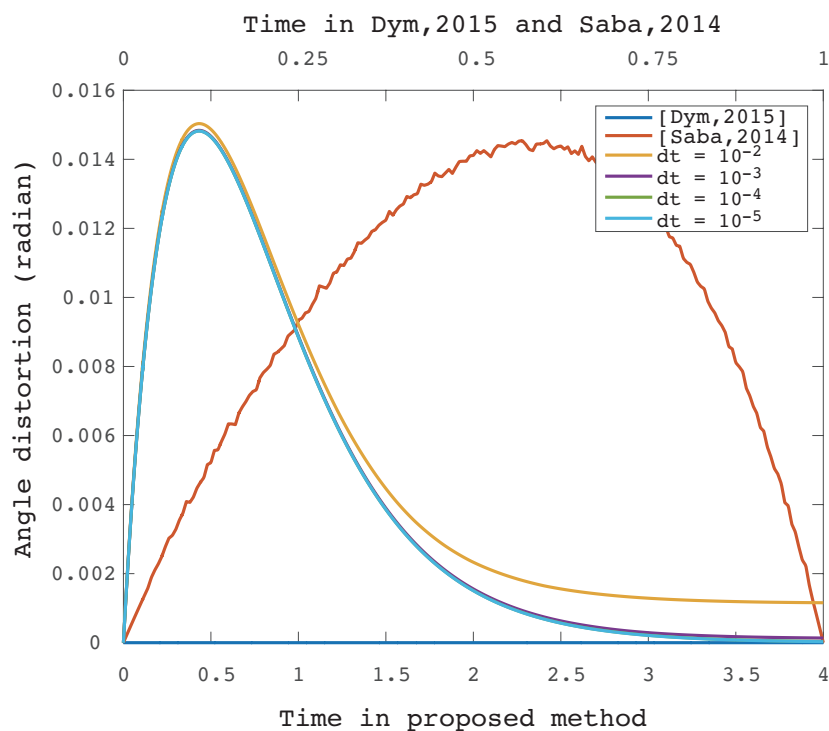


図 3.13. 理想的なポリゴンと計算したポリゴンの外角の誤差

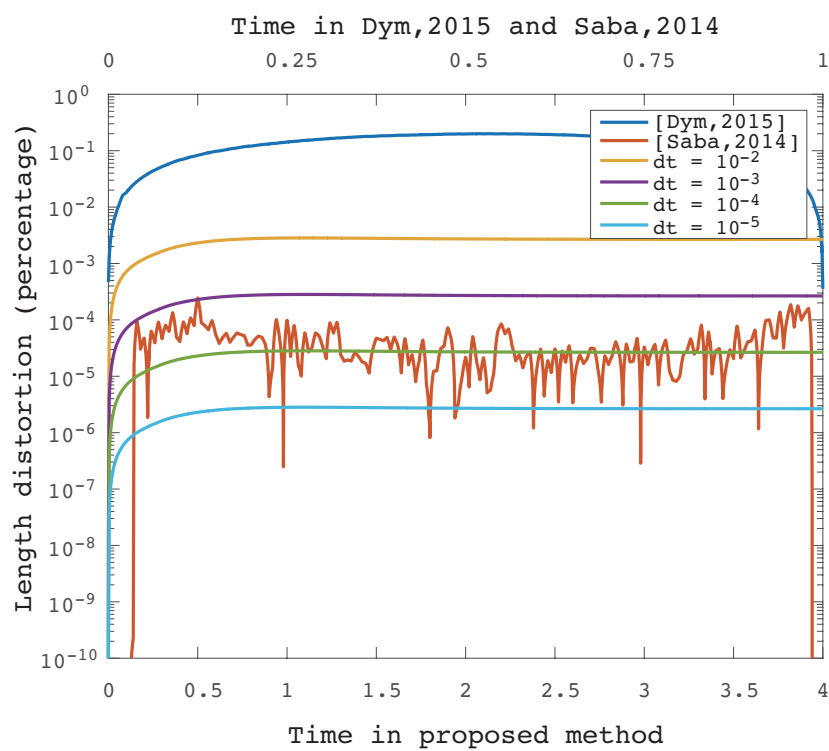


図 3.14. 理想的なポリゴンと計算したポリゴンの辺長の誤差

持つ場合、曲率の積分が一定とならず式 (3.20) が常に成立するとは限らないため、Neumann 境界条件が適用できないという問題点がある。Whitney-Graustein の定理 [Whi37] によれば、異なる回転数を持つ閉曲線間の正則なホモトピーは存在しないため、少なくとも 1 点は停留点 (接ベクトルの大きさが 0 となる点) が存在することから、 C^1 連続なブレンディングを行う事は不可能であると考えられる。しかし、回転数が変化する瞬間以外では Neumann 境界条件を満たしたブレンディングが可能であると考えられるため、さらなる改善が期待できる。なお、これらの問題は次章において解決される。

また本論文で提案した曲率フローは、エッジ長がブレンディング中で一定である Isometric な変形を記述するものであるため、ユーザーがあらかじめ指定したスタートポリゴンとゴールポリゴンの対応点を用いてブレンディングを行うことは困難である。このような場合に対処するためには、ブレンディング中にエッジ長が一定の速度で変化するという条件のもとで、曲率フローと閉曲線条件の定式化を行うなどさらなる拡張が必要となるため、今後の課題としたい。

3.7 本章のまとめ

本論文では、平面上の閉曲線間の遷移を記述する閉曲線ブレンディングに対して、曲率フローに基づく手法を提案した。曲率エネルギーを、離散曲率ベクトルの差の 2 乗として定式化し、その L^2 内積に関する勾配を考えることにより、曲率フローが線型かつ、曲率のみに依存する形式で記述できることを利用し、数値的に安定なブレンディングを達成した。また、提案手法は従来の非線形最適化問題に帰着させて解く手法に比べて、高速性と審美性を両立する手法であることを、ブレンディング結果の定性的な評価やクラウドソーシングによる主観品質評価実験を行い確認した。この手法は、CG などの分野でリアルタイムな処理が要求される場面においても活用することができる。

今後の課題としては、曲率フローの安定領域が大きいことを利用して、必要なブレンディング曲線のみを計算するようにタイムステップを適応的に変化させることで、さらなる計算時間の圧縮をすることがあげられる。また、提案手法を 3 次元に拡張し、閉曲面間のブレンディング手法を新たに開発することもあげられる。

第 4 章

曲率拡散フローを用いた閉曲線ブレンディング

本章では，前章で提案した曲率勾配フローを用いた閉曲線ブレンディング手法を元に，異なる回転数を持つ閉曲線対のブレンディングにも応用できるように拡張する手法を提案する．これまでの研究では，異なる回転数を持つ場合においてブレンディング中に尖点と呼ばれる外角が π または $-\pi$ となる点が生成されることが原因で，角張ったブレンディングポリゴンが生成されていたが，曲率拡散フローを導入することにより，尖点における外角の急峻な変化を拡散させることで滑らかなブレンディングを実現する．

また，曲率勾配フローを用いた閉曲線ブレンディングでは，比較手法に比べて非常に高速にブレンディングが可能となることが示されたが，これは曲率フロー並びに閉曲線条件が共に線形に記述できることに起因していた．このため，異なる回転数を持つ閉曲線対に対しても曲率フローが線形となるようにデザインすることで，図 4.1 に示すような閉曲線ブレンディングを高速に計算する手法を提案する．

さらに同じ回転数を持つ曲線対に対しても，時刻によって適応的に曲率フローを構成することで，無駄なブレンディングポリゴンの生成を大幅に抑える手法を提案する．

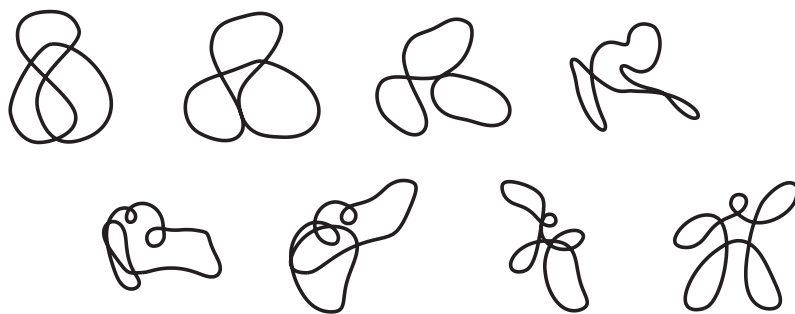


図 4.1. 異なる回転数を持つ閉曲線のブレンディング

4.1 はじめに

前章では、閉曲線対の間のなめらかな遷移を求める閉曲線ブレンディング問題を、曲率を変数とする発展方程式である曲率フローとして記述することで自然なブレンディング形状を非常に高速に計算する手法を提案した。入力として与えられた閉曲線をそれぞれスタートとゴールとするような、適切な曲率フローをデザインすることにより実現できたものであった。

しかし、一般に形状のフェアリングにおいて用いられるように、2次の曲率エネルギーの勾配を取ることで得られるフローを用いていたため、各時刻における曲率の変化率が異なってしまう、時間に関して非対称なブレンディングを生成してしまうという問題点があった。これを解消するために、十分小さいタイムステップを用いて予め計算したブレンディングポリゴンの中から、求めたい時刻に相当するものを選択するという方法を示したが、1対のポリゴンのブレンディングを計算するために400個程度のポリゴンを事前に計算する必要があるなど無駄の多いものであった。そこで本章では、各時刻においてフローにより計算される更新ベクトルがなるべく一定となるように、適応的にフローをデザインすることで、時間に関する非対称性を解消すると同時に、無駄なポリゴンの生成を抑える手法を提案する。

また、生成したブレンディングポリゴンが G^1 連続性を獲得するために、閉曲線条件として Neumann 条件を導入した。しかし、この導入により、回転数と呼ばれる閉曲線を類別する整数が異なる閉曲線同士のブレンディングが行えないという問題点があった。この問題は、回転数が異なる閉曲線対の間で正則ホモトピー（常に至る所微分可能）となる写像は存在しないという定理が示すとおり、完全に解決することは難しい問題であると考えられる。また、回転数が異なる場合には、尖点と呼ばれる外角が π となる点が必ず生成されてしまう。この影響により、外角や曲率の線形補間をベースとした従来のブレンディング手法では、尖点となる頂点における外角の変化速度がその他の頂点における外角の変化速度よりも急峻であるため、入力となる閉曲線対において尖点となる頂点付近が滑らかであったとしても、その点においてブレンディング中常に角張った点が生成されてしまい、ブレンディング曲線の審美性に悪影響を及ぼす。

このように回転数が異なる場合では、尖点においてその他の点における曲率の変化度合いから著しく乖離するため、前章で示したようにすべての点において変化度合いが一致するべきであるという設計指針が満たされない。こうした状況が審美性に悪影響をおよぼすことから、回転数が異なる場合において固有のブレンディング曲線の設計指針を示す必要がある。そこで、尖点一点のみにおいて著しい乖離を持つのではなく、近傍領域で少しずつ乖離する、すなわち曲率を拡散させるということが審美性の向上に寄与するのではないかという仮説を立てる。こうした拡散を実現する手法として、本研究では曲率拡散フロー [HPP05] を導入する。

閉曲線間の滑らかな形状の遷移を生成することは、ジオメトリ処理の中だけではなく、純粋な数学の問題としても研究者の興味を惹きつけてきた。Vegter[Veg89] や Mehlhorn[MY91] らは、Whitney–Graustein の定理がポリゴンに対しても成立することを示し、同時にその間の正則ホモトピーとなる写像を構成する手法を提案した。しかし、これらの手法は複雑であ

り、計算された遷移が正則であることが必ずしも自然なブレンディングとはならない。また Dym ら [DSL15] は、同じ回転数を持つ閉曲線対を対象として、閉曲線ブレンディング問題を二次錐計画問題として定式化し、正則ホモトピーなブレンディング曲線が生成できることを数学的に証明した。

また、滑らかな形状の生成は、ジオメトリ処理においてスムージング (smoothing) として体系化されている。スムージングは、高周波ノイズを含む形状を平滑化するデノイジング (denoising) と、平滑化の結果得られる極限曲面を求めるフェアリング (fairing) に大別することができる。今回対象とするブレンディング中に尖点付近で生成される角張った点の抑制には、デノイジングが有効であると考えられる。デノイジングにおいてよく用いられる手法の一つに、Laplace–Beltrami 作用素の固有関数を正規直交基底関数として Fourier 変換の要領で高周波成分を除去する方法 [VL08] があるが、計算負荷が高く高速なブレンディング手法には不向きであると考えられる。そこで、本手法では拡散フロー (diffusion flow) を用いた手法に着目する。拡散フローは、変数 \mathbf{x} と時刻 t を用いて表される拡散方程式 $\partial f(\mathbf{x}, t)/\partial t = \lambda \Delta f(\mathbf{x}, t)$ によってモデリングされる。最も基本的な拡散フローは、変数 \mathbf{x} を形状の位置 f として計算される平均曲率フロー $\Delta f = -2H\mathbf{n}$ (ただし、 H は平均曲率、 \mathbf{n} は法線ベクトル) であるが、形状によっては尖った特異点を生成してしまうことが知られている。また、更に高階の Laplacian を用いたフロー $\partial f/\partial t = \lambda \Delta^k f$ も提案されている。 $k=2$ としたときに得られるフローは、Bi-Laplacian フローと呼ばれ、そのローパスフィルタとしての性質の良さからジオメトリ処理においてよく用いられている [DMSB99] が、Laplacian 自体が曲線 f の非線形関数であることから、数値的に計算するためにはタイムステップを離散化した際の最小エッジ長によって決定される値以下にしなければならないという制約がある [PTBF07]。

これらの拡散フローは、曲線の位置 f を変数としていることにより生じるものである。一方で、第3章では曲率を変数とするフローによって、曲率フローと閉曲線条件が線形に書き下せることを用いてブレンディングを高速に計算できる手法を提案した。そこで、本章でも曲率を変数とした曲率拡散フローを用いることで高速性を犠牲にせずにブレンディングを実現する。

提案手法では、ブレンディング中に外角が π または $-\pi$ となる尖点と呼ばれる点を含むポリゴンが必ず存在することを逆に利用する。すなわち、尖点における外角が π と $-\pi$ のどちらとみなしても表現している形状は同一であるため、2通りの回転数の解釈が可能であることに着目する。尖点を含むポリゴンの前後で G^1 連続性を持ち、かつ尖点の影響による曲率の乖離を近傍領域に拡散させる効果を持つ曲率拡散フローを導入することで、回転数が異なる場合においても尖点において滑らかなブレンディングを行う手法を提案する。また、本章で提案する曲率拡散フローを導入した曲率フローも線形であるため、高速に計算する事が可能である。

提案手法の有効性を検証するために、近年提案された閉曲線ブレンディング手法とクラウドソーシングを用いた主観品質評価実験による比較を行った。その結果、回転数が同じ場合については関連手法と比肩する良好な結果が得られ、回転数が異なる場合については比較手法を上回る結果が得られた。また関連手法と比較しても、非常に高速なブレンディングが達成されたことを確認した。

本章に関する貢献は以下のようにまとめられる。

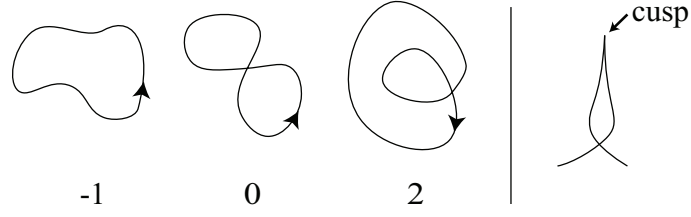


図 4.2. Turning numbers and cusp.

- 回転数が同じ場合に、時刻に応じて変化する曲率フローを用いることで、時間に関して対称でありかつ高速なブレンディング手法を提案した。
- 回転数が異なる場合に生じる尖点の影響を最小化するため、曲率拡散フローを導入し、双方向性のフローを構成することで尖点付近でもなめらかなブレンディングを実現した。
- 主観品質評価実験を通して、回転数が同じ場合には関連手法と比肩し、回転数が異なる場合には関連手法を上回る審美性を持つ高速なブレンディング手法であることを示した。

4.2 準備

4.2.1 回転数

\mathbb{R}^2 上で定義された C^2 -級の曲線 $\gamma(s) : I = [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える。ここで、 s を弧長パラメータ、 L を曲線の全長とする。また、 $e_t(s)$ を曲線上の任意の点における接ベクトルとし、 e_t に対して反時計回りに回転させた単位ベクトル（法ベクトル）を $e_p(s)$ とする。 $\gamma(s)$ に対して曲率関数 $\kappa(s)$ を以下のように定義する：

$$e'_t = \kappa(s)e_p. \quad (4.1)$$

ここで、 $e'_t = |de_t/ds|$ である。

閉曲線に対して、曲率関数を弧長パラメータで積分した値は、 2π の整数倍になることが知られている。すなわち、

$$\int_0^L \kappa(s)ds = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (4.2)$$

となる。ここで、 m は閉曲線 $\gamma(s)$ の回転数と呼ばれ、閉曲線を類別する値であることが知られている。直感的な理解としては、 s が 0 から L まで動いたときに法ベクトル $e_p(s)$ が円周上で回った回数を表す量として捉えることができる。

図 4.2 は、いくつかの閉曲線の回転数を示したものである。ここで、閉曲線のパラメトリゼーションの方向によって負の値を取りうることに注意する。一般に閉曲線ブレンディングでは、Dym らがホモトピックなブレンディング手法を提案している [DSL15] ように、尖点

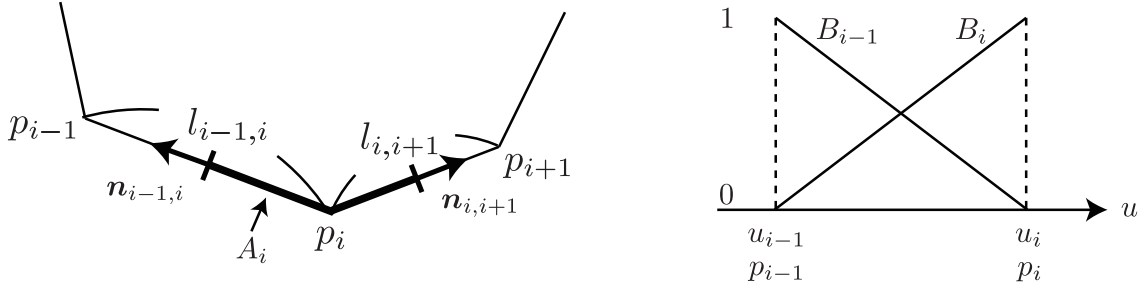


図 4.3. 基底関数.

(cusp) を持たないような補間形状を生成することが望ましい．尖点とは，図 4.2 に示すように，外角が π または $-\pi$ となる点と定義する．しかし，Whitney–Graustein の定理 [Whi37] として知られるように，回転数が異なる場合では，その曲線対の間の正則ホモトピーとなる（尖点を生じない）写像を構成することができないことが数学的に示されている．この事実が回転数が異なる場合のブレンディングを困難にしている．

4.2.2 曲率拡散フロー

閉曲線ブレンディングは入力として与えられた 1 対の閉曲線の間の連続な変形を計算する問題として捉えることができる．ここで曲線を曲率関数として表現し，曲率関数を変数として持つ偏微分方程式

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = f(\kappa) \quad (4.3)$$

を考えることで，閉曲線間の連続な変形を記述することを提案していた．ここで，関数 f を変更することで様々な性質を持つブレンディングをデザインする．前章では， $f(\kappa) = -\nabla(\int \kappa^2 ds)$ とし，曲率エネルギーの勾配フローを採用することでブレンディングが実現できることを確認した．

本章では，回転数が異なる場合において尖点となる点の周辺が滑らかに遷移するように曲率フローをデザインするために， f の中に曲率関数 κ の空間微分を含めることを提案する．曲率平滑化フロー（curvature smoothing flow） $\dot{\kappa} = D\Delta\kappa$ は，このような曲率関数の空間微分を含むフローである [HPP05]．ここで， Δ は 1 次元多様体上の Laplace–Beltrami 作用素を表し， D は拡散係数を表す．

離散化したポリゴンに対して Laplace–Beltrami 作用素を計算するために，頂点 p_i における右辺 $\Delta\kappa$ を書き下す．頂点 p_i において $\kappa(u_i) = \kappa_i$ となるような，ポリゴン上で定義された区分線形な曲率関数 κ を考える．ここで， u はエッジ上のパラメータである．図 4.3 の右に示すように，頂点 p_{i-1}, p_i に対応する基底関数 $B_{i-1}(u), B_i(u)$ を用いると， p_{i-1}, p_i で挟まれたエッジにおいて

$$\kappa = B_{i-1}(u)\kappa_{i-1} + B_i(u)\kappa_i \quad (4.4)$$

とかける． B_{i-1}, B_i は 1 の分割であるので， $B_{i-1}(u) + B_i(u) = 1$ となる．よって， $\nabla B_{i-1}(u) +$

$\nabla B_i(u) = 0$ となることから,

$$\begin{aligned}\nabla \kappa &= \nabla B_{i-1}(u)\kappa_{i-1} + \nabla B_i(u)\kappa_i \\ &= \nabla B_i(u)(\kappa_i - \kappa_{i-1})\end{aligned}\quad (4.5)$$

となる. また, $B_i(u)$ は p_{i-1}, p_i においてそれぞれ 0, 1 となるため, $\nabla B_i(u) = p_i - p_{i-1} / (p_i - p_{i-1})^2$ となり,

$$\nabla \kappa = \frac{p_i - p_{i-1}}{(p_i - p_{i-1})^2}(\kappa_i - \kappa_{i-1}) \quad (4.6)$$

とかける. よって, \mathbf{n} を境界における外向きの単位ベクトルとして, ガウスの発散定理より,

$$\begin{aligned}& \int_{A_i} \Delta \kappa(u) \, du \\ &= \sum_{\partial A_i} \nabla \kappa(u) \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{p_i - p_{i-1}}{(p_i - p_{i-1})^2}(\kappa_i - \kappa_{i-1}) \cdot \frac{p_{i-1} - p_i}{\|p_{i-1} - p_i\|} + \frac{p_{i+1} - p_i}{(p_{i+1} - p_i)^2}(\kappa_{i+1} - \kappa_i) \cdot \frac{p_{i+1} - p_i}{\|p_{i+1} - p_i\|} \\ &= \frac{1}{l_{i-1,i}}(\kappa_{i-1} - \kappa_i) + \frac{1}{l_{i,i+1}}(\kappa_{i+1} - \kappa_i)\end{aligned}\quad (4.7)$$

となることがわかる. 以上より,

$$\Delta \kappa_i = \frac{2}{l_{i-1,i} + l_{i,i+1}} \left(\frac{\kappa_{i+1} - \kappa_i}{l_{i,i+1}} - \frac{\kappa_i - \kappa_{i-1}}{l_{i-1,i}} \right) \quad (4.8)$$

となる. $l_{i-1,i} = l_{i,i+1}$ のとき, 通常のラプラス作用素となることに注意せよ.

このフローは時間の経過とともに隣接する頂点に対して, 曲率の差に比例した量の曲率を拡散させる. これにより, 空間的に滑らかなブレンディングに寄与する.

4.3 適応的曲率フローと曲率拡散フローを用いた閉曲線ブレンディング手法

4.3.1 概要

前章にて提案した閉曲線ブレンディングと同様に, 閉曲線条件を満たしながら曲率フローを積分することによりブレンディングポリゴンを求める. しかし, 回転数が異なる場合に対応するために, 入力となるポリゴン対の回転数の差に応じた処理を行う必要がある. この処理の差により全体の処理フローが異なるため, それぞれの場合について概要を整理する.

回転数が同じ場合

回転数が同じ場合のフローチャートを図 4.4 に示した. 図中の処理の概要を以下にまとめる.

- (1) 入力となる曲線対を離散化して得たポリゴンに対してジョイントパーティションを行い, 離散曲率ベクトル κ_s, κ_g を得る (4.3.2 節).

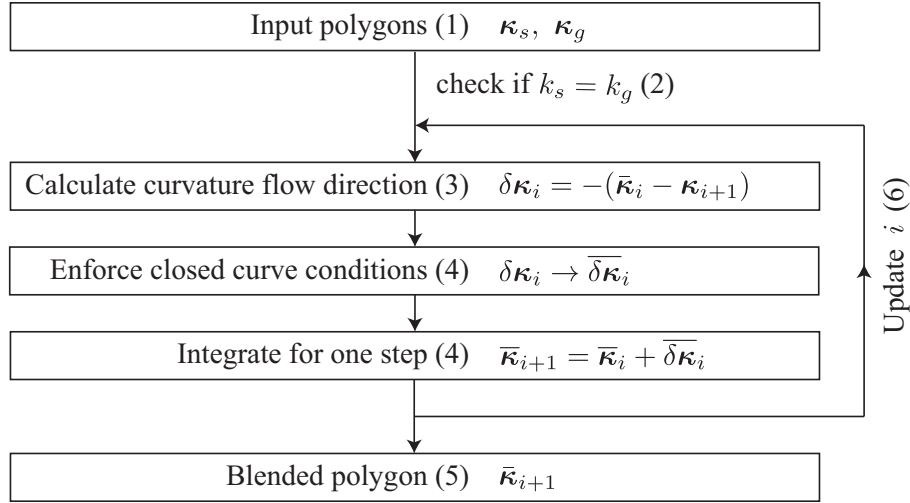


図 4.4. 手法の概要 (回転数が同じ場合).

- (2) スタートポリゴンとゴールポリゴンの回転数 k_s, k_g を計算し、同じ回転数であることを確認する.
- (3) 各時刻において適応的に構成した曲率フローにより、離散曲率ベクトルの更新方向を求める (4.3.4 節).
- (4) 閉曲線条件を満たすように離散曲率ベクトルを積分する (4.3.5 節).
- (5) エッジ長と離散曲率ベクトルを用いてポリゴンを再構成する (4.3.6 節).
- (6) 離散曲率ベクトルが κ_g に収束するまで (3) ~ (5) を繰り返す.

ここで、前章にて提案した手法とは曲率フローの構成法が異なることに注意する.

回転数が異なる場合

図 4.5 は回転数が異なる場合のフローチャートを示したものである.

- (1) 入力となる曲線対を離散化して得たポリゴンに対してジョイントパーティションを行い、離散曲率ベクトル κ_s, κ_g を得る (4.3.2 節).
- (2) スタートポリゴンとゴールポリゴンの回転数 k_s, k_g を計算し、その差と同数の頂点を選んでオフセットを与える (4.3.3 節).
- (3) 尖点を含むポリゴンを計算する (4.3.4 節).
- (4) 尖点を含むポリゴンからスタートポリゴンとゴールポリゴンへの曲率フローをそれぞれ構成し、離散曲率ベクトルの更新方向を求める (4.3.4 節).
- (5) 閉曲線条件を満たすように離散曲率ベクトルを積分する (4.3.5 節).
- (6) エッジ長と離散曲率ベクトルを用いてポリゴンを再構成する (4.3.6 節).
- (7) 離散曲率ベクトルが κ_g に収束するまで (3) ~ (5) を繰り返す.

後述するように、回転数が同じ場合と比べて、尖点を含むポリゴンの事前計算、曲率フローの構成法が異なることに注意する.

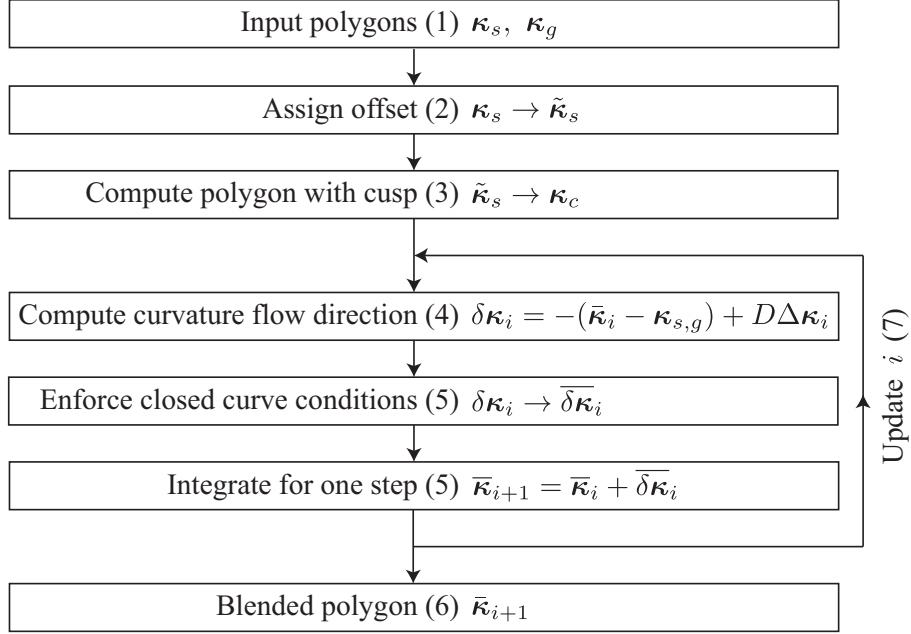


図 4.5. 手法の概要 (回転数が異なる場合).

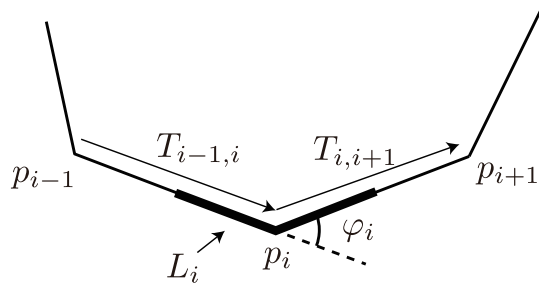


図 4.6. ポリゴンのパラメータ.

4.3.2 離散化とジョイントパーティション

与えられた離散曲線 $\gamma(u) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して、定義域で等間隔にとったパーティション $\sigma = \{\sigma^i = a + i(b-a)/m \mid i = 0, 1, \dots, m-1\}$ によって得られる点集合 $\gamma(\sigma^i)$ ($\sigma^i \in \sigma$) を頂点として持つポリゴンを構成する。入力対となる閉曲線を離散化して得られるポリゴンのうち、ブレンディング元となるポリゴンをスタートポリゴン P_s 、ブレンディング先となるポリゴンをゴールポリゴン P_g とする。

図 4.6 に示すポリゴン $P = [p_0, p_1, \dots, p_{N-1}]$ の頂点 p_i における離散曲率 $\hat{\kappa}_i$ は、

$$L_i = \begin{cases} (\|p_{i+1} - p_i\| + \|p_i - p_{i-1}\|)/2, & \text{if } i = 1, 2, \dots, N-1 \\ (\|p_1 - p_0\| + \|p_0 - p_{N-1}\|)/2, & \text{if } i = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

として、 $\hat{\kappa}_i = \varphi_i / L_i$ と定義される。ここで、 φ_i は p における外角である。各頂点の離散曲率を並べて得られるベクトルを離散曲率ベクトルと呼び、 $\kappa = [\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1, \dots, \hat{\kappa}_{N-1}]^T$ と定義する。

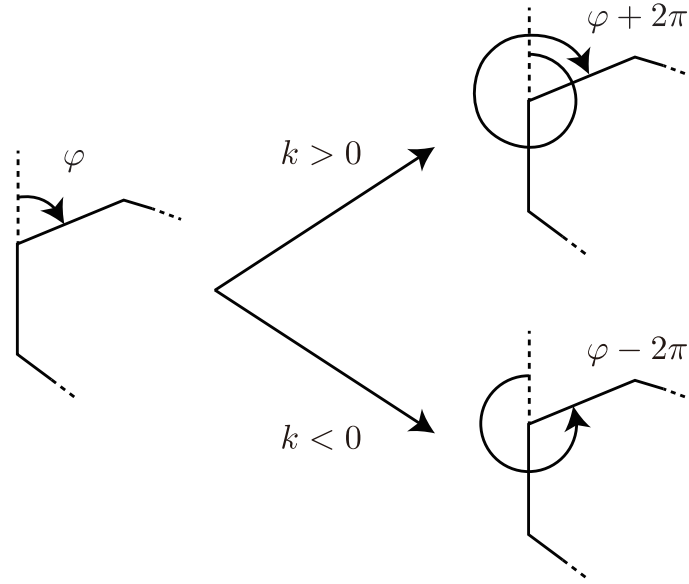


図 4.7. オフセット.

また, p_{i-1} から p_i へのエッジベクトルを $T_{i-1,i}$ とおく. 閉曲線の離散化によって得られたポリゴンは, 離散曲率ベクトルとエッジ長を用いて, 回転並進を除いて再構成することができる.

また, このようにして得られたポリゴン対は一般に同一のエッジ長を持たないため, ジョイントパーティション^{*1}によってエッジ長を共通化する. ジョイントパーティションによって得られたスタートポリゴンとゴールポリゴンをそれぞれ \tilde{P}_s, \tilde{P}_g とし, 頂点数が N となったとする. また, これらの離散曲率ベクトルをそれぞれ κ_s, κ_g とする.

4.3.3 オフセット

4.3.5 節で後述するように, 閉曲線の両端点における接ベクトルが一致しているという Neumann 境界条件を閉曲線条件として採用する. これにより閉曲線の G^1 連続性が満たされるため, 滑らかなブレンディングに寄与するが, 先述の Whitney の定理が示すとおり, スタートポリゴンとゴールポリゴンの回転数が異なる場合には尖点を含まない遷移を生成することは数学的に不可能である. 回転数が同じ場合と異なり, 回転数が異なる場合ではこのことが問題となる. このため本手法では, 生成される尖点の位置を予め指定することで, 尖点の生成による滑らかさの損失を抑える.

スタートポリゴンとゴールポリゴンの回転数をそれぞれ k_s, k_g とし, 回転数の差を $k = k_g - k_s$ とする. 簡単な観察から, ブレンディング中に 1 度尖点が生じると, 回転数が 1 変化する事がわかる. すなわち, ブレンディング中に尖点となる頂点の総数は回転数の差 k 以下となる. ここで, 尖点となる頂点の総数が回転数の差より小さくなる場合は, 同一の頂点がブレンディング中に 2 回以上尖点となることを意味するが, これは一般に自然なブレンディング

^{*1} ジョイントパーティションの詳細については, [SSHS14] を参照せよ.

とはならないため好ましくないと考えられる．このため，回転数の差と同数の k 個の頂点を選択し，それぞれの頂点が1度ずつ尖点となるようにする．

尖点となるように選択した点を $\{c_i\}$ とする．ポリゴンにおける回転数は，各頂点における外角の和によって計算されるため，スタートポリゴンの $\{c_i\}$ における外角にオフセットを与えることで仮想的に回転数の差を補償することを考える．ただし図 4.7 に示すとおり，元の形状を変更しないように，与えるオフセットは $k > 0$ の場合 2π ， $k < 0$ の場合 -2π とする．

本手法では離散曲率ベクトルで形状を記述しているため，実際には離散曲率に対してオフセットを与える．尖点となるように選択した頂点集合を C とする ($|C| = k$)．このとき，オフセットを与えた離散曲率ベクトル $\tilde{\kappa}_s$ は以下のように書くことができる．

$$\tilde{\kappa}_s = [\kappa_0^s, \dots, \kappa_{c-1}^s, \frac{\varphi_c^s + 2\pi}{(l_{c-1,c} + l_{c,c+1})/2}, \kappa_{c+1}^s, \dots, \kappa_{N-1}^s] \quad (\text{if } k > 0) \quad (4.10)$$

$$\tilde{\kappa}_s = [\kappa_0^s, \dots, \kappa_{c-1}^s, \frac{\varphi_c^s - 2\pi}{(l_{c-1,c} + l_{c,c+1})/2}, \kappa_{c+1}^s, \dots, \kappa_{N-1}^s] \quad (\text{if } k < 0) \quad (4.11)$$

ただし， $c \in C$ とする．

4.3.4 曲率フローのデザイン

回転数が同じ場合

入力ポリゴン対の回転数が同じ場合は，スタートポリゴンにオフセットを与える必要が無いため，離散曲率ベクトル κ_s, κ_g を用いてブレンディングポリゴンを計算する．

前章では，曲率エネルギー $E(\kappa) = \|\kappa - \kappa_g\|^2/2$ の L^2 内積を取ることで得られる曲率フロー

$$\dot{\kappa} = -(\kappa - \kappa_g) \quad (4.12)$$

を用いてブレンディングを行ったが，このフローは時間方向に対して対称ではないという問題がある．すなわち，ソースポリゴンとして \tilde{P}_g ，ゴールポリゴンとして \tilde{P}_s を用いた場合と生成されるブレンディングポリゴンが異なる．実際，曲率フローを時間に対して離散化せずに積分すると

$$\kappa(t) = \kappa_g + (\kappa_s - \kappa_g)e^{-2t} \quad (4.13)$$

となることからわかる．

そこで本章では各時刻において，ゴールポリゴンの離散曲率ベクトルではなく，各時刻におけるスタートポリゴンとゴールポリゴンの離散曲率ベクトルの線形補間したベクトルへの曲率フローを考えることで適応的にフローを構成することを考える．

これにより時間に関する非対称性を解消すると同時に，無駄なブレンディングポリゴンの生成を抑えることで計算時間を大幅に削減する手法を提案する．関連研究と同様に，スタートポリゴンとゴールポリゴンの離散曲率ベクトルの線形補間した値をもとにブレンディングポリゴンを求める．線形補間から再構成されるポリゴンをイデアルポリゴンと呼ぶ．

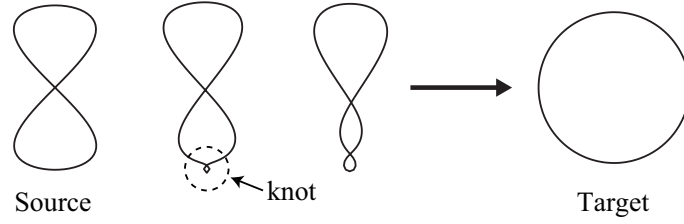


図 4.8. ノット.

スタートポリゴンを時刻 $t_0(=0)$ に, ゴールポリゴンを時刻 $t_n(=1)$ にそれぞれ対応させたとき, i 番目のイデアルポリゴンは時刻 $t_i \in [0, 1]$ に対応する. このときの離散曲率ベクトルは以下のように求められる.

$$\kappa_i = (1 - t_i)\kappa_s + t_i\kappa_g. \quad (4.14)$$

ここで時刻 t_i における曲率フローとして

$$\dot{\kappa} = -(\bar{\kappa}_i - \kappa_{i+1}), \quad (4.15)$$

を用いる. ただし, $\bar{\kappa}_i$ は時刻 t_i において 4.3.5 節で述べる閉曲線条件を適用した後に得られる離散曲率ベクトルとする. 前章までの曲率フローは常に入力として与えられたゴールポリゴンをゴールとしていたのに対して, 本章で提案する曲率フローは各時刻におけるイデアルポリゴンをゴールとして設定している. すなわち, 各時刻におけるゴールが曲率の線形補間として設定されているため, 離散化誤差の影響を除けば時間に関して対象なブレンディングとなる.

適応的に構成したフローも数値計算上安定であるため, 前進オイラー法を用いて計算することができる. このため, 各時刻における離散曲率ベクトルの更新分 $\delta\kappa_{t_i}$ は次のようにかかる.

$$\delta\kappa_i = -(\bar{\kappa}_i - \kappa_{i+1}), \quad (4.16)$$

しかし, タイムステップ数 n を小さく設定した場合, 時間方向の離散化誤差の影響が大きくなる. このため, ブレンディングによって求めたい時刻 $t_i (i = 0, 1, \dots, n)$ を含むように, より密にとった時刻 $\tilde{t}_j (j = 0, 1, \dots, \tilde{n})$ ($\tilde{n} > n$) においてブレンディングポリゴンを計算する. また, どの程度密なタイムステップを取れば離散化誤差の影響を無視できるかを実験によって検証した (4.4.3 節). ガイドラインとして, 回転数が同じ場合と異なる場合のどちらでもタイムステップ数 \tilde{n} を 100 として設定することを推奨する.

また, 各頂点における離散曲率がゴールポリゴンの離散曲率に対して単調に減少するため, 得られたブレンディングポリゴンは尖点を含まない (すなわち正則なホモトピーとなる) ことに注意する.

回転数が異なる場合

回転数が異なる場合については, オフセットを与えた離散曲率ベクトル $\tilde{\kappa}_s$ と κ_g を用いてブレンディングポリゴンを求める. 離散曲率ベクトルの更新方向を決定したあとは, 回転数が同じ場合における κ_s の代わりに $\tilde{\kappa}_s$ を用いる以外は同一のプロセスとなる. しかし, 滑らか

64 第4章 曲率拡散フローを用いた閉曲線ブレンディング

な曲線から生成したスタートポリゴンの離散曲率ベクトルを $\tilde{\kappa}_s$ に置き換えた曲率フローでブレンディングポリゴンを計算すると、離散曲率ベクトルの線形補間によって得られるイデアルポリゴンにおける外角の変化率がオフセットを与えた頂点で他の頂点に比べて大きくなるため、その結果再構成されるポリゴンがオフセットを与えた点で角張った形状となってしまう。これは、滑らかなブレンディングを生成する上で望ましくない性質であると考えられるため、こうした点の生成を抑制する必要がある。これまで提案されてきた手法では、イデアルポリゴンに最も近い閉曲線条件を満たすポリゴンを計算するための手法であったため、このような回転数が異なる場合の滑らかなブレンディングについては取り組まれてこなかった問題である。

本章では、曲率平滑化（拡散）フロー（curvature smoothing flow）[HPP05] $\dot{\kappa} = \Delta\kappa$ をブレンディングに用いることを提案する。このフローは、オフセットを与えた点における曲率を周辺の頂点に向けて徐々に平滑化させるため、滑らかな曲線が生成されることが期待できる。しかし、曲率平滑化フローは周囲の頂点における曲率の差に応じて曲率を拡散させる作用を持つため、図 4.8 に示すようにオフセットを与えた点において「ノット (knot)」が生成されてしまう。

そこで、尖点を含むポリゴンを事前に計算した上で、そのポリゴンからオフセットを与えたスタートポリゴンとゴールポリゴンに対して曲率勾配フローと曲率拡散フローを組み合わせたフローによってブレンディングする手法を提案する。簡単のために、本文ではまず $k = 1$ について述べ、 $k \geq 2$ については後述する。

オフセットを与えた点 p_c が尖点（外角が π ）となるようなポリゴンを計算する。オフセットを与えたスタートポリゴン $\tilde{\kappa}_s$ から、時刻

$$t_c = \frac{\varphi_c^s + \pi}{\varphi_c^s + 2\pi - \varphi_c^g}. \quad (4.17)$$

におけるイデアルポリゴン

$$(1 - t_c)\tilde{\kappa}_s + t_c\kappa_g \quad (4.18)$$

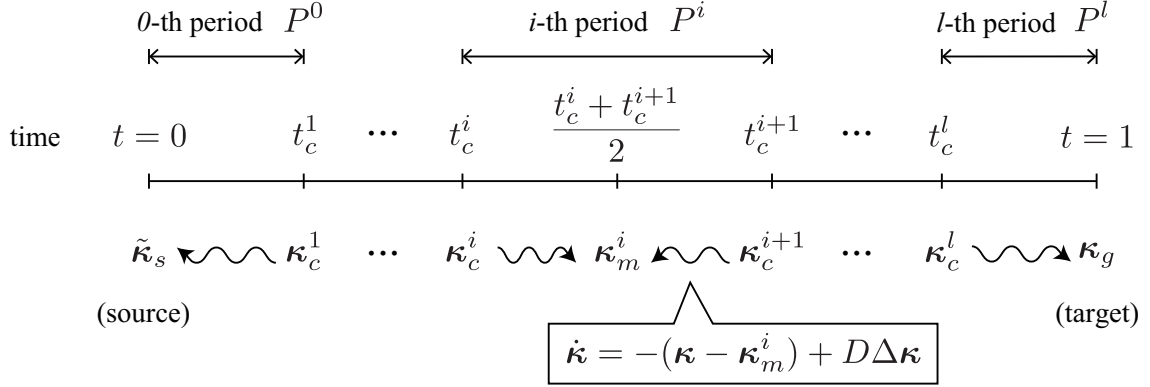
への曲率フローを計算することで、頂点 p_c において尖点を持つようなポリゴン κ_c を求める。このフローを計算する場合も閉曲線条件を適用しながら行うため、生成されたポリゴンも閉となる。

このようにして計算した尖点を含むポリゴン κ_c を初期値としたフロー

$$\dot{\kappa}^1 = -(\kappa^1 - \kappa_s) + D\Delta\kappa^1 \quad (4.19)$$

$$\dot{\kappa}^2 = -(\kappa^2 - \kappa_g) + D\Delta\kappa^2, \quad (4.20)$$

を考える。ここで、 κ^i はそれぞれのフローに対応する曲率変数とする。式 (4.19) は κ_c から κ_s へのフローであり、式 (4.20) は κ_c から κ_g へのフローである。 D は拡散係数を表し、どのような速さで尖点が平滑化されるかを制御する。このフローは、ブレンディングポリゴンは基本的に曲率勾配フローに従いながら、尖点における曲率を周囲の頂点に拡散させる。 D を調整することで拡散の度合いを調整することができるとともに、収束速度を向上させることができる。なお、回転数が同じ場合と異なり、このフローは曲率勾配フローより導出される軌跡


 図 4.9. $k \geq 2$ のときの曲率フローのデザイン

から徐々に乖離するため、一定のタイムステップを用いて計算する。また、式 (4.19) によって計算されるポリゴンは時間的に逆順となるため、逆方向に並べ替えることで最終的なブレンディングポリゴンとする。

ここまでは回転数 k が 1 異なる場合についての曲率フローのデザインについて述べた。ここからは $k \geq 2$ の場合に拡張したアルゴリズムを述べる。 $k \geq 2$ の場合、尖点集合 C が 2 つ以上の要素を含むため、尖点を含むブレンディングポリゴンが複数の時刻 t_c^i ($i = 1, 2, \dots, l(\leq k)$) で生成される。 $k = 1$ の場合と異なり、尖点を含むポリゴンが生成される時刻 t_c^i, t_c^{i+1} ($i \leq l-1$) に挟まれる期間 P^i が存在するため、この場合における曲率フローをデザインする必要がある。

各期間 P^i において、尖点を含むポリゴンの離散曲率ベクトル $\kappa_c^i, \kappa_c^{i+1}$ をスタートとし、その中間時刻に当たる $t_m^i = (t_c^i + t_c^{i+1})/2$ に対応する離散曲率ベクトル κ_m^i をゴールとした曲率フローを用いることを提案する。図 4.9 は提案アルゴリズムの概要を図示したものである。仮定により時刻 t_c^i と $(t_c^i + t_c^{i+1})/2$ の間では回転数の変化がないため、 κ_c^i から κ_m^i までの曲率フローはノットを生成しないことがわかる。

曲率拡散フローは空間微分 Δ を含んでいるため、前進オイラー法を用いて数値計算した場合、非常に小さいタイムステップを用いる必要がある。このため、より安定的に数値計算することが可能な後進オイラー法 (Backward Euler method) を用いる。ここで簡単のため、式 (4.19) に対して $\tilde{\kappa} = \kappa^1 - \tilde{\kappa}_s$ 式 (4.20) に対して $\tilde{\kappa} = \kappa^2 - \kappa_g$ とおくことで、両方のフローを $\dot{\tilde{\kappa}} = -\tilde{\kappa} + D\Delta\tilde{\kappa}$ としてまとめる。このとき、各頂点 p_i における曲率フローは以下の

ように離散化することができる.

$$\frac{\tilde{\kappa}_i^{t+dt} - \tilde{\kappa}_i^t}{dt} = -\tilde{\kappa}_i^{t+dt} + D \frac{2}{l_{i-1,i} + l_{i,i+1}} \left(\frac{\tilde{\kappa}_{i+1}^{t+dt} - \tilde{\kappa}_i^{t+dt}}{l_{i,i+1}} - \frac{\tilde{\kappa}_i^{t+dt} - \tilde{\kappa}_{i-1}^{t+dt}}{l_{i-1,i}} \right) \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \tilde{\kappa}_i^t &= -2D \frac{1}{l_{i-1,i} + l_{i,i+1}} \frac{1}{l_{i,i+1}} dt \tilde{\kappa}_{i+1}^{t+dt} \\ &+ \left(1 + dt + 2D \frac{1}{l_{i-1,i} + l_{i,i+1}} \frac{1}{l_{i,i+1}} dt + 2D \frac{1}{l_{i-1,i} + l_{i,i+1}} \frac{1}{l_{i-1,i}} dt \right) \tilde{\kappa}_i^{i+1} \\ &- 2D \frac{1}{l_{i-1,i} + l_{i,i+1}} \frac{1}{l_{i-1,i}} dt \tilde{\kappa}_{i-1}^{t+dt} \end{aligned} \quad (4.22)$$

ここで,

$$\Delta_{i,i+1}^i = 2D \frac{1}{l_{i-1,i} + l_{i,i+1}} \frac{1}{l_{i,i+1}} dt \quad (4.23)$$

$$\Delta_{i-1,i}^i = 2D \frac{1}{l_{i-1,i} + l_{i,i+1}} \frac{1}{l_{i-1,i}} dt \quad (4.24)$$

$$\Sigma_{i,i} = 1 + dt + \Delta_{i-1,i}^i + \Delta_{i,i+1}^i \quad (4.25)$$

とおくと, 上記の差分方程式は以下のように連立一次方程式として記述できる.

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{1,1} & -\Delta_{1,2}^1 & 0 & \cdots & -\Delta_{N,1}^1 \\ -\Delta_{1,2}^2 & \Sigma_{2,2} & -\Delta_{2,3}^2 & \cdots & 0 \\ 0 & -\Delta_{2,3}^3 & \Sigma_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Delta_{N,1}^N & 0 & 0 & \cdots & \Sigma_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1^{t+dt} \\ \tilde{\kappa}_2^{t+dt} \\ \vdots \\ \tilde{\kappa}_N^{t+dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1^t \\ \tilde{\kappa}_2^t \\ \vdots \\ \tilde{\kappa}_N^t \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

この連立方程式を各時刻において解かなければならないが, 計算量が多く, 効率的に計算する必要がある. そこで, $\Delta_{i,i+1}^i$ と $\Delta_{i-1,i}^i$ は拡散係数と辺長, タイムステップによって決定される変数であるため, 式 (4.26) 中の係数行列は時刻によらず常に一定となることに着目し, このため, LU 分解 [GL96] を用いて効率的に解くことが可能である. すなわち, 各フローの初期状態 (時刻 $t=0$) において係数行列 A を $A = LU$ (L は下三角行列, U は上三角行列) として分解し, その結果をすべての時刻で用いる.

LU 分解は効率的な行列計算のため広く用いられるアルゴリズムであるが, 一般に計算量は行列の次元を N としたとき $O(N^3)$ となることが知られている. しかし式 (4.26) の係数行列の場合, 非零要素は各行, 各列ともに 3 個しかないので, L も U も共にスパース行列となる. 実際に, L, U ともに非零要素の数は行列の次元数 N に比例するため, 前進代入や後退代入に要する計算時間は $O(N)$ となる. また, LU 分解そのものに要する計算時間も係数行列の次元数に比例し, 全体として非常に高速に計算することが可能となる.

実際に式 (4.26) の係数行列の LU 分解に要する時間を評価するため, 係数行列の非零要素と同じ位置 (三重対角行列と $(1, N), (N, 1)$) に乱数を設定した行列に対して数値実験した. 実験では, 3 次元から 2000 次元の行列に対して計算時間を計測し, 各次元に対して 100 回の試行の平均を求めた. 図 4.10 は LU 分解に要した時間と, その結果を用いて連立方程式の求解

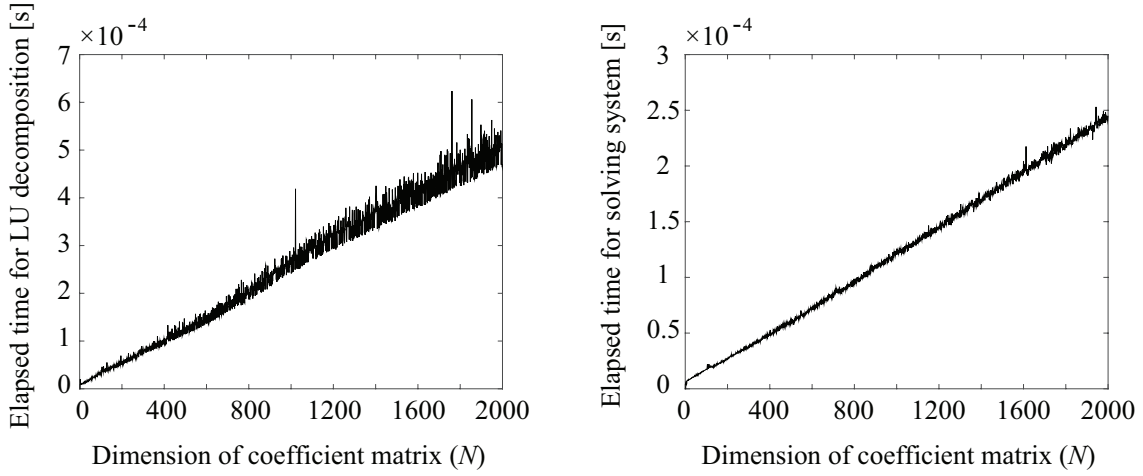


図 4.10. LU 分解に要した時間と連立方程式の求解に要した時間.

に要した時間をプロットしたものである。これらの結果から、どちらの計算時間も行列の次元数に比例することが確認できた。

特に 2000 個の頂点を持つポリゴンの LU 分解に要する時間が 0.5 ミリ秒、連立方程式の求解に要する時間は 0.25 ミリ秒となった。LU 分解は曲率フローにつき一度計算するのみであるため、100 個のブレンディングポリゴンを計算するのに要する時間は 25 ミリ秒となる。

4.3.5 閉曲線条件の適用

本章で提案した適応的フローや曲率拡散フローで計算される離散曲率ベクトルの更新方向に対して、閉曲線条件を適用する必要がある。適応的フローでは回転数が同じ場合について構成したため、前章で用いたように、Crane らによって提案された閉曲線条件 [CPS13] をそのまま用いる。また曲率拡散フローについても、尖点を含むポリゴンの前後で回転数が同じとなるようにフローを構成したため、同様の閉曲線条件を用いることができる。

すなわち、閉曲線条件 (Dirichlet 境界条件, Neumann 境界条件) は

$$\langle \dot{\kappa}, \mathbf{1} \rangle = \langle \dot{\kappa}, \gamma^x \rangle = \langle \dot{\kappa}, \gamma^y \rangle = 0 \quad (4.27)$$

と記述することができる。ただし、 γ^x, γ^y は頂点の座標関数、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は L^2 内積を表す。この制約条件を適用した離散曲率ベクトル $\overline{\delta \kappa}$ は、Gram-Schmidt の直交化法を用いて

$$\overline{\delta \kappa} = \delta \kappa - (\langle \delta \kappa, \mathbf{c}_1 \rangle \mathbf{c}_1 + \langle \delta \kappa, \mathbf{c}_2 \rangle \mathbf{c}_2 + \langle \delta \kappa, \mathbf{c}_3 \rangle \mathbf{c}_3) \quad (4.28)$$

となる。ここで、 $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ は $\{\mathbf{1}, \gamma_x, \gamma_y\}$ から Gram-Schmidt の直交化法によって得られた正規直交基底である。

4.3.6 離散曲線の再構成

閉曲線条件を適用した離散曲率ベクトル $\overline{\delta \kappa} = [\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{N-1}]$ と、ジョイントパーティションによって得られたエッジ長を用いてポリゴンを再構成する。 $p_1 - p_0$ を x 軸に平行とな

り、かつ $\|p_0 - p_1\| = l_{0,1}$ を満たすように配置すると、残りの頂点 $P = \{p_2, p_3, \dots, p_{N-1}\}$ は以下のように再帰的に計算できる。

$$p_i = p_{i-1} + l_{i-1,i} \left[\cos \left(\sum_{j=1}^{i-1} \varphi_j \right), \sin \left(\sum_{j=1}^{i-1} \varphi_j \right) \right]^T \quad (4.29)$$

ただし、 $\varphi_i = \kappa_i L_i$ である。

また、この計算の際に生じる空間的な離散化誤差は x 軸、 y 軸それぞれについて離散 Poisson 方程式を解くことで減少させることが可能である [KBH06]。すなわち、離散曲率とエッジ長より構成したエッジベクトル \mathbf{T} を、最もよく近似するベクトル場を勾配として持つ頂点集合 P を計算する。この問題は $\min_P \|\nabla P - \mathbf{T}\|$ と書きあらわせ、両辺に div をかけた $\Delta P = \nabla \cdot \mathbf{T}$ を求めることで解が得られる。これは線形連立方程式 $LP = b$ で表すことができる。ただし、

$$L = \begin{bmatrix} 1/l_{N,1} + 1/l_{1,2} & -1/l_{1,2} & 0 & \cdots & -1/l_{N,1} \\ -1/l_{1,2} & 1/l_{1,2} + 1/l_{2,3} & -1/l_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & -1/l_{2,3} & 1/l_{2,3} + 1/l_{3,4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1/l_{N,1} & 0 & 0 & \cdots & 1/l_{N-1,N} + 1/l_{N,1} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$b = \begin{bmatrix} T_{N,1}/l_{N,1} - T_{1,2}/l_{1,2} \\ T_{1,2}/l_{1,2} - T_{2,3}/l_{2,3} \\ \vdots \\ T_{N-1,N}/l_{N-1,N} - T_{N,1}/l_{N,1} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

である。この線形連立方程式も先述の後進オイラー法と同様に解くことが可能であるが、離散曲率ベクトルとエッジ長を用いて再帰的に解くだけで実用上十分であり、また離散 Poisson 方程式の求解には約 3 倍程度の計算時間が必要となるためトレードオフの関係にある。

4.4 評価

本章で提案した閉曲線ブレンディング手法の有効性を検証するために実験を行った。前章と同様に、Sederberg による手法 [SGWM93]、Saba らの手法 [SSHS14] と Dym らの手

表 4.1. 実験条件

	Exp. 1	Exp. 2	Exp. 3	Exp. 4
頂点数	99	989	197	808
ソースポリゴンの回転数	1	1	0	-1
ゴールポリゴンの回転数	1	1	1	4
最小エッジ長	1.38×10^{-4}	4.21×10^{-12}	6.80×10^{-5}	7.07×10^{-6}
最大エッジ長	1.9×10^{-2}	4.95×10^{-3}	1.01×10^{-2}	3.6×10^{-3}

法 [DSL15] を比較対象とした。

提案手法と比較手法はすべて MATLAB 2015b を用いて実装し、3.7 GHz Quad-Core Intel Xeon E5 を CPU として搭載した Mac Pro (Late, 2013) にて実験を行った。表 4.1 に実験条件を記載した。また、表 4.2 に提案手法において設定したパラメータを記載した。Sederberg らの手法と Saba らの手法は、著者らによりソースコードの公開がなかったため、論文に記載されている情報をもとに再実装した。Saba らの論文で述べられているように、非線形最適化のソルバーとして、MATLAB に実装されている `fmincon` を用いた。ただし、規定のパラメータ設定では閉曲線条件が満たされるまでに収束しなかったため、関数の評価関数の上限を 10,000 回と設定した。Dym らの手法は、著者らのホームページ [Dym] によりソースコードが公開されているため、ジョイントパーティションによって得られたポリゴン対を入力として実験を行った。ここで、Dym らの手法における二次錐計画問題のソルバーは Yalmip [Lof04], Mosek [AA00] を用いた。

また、提案手法の定量評価を行うために、ブレンディング中の角張った点の生成とノットの生成が審美性に与える影響や、最終的なブレンディング結果に関してクラウドソーシングを用いた主観品質評価実験を行った。クラウドソーシングのプラットフォームとして、Amazon Mechanical Turk (MTurk)[Ama] を使い、MTurk 上でヒューマンインテリジェントタスク (HIT) を掲載して実験参加者を募った。また、オンラインサーベイのプラットフォームとして、SurveyMonkey[Sur] を用いた。

主観品質評価実験では、2.7.2 節で議論したように一対比較法を用いた。順序効果にも配慮し、各設問中で提示するアニメーションの順番は各参加者ごとにランダムとし、設問の順番もランダムに提示した。参加者は各設問に対して 2 つのアニメーションを提示され、そのうち好ましいと思う方と回答するという形式を取った。また、各アニメーションでは 19 個の中割りフレームを含む 21 フレームから生成したブレンディング結果をスロー再生 (6[fps]) し、3 回連続して提示することで全体で 11 秒のアニメーションを見せた。なおここで、アニメーションの時間については ITU-T 勧告 P.910[ITUb] に基づいて、全体で約 10 秒となるように設計した。一対比較法を用いた主観品質評価実験における参加者数については、同じく 2.7.2 節で議論したように本実験でも 50 人とした。また、不誠実な参加者による影響を極力排除するため、MTurk 上で Master と呼ばれる信頼度の高いユーザ 50 人を対象として実験を行った。参加者には実験参加の対価として 2.0 米ドルの報酬を支払った。

4.4.1 回転数が同じ場合

図 4.12 と図 4.13 はそれぞれ、提案手法と比較手法により得られたブレンディング結果であり、図 4.12 は「C」から「G」へ (実験^{*2}1) の結果、図 4.13 は「開いた手」から「サムアップ」へ (実験 2) の結果である。実験 2 は、実験 1 と比較して厳しい条件 (最小エッジ長など) となっていることに注意する。ここで、本章では曲率フローのデザインが各時刻におけるゴー

^{*2} 表中の “Exp” は “Experiment.” の略語。

ルポリゴンに応じて逐次変化しているのに対して、前章では常に同じフローに従っていた点が多くなることに注意する。また、本章ではある時刻におけるブレンディングポリゴンを直接求めているのに対して、前章では一度求めたブレンディングポリゴン群から目的となるブレンディングポリゴンと最も近い曲率エネルギーを持つものを選択していた点が多くなることに注意する。

実験1と実験2で得られた結果に対して、クラウドソーシングを用いた主観品質評価実験を行った結果得られた一対比較表が、表4.4である。また、得られた一対比較表を、2.7.2節で述べたThurstoneの比較判断の法則に基づいて間隔尺度に変換した結果が図4.11である。これらの結果から提案手法は、第3章における実験で得られた結果と同様に、頂点位置の線形補間による結果よりも良好なブレンディング結果が得られていることがわかる。また、提案手法とSabaらによる手法を比べると、実験1ではSabaらによる手法のほうが好ましいという結果であるものの、実験2においてはSabaらによる手法では最適化問題が収束せず閉曲線の生成に失敗していることが一因となり、提案手法の方が大幅に好ましいという結果となっている。提案手法とSederbergらの手法やDymらの手法を比較すると、好ましいとする手法が実験によって異なっていることが確認できた。ただし第3章で確認したように、Sederbergらの手法の手法ではよじれ(kink)と呼ばれるアーティファクトが存在する可能性があることに注

表4.2. 提案手法で用いたパラメータ。ただし、ポリゴン数は各曲率フローにおいて生成したブレンディングポリゴンの総数を表し、タイムステップ、拡散係数は曲率拡散フロー計算時に使用したパラメータを表す。

	実験1	実験2	実験3	実験4
ポリゴン数	100	100	100	100
タイムステップ	-	-	0.2	0.3
拡散係数	-	-	0.001~0.1	0.001

表4.3. ブレンディングポリゴンの生成に要した計算時間の比較。Sabaらの手法とDymらの手法ではそれぞれ10個のポリゴンを生成したが、提案手法では100個のポリゴンを生成した。ただし、PC (Pre Computation) は尖点を持つポリゴンの事前計算に要する時間を表し、CF (Curvature Flow) は曲率拡散フローによるブレンディングポリゴンの生成に要した時間を表す。

	実験1	実験2	実験3	実験4
Sederberg [SGWM93]	0.0168	0.0337	0.0189	0.0305
Saba [SSHS14]	16.34	136	22.1	119.4
Dym [DSL15]	6.25	7.81	9.55	9.61
提案手法	0.0152	0.0723	0.0665 (PC)	0.190 (PC)
			0.138 (CF)	0.399 (CF)

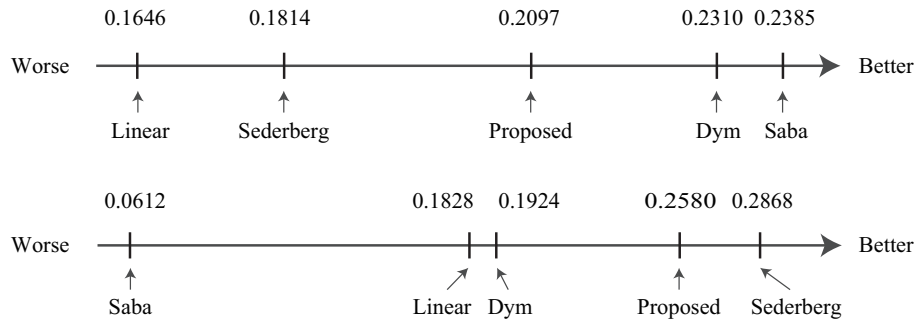


図 4.11. 実験 1 と実験 2 において、頂点位置の線形補間 (Linear), Sederberg らによる手法 (Sederberg), Saba らによる手法 (Saba), Dym らによる手法 (Dym), 提案手法 (Proposed) を比較する主観品質評価実験を行って得られた間隔尺度 (評価スコア)。

意する。

また計算時間に関して、提案手法が比較手法に比肩するブレンディングポリゴンを生成しながらも、計算コストが著しく抑えられていることを確認した。表 4.3 は、それぞれの手法においてブレンディングポリゴンを生成するのに要した時間をまとめたものである。これらの結果

表 4.4. 実験 1 と実験 2 において、頂点位置の線形補間 (Linear), Sederberg らによる手法 (Sederberg), Saba らによる手法 (Saba), Dym らによる手法 (Dym), 提案手法 (Proposed) を比較する主観品質評価実験を行って得られた一対比較表。評価対象 i のほうが評価対象 j よりも優れていると答えた人数を (i, j) に示す。

Exp. 1		j				
		Linear	Sederberg	Saba	Dym	Proposed
i	Linear	–	24	21	22	20
	Sederberg	26	–	22	21	24
	Saba	29	28	–	25	28
	Dym	28	29	25	–	26
	Proposed	30	26	22	24	–

Exp.2		j				
		Linear	Sederberg	Saba	Dym	Proposed
i	Linear	–	19	40	21	22
	Sederberg	31	–	41	32	24
	Saba	10	9	–	14	10
	Dym	29	18	36	–	22
	Proposed	28	26	40	28	–

から、高速にブレンディングポリゴンが生成できたことが確認できる。例えば、実験2の結果では、Sederbergらの手法で10個のブレンディングポリゴンを生成するのに約33ミリ秒、Dymらの手法で10個のブレンディングポリゴンを生成するのに約8秒、Sabaらの手法で約136秒を要したのに対して、提案手法では、離散化誤差の影響を抑えるためにその10倍の100個のブレンディングポリゴンを生成したが、要した時間はわずか72ミリ秒であった。これらの結果から、リアルタイムな処理が好ましいアニメーションの生成支援などの応用において提案手法が有効であることが示唆される。

4.4.2 回転数が異なる場合

図4.14は、「8」（回転数が0）から円（回転数が1）へ（実験3）のブレンディング結果を示したものである。Dymらは、対応点における外角の差によって尖点を生じさせる点を自動的に決定するアルゴリズムを提案しているが、本実験ではすべての手法で図中の点線の丸で示した点において尖点を生じさせることで公平な比較を行った。これらの結果から、特に尖点付近において比較手法よりも滑らかなブレンディングが実現できることが確認できる。

尖点付近における滑らかさが審美性にどのような影響を与えるかについて、クラウドソーシングを用いた主観品質評価実験を行った。すなわち、勾配フローのみを用いたブレンディング結果（図4.14中の $D=0$ ）、ノットを生成するブレンディング結果（図4.8）、拡散フローを用いたブレンディング結果（図4.14中の $D=10^{-2}$ ）を対象として、オンラインサーベイによる一対比較実験を行った。ただし、この主観品質評価実験については50人の参加者に対して、実験参加の報酬として0.25米ドル支払った。この主観品質評価実験の結果得られた一対比較表を表4.5に示す。また、得られた一対比較表を、2.7.2節で述べたThurstoneの比較判断の法則に基づいて間隔尺度に変換した結果が図4.16である。この結果から、ノットが生成されるブレンディング結果は他のブレンディング結果と比べて好ましくないことが確認できる。また、「8」と円のような滑らかな形状間でブレンディングを行う場合には、ブレンディング中に角張った点が生成するよりも、ブレンディングを通して滑らかなブレンディングのほうが好ましいとする結果が得られることも確認できる。これらの観察から、入力対が滑らかでかつ回転数が異なる場合において、拡散フローを用いたブレンディングの有効性を認めることができる。

図4.15は、「プレッツェル」（回転数が-1）から、「人」（回転数が4）の形状へ（実験4）のブレンディング結果を示したものである。提案手法は全体を通してなめらかなブレンディングを達成しているのに対して、比較手法では角張った点が全体を通して残っているなどして滑らかなブレンディングに失敗していることが確認できる。特にSabaらの手法では、非線形最適化ソルバーにおける関数の評価回数の上限を増加させても同様の結果が得られた。

さらに、実験4についてクラウドソーシングによる主観品質評価実験を行って得られた一対比較表が表4.6であり、この結果をThurstoneの比較判断の法則に従って間隔尺度に変換したものが図4.18である。この結果からも、提案手法が他の手法に比べて良好な結果が得られていることが確認できる。特に、Sederbergらによる手法とSabaらによる手法に比べて、

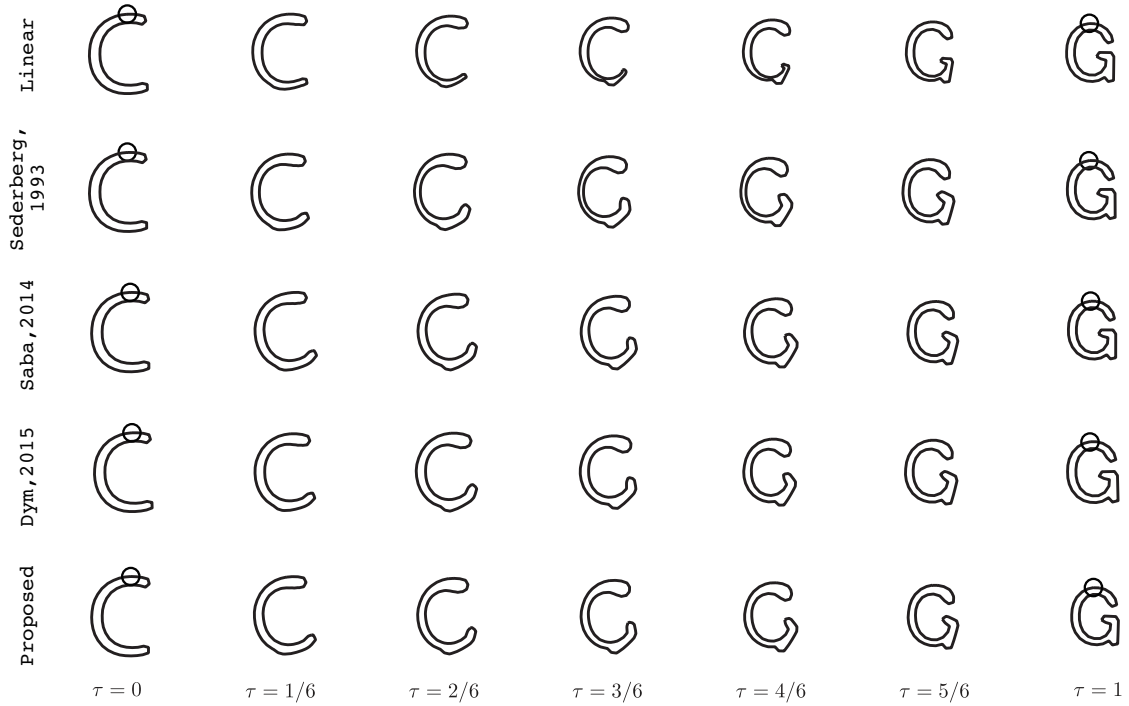


図 4.12. 実験 1 におけるブレンディング結果 (「C」から「G」). ただし, 入力ポリゴン対で対応させた頂点を提案手法の結果において円で示した.

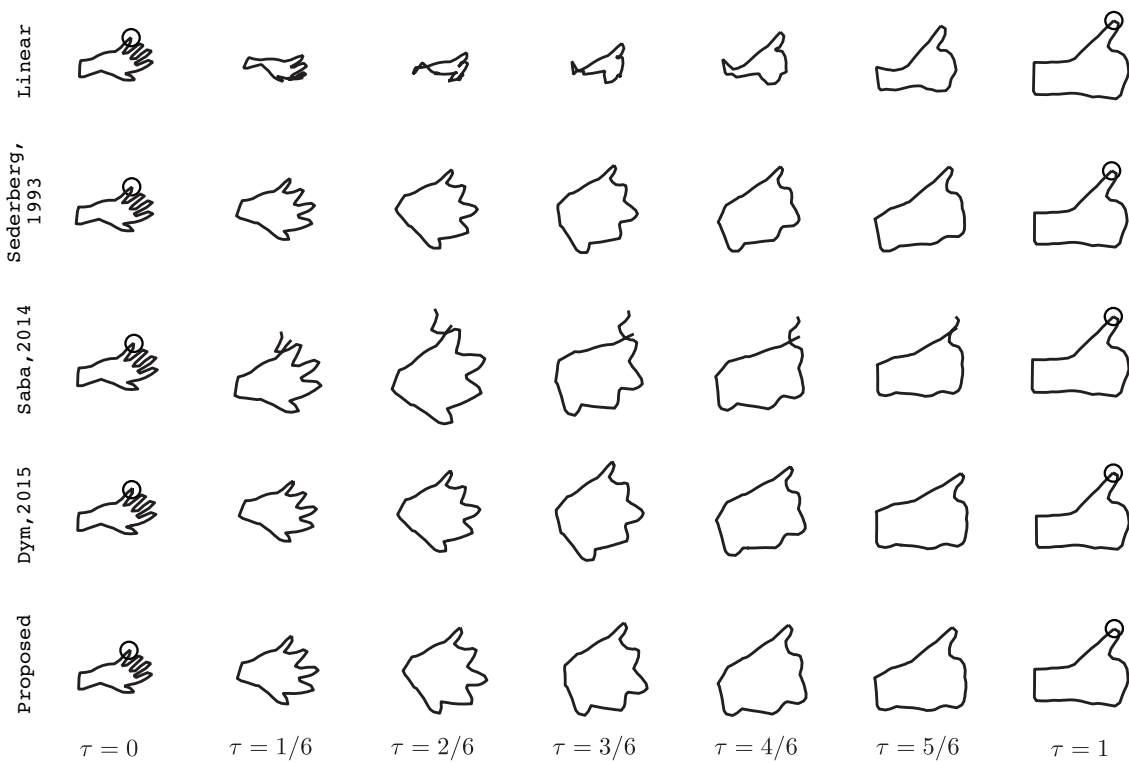


図 4.13. 実験 2 におけるブレンディング結果 (「開いた手」から「サムアップ」). ただし, 入力ポリゴン対で対応させた頂点を提案手法の結果において円で示した.

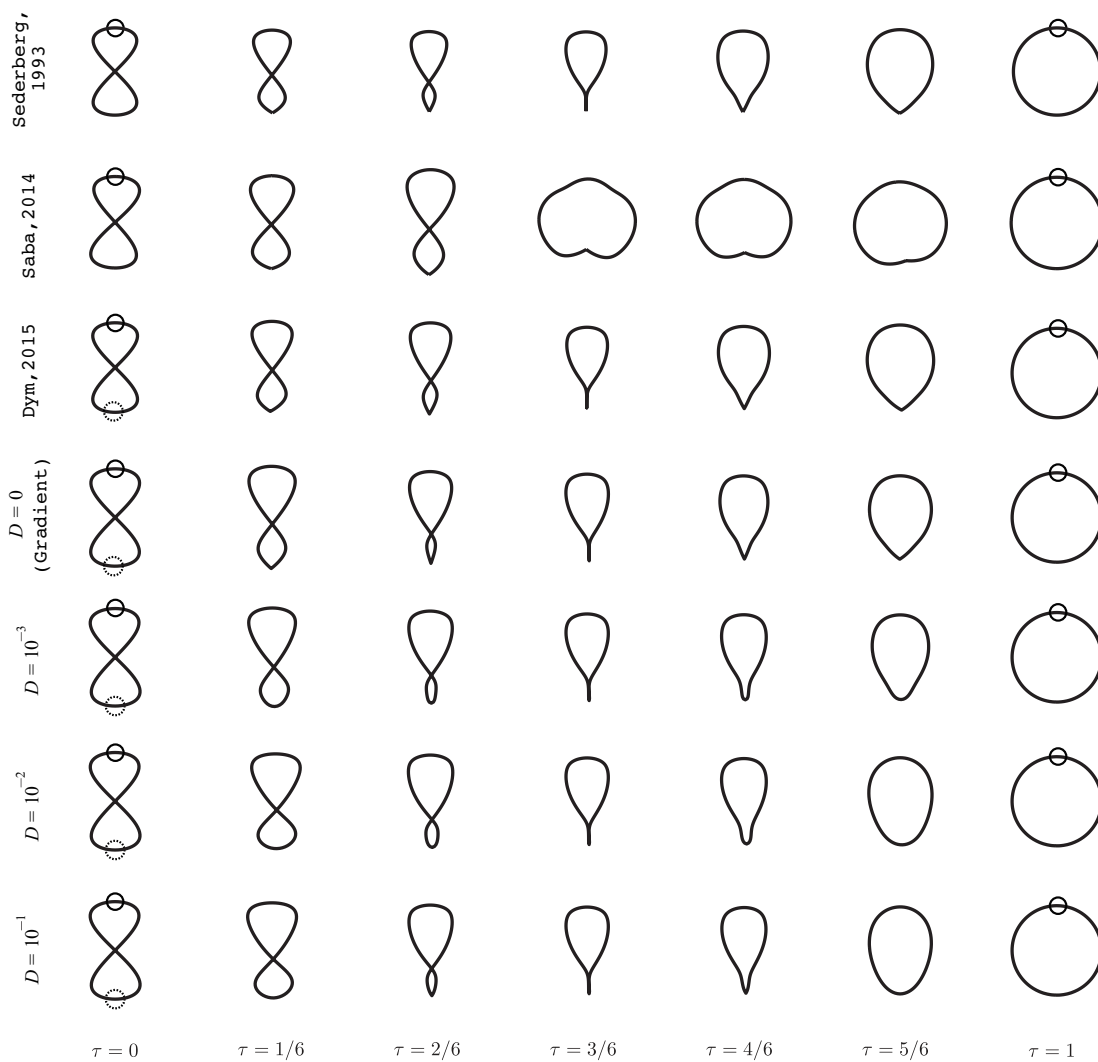


図 4.14. 実験 3 におけるブレンディング結果 (「8 の字 (回転数が 0)」から「円 (回転数が 1)」).
ただし, 入力ポリゴン対で対応している頂点を実線の円で表し, 尖点として指定した点を点線の円で表す.

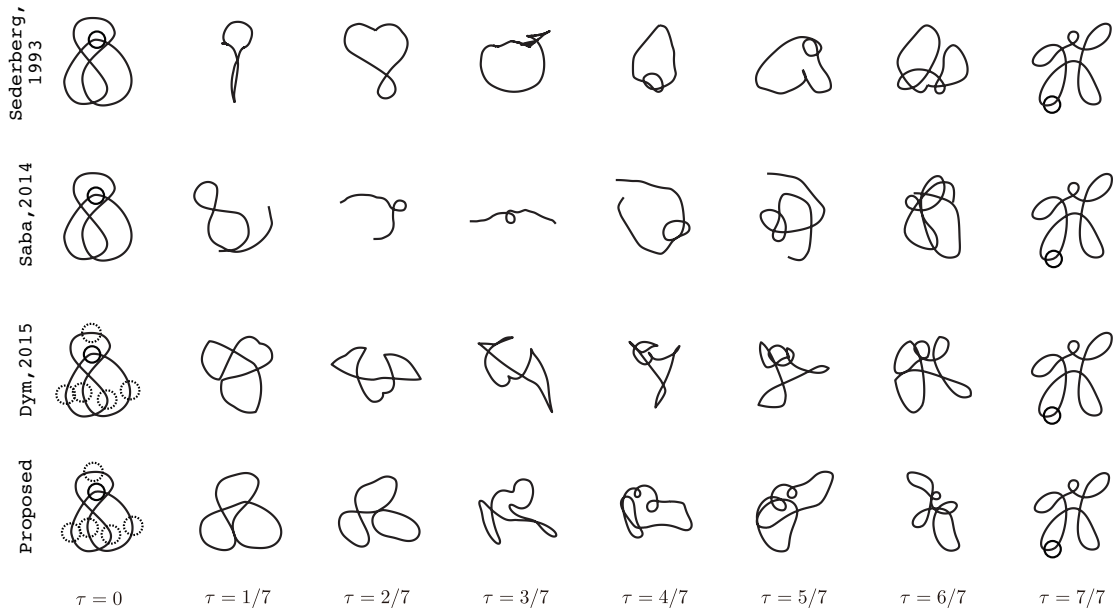


図 4.15. 実験 4 におけるブレンディング結果（「プレッツェル（回転数が -1）」から「人（回転数が 4）」）。実験 3 の図と同様に、入力ポリゴン対で対応している頂点を実線の間で表し、尖点として指定した点を点線の間で表す。

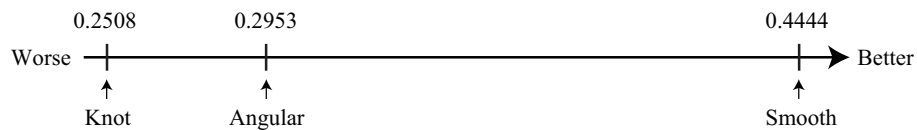


図 4.16. 勾配フローのみを用いたブレンディング結果（Angular）、ノットを生成するブレンディング結果（Knot）と拡散フローを用いたブレンディング結果（Smooth）を比較する主観品質評価実験を行って得られた間隔尺度（評価スコア）。

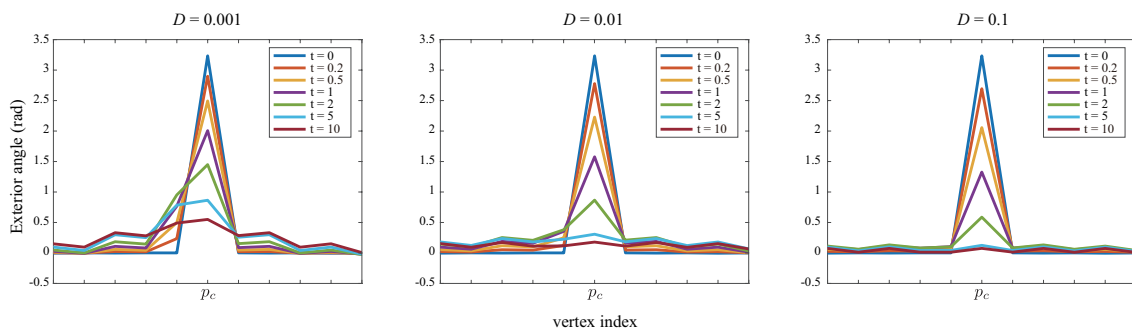


図 4.17. 異なる拡散係数における拡散の影響の差。図の横軸は、予め指定した尖点 p_c まわりの頂点のインデックスを表し、縦軸はその頂点における外角を表す。

提案手法や Dym らによる手法が大幅に良好な結果が得られている。また、提案手法のほうが Dym らによる手法よりも好ましいと答えた人数は 50 人中 30 人となり、Dym らによる手法よりも良好な結果が得られていることが確認できる。これらの結果より、曲率拡散フローによって曲率の変化度合いを尖点の近傍領域に拡散させることで審美性の向上を達成しているこ

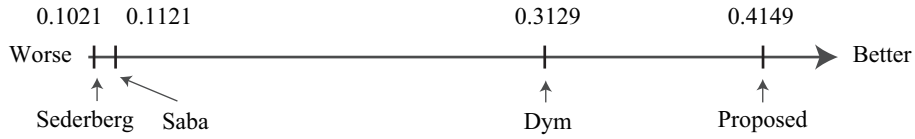


図 4.18. 実験 4 において、頂点位置の線形補間 (Linear), Sederberg らによる手法 (Sederberg), Saba らによる手法 (Saba), Dym らによる手法 (Dym), 提案手法 (Proposed) を比較する主観品質評価実験を行って得られた間隔尺度 (評価スコア)。

とから、4.1 節で示した仮説を支持する結果となっている。

また図 4.14 からは、拡散係数の設定により尖点付近の滑らかさが異なることも確認できる。滑らかさの程度を確認するために、異なる拡散係数の設定によって尖点付近の頂点における外角がどのような変化をするのかを図示した結果が図 4.17 である。この結果から、隣接する頂点に外角が拡散している様子が確認できるが、 $D = 0.1$ の結果のように尖点に隣接している頂点における拡散の影響が小さくなってしまう場合がある。これは隣接する頂点における拡散速度よりも、尖点における拡散速度が早すぎるために起こってしまうと考えられる。このため、

表 4.5. 勾配フローのみを用いたブレンディング結果 (Angular), ノットを生成するブレンディング結果 (Knot) と拡散フローを用いたブレンディング結果 (Smooth) を比較する主観品質評価実験を行って得られた一対比較表。評価対象 i のほうが評価対象 j よりも優れていると答えた人数を (i, j) に示す。

Exp. 3		j		
		Angular	Knot	Smooth
i	Angular	—	25	22
	Knot	25	—	16
	Smooth	28	34	—

表 4.6. 実験 4 において、Sederberg らによる手法 (Sederberg), Saba らによる手法 (Saba), Dym らによる手法 (Dym), 提案手法 (Proposed) を比較する主観品質評価実験を行って得られた一対比較表。評価対象 i のほうが評価対象 j よりも優れていると答えた人数を (i, j) に示す。

Exp. 4		j			
		Sederberg	Saba	Dym	Proposed
i	Sederberg	—	26	10	10
	Saba	24	—	14	12
	Dym	40	36	—	20
	Proposed	40	38	30	—

拡散係数を大きく設定しても拡散の効果が得られない場合がある。実験の結果から、拡散係数を 0.001 から 0.01 の間に設定することを推奨する。

一方で、提案手法の高速性を評価するために、提案手法と比較手法の計算時間を比較した結果が表 4.3 である。Sederberg らの手法、Saba らの手法と Dym らの手法については、10 個のブレンディングポリゴンの生成に要した時間を評価したが、回転数が同じ場合と同様に離散化誤差による影響を加味するため、提案手法については 100 個のブレンディングポリゴンの生成に要した時間を評価した。回転数が異なる場合は、尖点として設定した点の外角が π となるポリゴンを事前に計算する必要があるため、この前処理に要した時間を Pre Computation (PC) とし、曲率拡散フローによるブレンディングポリゴンの生成に要した時間を Curvature Flow (CF) とした。いずれの場合でも、Saba らの手法や Dym らの手法に比べて大幅な計算時間の削減に成功していることが確認できる。

4.4.3 離散化誤差の評価

提案手法では、曲率フローを時間離散化して積算することによりブレンディングポリゴンを求めるものであるため、第 3 章の実験 1 と同じ入力ポリゴン対を用いて、設定した時間ステップに応じてどの程度離散化誤差が発生するのかを評価した。ここで n はタイムステップ数とした。すなわち、時刻 $t_i = i/n$ ($i = 0, 1, \dots, n$) においてブレンディングポリゴンを計算した。

離散化誤差は時間が経過するとともに蓄積されていくため、時刻 $t = 1$ における離散曲率ベクトル $\bar{\kappa}_{t=1}$ と、ゴールポリゴン κ_g とのユークリッド距離を評価した。図 4.19 から、タイムステップ数 n に応じて $t = 1$ におけるブレンディングポリゴン（図中橙色の点線）とゴールポリゴン（図中黒の実線）がどの程度乖離しているかを表している。図 4.20 は、 $t = 1$ におけるブレンディングポリゴンとゴールポリゴンの誤差率を表したものである。ただし、誤差率は以下のように定義される。

$$\|\bar{\kappa}_{t=1} - \kappa_g\| / \|\kappa_g\| \quad (4.32)$$

ここで、 $\|\cdot\|$ はユークリッド距離を表す。これらの結果から、タイムステップ数を 100 としたとき誤差は無視できる程度（約 0.2%）となることが確認できる。

図 4.21 は、各頂点において $t = 1$ におけるブレンディングポリゴンとゴールポリゴンの離散曲率の差をタイムステップ数ごとにプロットしたものである。この結果から、タイムステップを十分に取ることにより、すべての頂点において離散曲率の差が 0 に収束していることが確認できる。またタイムステップ数の増加による計算時間の増加についても、100 個のブレンディングポリゴンの生成に要する時間が 100 ミリ秒に抑えられていることから十分高速であると考えられる。

4.5 考察

提案手法と関連手法によって得られたブレンディング曲線群に対して、定性的に確認できる現象や主観品質評価実験によって得られた審美性に関する評価、ブレンディングに要した計算

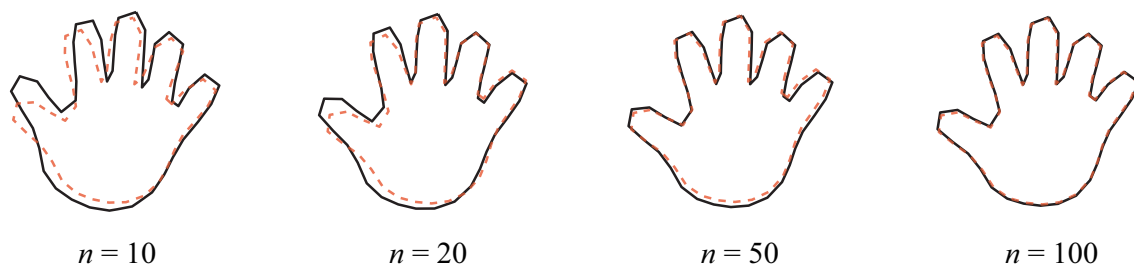


図 4.19. 積分した離散曲率ベクトルより再構成した $t = 1$ におけるブレンディングポリゴン. 黒の実線で表している形状はゴールポリゴンを表し, オレンジの点線で表しているものは再構成したポリゴンを表す.

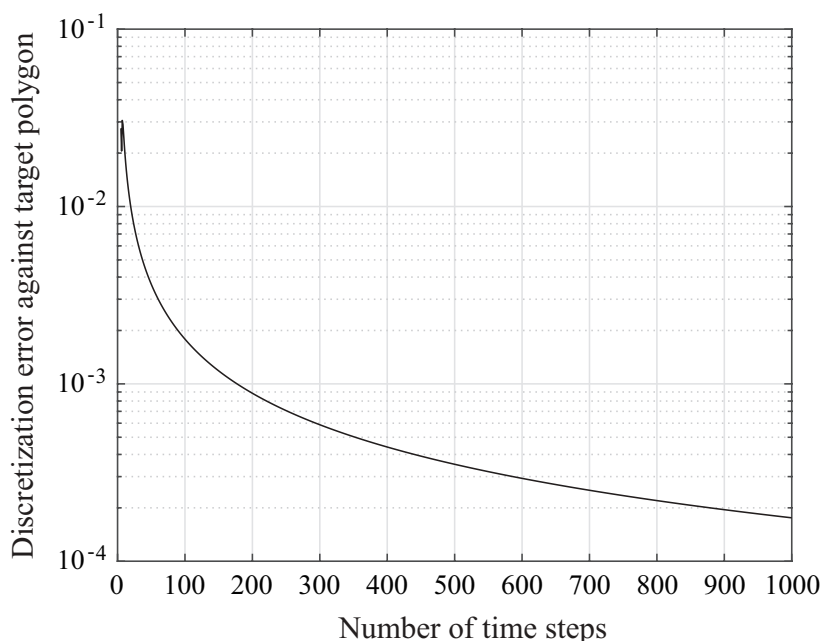


図 4.20. タイムステップ数の増加に従って離散化誤差が減少している. 図中の縦軸は $t = 1$ におけるブレンディングポリゴンとゴールポリゴンの誤差率を表す.

時間をあわせて考察する. 同じ回転数をもつ閉曲線対に対しては, 第3章と比べて大幅な高速化が達成されており, Sederberg らによる結果と比肩する高速性が得られている. またブレンディング曲線の品質についても, 関連手法と比肩する良好な結果が得られていることが確認できる. 回転数が異なる閉曲線対の場合には, 実験3の結果から確認できるように, 角張った遷移よりも提案手法による遷移が好まれる結果となり, 尖点付近における滑らかさがブレンディングの審美性に強い影響を与えることがわかる. また, Knot よりも Angular や Smooth が好まれる結果となったことから, 空間的な対称性に加えて時間的な対象性が審美性の判断に影響することがわかる. さらに実験4において, Sederberg らの手法では補間形状が形状の遷移を想起せず, その結果として審美性が低いと評価されていると考えられる. また Saba らの結

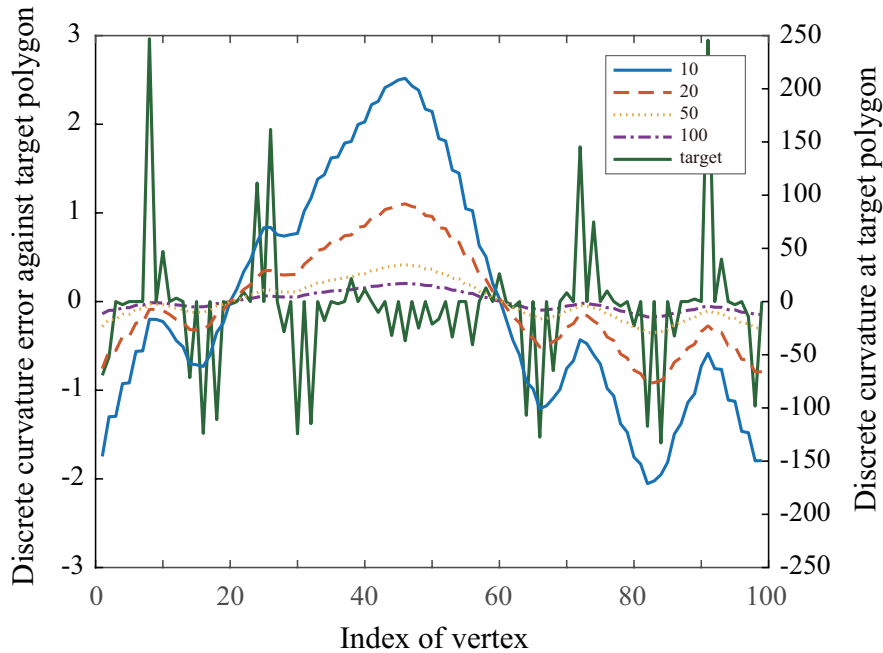


図 4.21. $t = 1$ におけるブレンディングポリゴンとゴールポリゴンの各頂点における離散曲率の差. 図中の横軸は頂点のインデックスを表す. 右の縦軸はゴールポリゴンにおける離散曲率を表し緑のプロットに対応している. 左の縦軸は離散化誤差を表し, それ以外のすべてのプロットに対応している.

果では, やはり生成されたポリゴンが閉じていないため, 審美性に悪影響を与えていることがわかる. Dym らの手法に比べても, 提案手法のほうが高い審美性を有していると判断されていることから, 尖点付近において滑らかなブレンディングが審美性の向上に貢献するという仮説を支持する結果が得られた.

提案手法を用いた閉曲線ブレンディングにはいくつかの制限がある. 一つはブレンディング中にすべての辺長が変化しないという条件のもと曲率フローと閉曲線条件を導出しているため, 表現可能なブレンディングはアイソメトリックなブレンディングに限定されるというものである. すなわち, ユーザによって任意に指定された 2 つの形状間の対応付けを満たすようにブレンディングポリゴンを生成することが困難である. しかし, この問題は各辺長が時間に応じて一定の割合で変化するという条件のもと, 曲率フローと閉曲線条件を導出することにより解決することができると考えている.

また, 実験を通して確認しているように, 時間方向の離散化誤差による影響のため $t = 1$ におけるブレンディングポリゴンがユーザの指定したゴールポリゴンと必ずしも一致しないという問題がある. これはタイムステップ数を増加させることで解決できることを実験的に確認しているものの, 理論的に検証する必要がある.

4.6 本章のまとめ

本章では、前章で提案した曲率フローを用いた閉曲線ブレンディング手法を、異なる回転数を持つ曲線対に対しても適用できるように拡張し、さらに適応的なフローを構成することで計算時間を高速化する手法を提案した。前章と異なり、スタートポリゴンとゴールポリゴンを線形補間により得られる曲率エネルギーの勾配フローを用いて曲率フローを適応的に構成することで、余分なブレンディングポリゴンの生成を抑えている。これにより、アニメーションの生成支援等、インタラクティブな操作が要求される場面においても十分な高速性を実現した。また、異なる回転数を持つ閉曲線対のブレンディングに固有の問題として、ブレンディング中に外角が π となる点（尖点）付近で滑らかなブレンディングが困難であったが、曲率拡散フローを導入することにより、尖点における曲率の乖離をその近傍領域に拡散させることで、滑らかなブレンディングの生成に成功した。主観品質評価実験を通して、提案手法が審美性の向上に寄与することを確認し、同時に高速かつ数値的に安定なブレンディングを達成したことを確認した。

第 5 章

曲率勾配フローを用いた開曲線ブレンディング

本章では，曲率勾配フローを用いた開曲線のブレンディング手法について述べる．（本章の内容は，3 年以内に出版予定である．）

第 6 章

一筆書きアニメーションの対話的中 割り

本章では、形状の意味的關係に基づく補間手法を用いた一筆書きアニメーションの中割り手法について述べる。（本章の内容は、3 年以内に出版予定である。）

第7章

結論

本論文では平面曲線の形状補間問題において、形状の意味的關係に基づく補間指針を示すとともに、曲率フローを用いた平面曲線のブレンディングと、複雑な平面曲線の中割りを高速に計算する手法を示した。曲率フローを用いたブレンディングでは、曲率フローと制約条件をデザインすることにより、特に異なる回転数を持つ閉曲線間であっても審美性の高い補間が実現できることを示した。また、複雑な平面曲線対に対して、意味的關係を高精度に抽出する手法を提案し、時間方向にも連続性を有する中割り手法を提案した。同時に、補間する形状間の意味的關係が弱い部分に対して曲率フローを用いて編集する手法を提案した。

形状の意味的關係に基づく形状補間並びに高速な形状補間といった設計指針は、本来不良設定問題である形状補間問題に対して一つの基準を与えるものである。特に、曲率フローという道具を用いることで、形状を幾何的な視点から捉えたときに明らかになる解析的・位相的性質を陽に取り扱い、これまでに実現できなかった性質を持つ形状補間が実現できることを示した。本論文を通して主張してきたこれらの貢献は、コンピュータグラフィックや計算幾何学だけでなく、リアルタイムな処理が望まれるロボティクス等の分野にまで新しい視点をもたらすものと期待できる。

本論文で提案した曲率フローは、閉曲線間や開曲線間のブレンディングへの応用を示したが、閉曲線と開曲線の間のブレンディングへ応用するためにはさらなる考察を必要とする。また、曲線の伸び縮みがすべての辺について等しい、すなわち等長な変形のみを記述するものである。これらの制限を乗り越えることで、様々な展開が期待できる。本論文では、等長な曲率フローを取り扱ったが、パラメトリゼーションの変化も組み入れた曲率フローを構成することで、形状の意味的關係の保存と空間的な滑らかさを両立し、しかも高速に計算する手法の開発が可能となるだろう。こうした提案をさらに推し進め、本論文で提案した補間指針に基づいた補間の自動化という Inbetweener たちの夢を叶えるような包括的なフレームワークの提案に至ることを大いに期待したい。また、2次元曲面への応用も明確な研究の方向性であろう。特に、異なるホモロジー群を有する形状対の曲率フローを用いた補間手法の開発は極めて興味深い。

最後に、第1章から第6章まで述べた内容を要約して結論とする。

第1章では、本論文の主題である形状補間を形状の時空間表現に基づくものであると位置づ

けた。こうした形状の時空間表現は幾何学的な考察が枢要であることを指摘し、とりわけ解析的な観点と位相的な観点が重要な役割を果たすことを述べた。形状補間がアニメーション生成において中心的な技術である事実を確認し、補間形状が満たすべき性質の優先順位を決定した上で、高速な計算時間を追求することが手法の開発において重要であることを述べた。上述の幾何的な視点から、曲率フローを用いた平面曲線の補間の開発を中心に据えた。特に、補間を実現する曲率フローを設計し、補間形状が満たすべき性質を曲率フローに課す線形制約条件としてデザインすることにより、補間を実現する方針を提示した。また、より広いクラスの平面曲線の補間を取り扱う上で、形状の意味的關係を考慮することが重要であることを指摘した。意味的關係の強弱に応じて、形状補間をブレンディング、中割りを呼称することとし、それぞれ好ましいブレンディング手法の設計指針を述べた。

第2章では、形状補間と強く関連することがらを整理した。まず平面曲線に関する解析的・位相的性質を整理し、曲率、回転数などの基本的用語の定義を行った。次に、曲率フローの数学的定義をもとに、曲率フローがジオメトリ処理においてどのような役割を果たしているかを整理した。さらに、本論文では曲線を座標情報そのものではなく、離散曲率ベクトル空間に射影して形状遷移を記述するものであるため、これまでに提案されている形状補間技術の中から特に、別の空間に射影してから補間を行う手法を概観した。また、形状間の意味的關係を抽出するための対応探索について、コンピュータビジョンやコンピュータグラフィックスへの分野でこれまでに行われてきた手法を概観するとともに、高精度化・高速化を追求した手法について述べた。最後に、本研究で提案した手法によって得られる補間形状の審美性の評価のために用いる主観品質評価実験についてまとめた。

第3章では、本論文で提案する曲率フローを用いたブレンディング手法の核となる、曲率勾配フローを用いた離散閉曲線ブレンディングを提案する。ブレンディング形状の設計に先立ち、任意の時刻において、入力形状対の曲率に対するブレンディング形状の曲率の割合がすべての頂点で一致する、というブレンディング形状が満たすべき設計指針を示した。しかし、この設計指針を厳密に満たす曲率から再構成して得られる曲線は一般に閉曲線とならないことから、閉曲線とするための制約条件を課す必要がある。これまでに提案されてきた閉曲線ブレンディング手法では、主に非線形最適化手法に依拠していたため、ブレンディング曲線の生成に時間を要していた。本章では、閉曲線条件として採用する G^1 連続性条件が、曲率の時間微分に関して線形にかけることを利用し、曲率の発展方程式である曲率フローの時間離散化したステップに閉曲線条件を適用することで閉曲線ブレンディングが高速に達成できることを示した。しかし、この手法では閉曲線の回転数が異なる場合に適用できない等の問題点があった。

第4章では、第3章で述べた手法では制限であった異なる閉曲線対を対象として、より審美性の高いブレンディングを実現する手法を提案した。回転数が異なる場合には、尖点を持つ曲線が必ず生成されてしまうということが数学的に知られている。すなわち、ブレンディングを通して滑らかな曲線を生成し続けることは不可能であり、第3章で述べた設計指針を満たさない。このため、回転数が異なる場合に固有の設計指針を示す必要がある。そこで本研究では、尖点における曲率の乖離をその近傍に拡散させることで審美性の向上を図れるのではないかと、いう仮説のもと、曲率拡散フローを用いたブレンディングを提案した。尖点を持つ曲線を事前

に生成し、その曲線を始曲線とした曲率拡散フローを構成することで、時間的な対称性を持つブレンディングを実現した。こうして生成されたブレンディングは審美性の向上に寄与することを、クラウドソーシングを用いた主観品質評価実験によって確認した。また、第3章では曲率フローの数値計算時に使用したタイムステップを一定としたことにより、求めたい時刻に相当するブレンディング曲線以外にも大量のブレンディング曲線を生成する必要があったため、適応的に曲率フローを構成する手法を提案することで更なる高速化を達成した。

第5章では、これまで閉曲線に対して提案してきた曲率フローを用いたブレンディング手法を開曲線に拡張する手法について述べた。閉曲線の場合では、制約条件として曲線の端点における等号条件のみを考慮することで十分であったが、開曲線の場合は曲線全体が平面にどのようなにはめ込まれているかがより重要となる。このため、回転・並進・スケールの変化も考慮した制約条件を導出する必要がある。そこで本章では、開曲線における制約条件の導出を中心に議論した。特に端点における接ベクトルの変化、端点位置の変化、端点間の長さに関する制約条件を導出した。また、これら新しく導出した線形制約条件は閉曲線条件と異なり、制約条件が直交条件とならない。このため、制約条件を満たす空間がアフィン部分空間となることから、制約空間への射影を計算する手法を導出した。こうして導出した制約条件を組み合わせることにより、長さや端点における接ベクトルが線形に変化するという性質を有するブレンディングを実現した。このようにして得られたブレンディングが、曲率の線形補間によりも審美性が高いことを主観品質評価実験によって確認した。

第6章では、第1章で提案した形状間の意味的關係に基づいた補間指針を検証するため、1本の複雑な曲線で構成された一筆書きアニメーションを題材とした中割り手法を提案した。補間において意味的關係を保存するためには曲線間の対応探索を高精度に行う必要がある。本章では、曲線の各点における局所特徴量を用いた動的計画法による対応点探索手法を提案した。求めた曲線間の対応をもとにスプライン補間によって中割りを行うが、時間的な連続性を向上させるために、隣接フレーム間の情報だけでなく、前後複数フレームの情報を用いた手法を提案した。また、一筆書きアニメーションでは1本の曲線内に意味的關係が強い部分と弱い部分が混在するという観察から、意味的關係が弱い部分に対して、第5章で提案した曲率フローを用いた開曲線ブレンディング手法を用いて局所的に編集する手法を提案した。同時に、全てのプロセスにおいて高速に計算できるアルゴリズムを提案することで、対話的な編集作業を可能とした。提案手法によって得られた中割り結果が、アニメータによる作品と比肩する品質であることを主観品質評価実験によって確認した。

図7.1は、第1章で示した“*Zoo of curves in topological cage*”において、本論文で曲率フローを用いて実現した高速形状補間を示したものである。

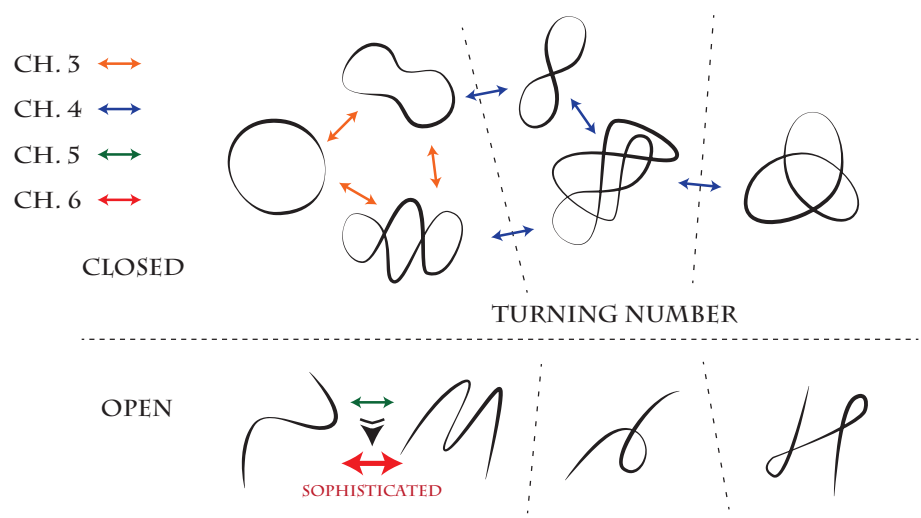


图 7.1. “Zoo of curves in topological cage: revisit”

参考文献

- [AA00] Erling D. Andersen and Knud D. Andersen. The mosek interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In *High Performance Optimization*, pp. 197–232. Springer, 2000.
- [ACOL00] Marc Alexa, Daniel Cohen-Or, and David Levin. As-rigid-as-possible shape interpolation. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pp. 157–164, 2000.
- [Ama] Amazon.com, Inc. Amazon Mechanical Turk. <https://www.mturk.com> (accessed on 2018/1/5).
- [ANB13] Pablo F. Alcantarilla, Jesús Nuevo, and Adrien Bartoli. Fast explicit diffusion for accelerated features in nonlinear scale spaces. In *British Machine Vision Conference*, 2013.
- [AOV12] A. Alahi, R. Ortiz, and P. Vandergheynst. FREAK: Fast Retina Keypoint. In *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 510–517, 2012.
- [BKP⁺10] Mario Botsch, Leif Kobbelt, Mark Pauly, Pierre Alliez, and Bruno Lévy. *Polygon Mesh Processing*. A K Peters, Ltd., 2010.
- [BMP02] S. Belongie, J. Malik, and J. Puzicha. Shape matching and object recognition using shape contexts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 24, No. 4, pp. 509–522, 2002.
- [Bra78] Kenneth A. Brakke. *The motion of a surface by its mean curvature*. Princeton University Press, 1978.
- [Bra92] Kenneth A. Brakke. The Surface Evolver. *Experimental Mathematics*, Vol. 1, No. 2, pp. 141–165, 1992.
- [BS05] Alexander I. Bobenko and Peter Schroder. Discrete willmore flow. In *Proceedings of Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pp. 101–110, 2005.
- [BT52] Ralph Allan Bradley and Milton E. Terry. Rank analysis of incomplete block designs: I. the method of paired comparisons. *Biometrika*, Vol. 39, No. 3/4, pp. 324–345, 1952.
- [BvTH16] Christopher Brandt, Christoph von Tycowicz, and Klaus Hildebrandt. Ge-

- ometric flows of curves in shape space for processing motion of deformable objects. *Computer Graphics Forum*, Vol. 35, No. 2, pp. 295–305, 2016.
- [BW01] David E. Breen and Ross T. Whitaker. A level-set approach for the metamorphosis of solid models. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 7, No. 2, pp. 173–192, 2001.
- [CCW16] Edward Chien, Renjie Chen, and Ofir Weber. Bounded distortion harmonic shape interpolation. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 35, No. 4, pp. 105:1–105:15, 2016.
- [CdGDS13] Keenan Crane, Fernando de Goes, Mathieu Desbrun, and Peter Schröder. Digital geometry processing with discrete exterior calculus. In *ACM SIGGRAPH 2013 course notes*, 2013.
- [CDIO04] Jason H. Cantarella, Erik D. Demaine, Hayley N. Iben, and James F. O’Brien. An energy-driven approach to linkage unfolding. In *Proceedings of the 20th Annual Symposium on Computational Geometry*, pp. 134–143, 2004.
- [Che93] Chaur-Chin Chen. Improved moment invariants for shape discrimination. *Pattern Recognition*, Vol. 26, No. 5, pp. 683 – 686, 1993.
- [CI12] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi II. Generic mean curvature flow I; generic singularities. *Annals of Mathematics*, Vol. 175, pp. 755–833, 2012.
- [CLSF10] Michael Calonder, Vincent Lepetit, Christoph Strecha, and Pascal Fua. BRIEF: Binary Robust Independent Elementary Features. In *Proceedings of European Conference on Computer Vision*, pp. 778–792, 2010.
- [CPS13] Keenan Crane, Ulrich Pinkall, and Peter Schröder. Robust fairing via conformal curvature flow. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 32, No. 4, 2013.
- [CWKBC13] Renjie Chen, Ofir Weber, Daniel Keren, and Mirela Ben-Chen. Planar shape interpolation with bounded distortion. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 32, No. 4, pp. 1–12, 2013.
- [CZ01] Kai-Seng Chou and Xi-Ping Zhu. *The Curve Shortening Problem*. Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [Dav88] Herbert Aron David. *The method of paired comparisons*. Charles Griffin, 1988.
- [DMSB99] Mathieu Desbrun, Mark Meyer, Peter Schröder, and Alan H. Barr. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pp. 317–324, 1999.
- [DSL15] N. Dym, A. Shtengel, and Y. Lipman. Homotopic morphing of planar curves. *Computer Graphics Forum*, Vol. 34, No. 5, pp. 239–251, 2015.
- [Dym] Nadav Dym. website. <http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~nadavd/> (accessed on 2017/10/2).

- [GH86] Michael Gage and Richard S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *Journal of Differential Geometry*, Vol. 23, No. 1, pp. 69 – 96, 1986.
- [GL96] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations (3rd Edition)*. Johns Hopkins University Press, 1996.
- [Gra89] Matthew A. Grayson. The shape of a figure-eight under the curve shortening flow. *Inventiones mathematicae*, Vol. 96, No. 1, pp. 177–180, 1989.
- [GWD⁺08] Eitan Grinspun, Max Wardetzky, Mathieu Desbrun, Peter Schröder, Felix Kälberer, Saurabh Mathur, John M. Sullivan, and Yiyang Tong. Discrete differential geometry: An applied introduction. In *ACM SIGGRAPH ASIA 2008 course notes*, 2008.
- [HCV52] David Hilbert and Stephan Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination*. AMS Chelsea Publishing, 1952.
- [HPP05] K. Hildebrandt, K. Polthier, and E. Preuss. Evolution of 3d curves under strict spatial constraints. In *Ninth International Conference on Computer Aided Design and Computer Graphics*, pp. 40–45, 2005.
- [HPR17] Pascal Huber, Ricardo Perl, and Martin Rumpf. Smooth interpolation of key frames in a riemannian shell space. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 52–53, pp. 313 – 328, 2017.
- [HRS⁺14] Behrend Heeren, Martin Rumpf, Peter Schröder, Max Wardetzky, and Benedikt Wirth. Exploring the geometry of the space of shells. *Computer Graphics Forum*, Vol. 33, No. 5, pp. 247–256, 2014.
- [HRS⁺16] Behrend Heeren, Martin Rumpf, Peter Schröder, Max Wardetzky, and Benedikt Wirth. Splines in the space of shells. *Computer Graphics Forum*, Vol. 35, No. 5, pp. 111–120, 2016.
- [HRWW12] Behrend Heeren, Martin Rumpf, Max Wardetzky, and Benedikt Wirth. Time-Discrete Geodesics in the Space of Shells. *Computer Graphics Forum*, Vol. 31, No. 5, pp. 1755–1764, 2012.
- [IMH05] Takeo Igarashi, Tomer Moscovich, and John F. Hughes. As-rigid-as-possible shape manipulation. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 24, No. 3, pp. 1134–1141, 2005.
- [IOD09] Hayley N. Iben, James F. O’Brien, and Erik D. Demaine. Refolding planar polygons. *Discrete and Computational Geometry*, Vol. 41, No. 3, pp. 444–460, 2009.
- [IT05] Y. Ito and S. Tasaka. Quantitative assessment of user-level QoS and its mapping. *IEEE Transactions on Multimedia*, Vol. 7, No. 3, pp. 572–584, 2005.
- [ITUa] ITU-T Recommendation P.800.2. Mean opinion score interpretation and

- reporting. <https://www.itu.int/rec/T-REC-P.800.2/en> (accessed on 2018/1/5).
- [ITUb] ITU-T Recommendation P.910. Subjective video quality assessment methods for multimedia applications. <https://www.itu.int/rec/T-REC-P.910/en> (accessed on 2018/1/5).
- [JT95] Ollie Johnston and Frank Thomas. *The Illusion of Life*. Disney Press, 1995.
- [KBH06] Michael Kazhdan, Matthew Bolitho, and Hugues Hoppe. Poisson surface reconstruction. In *Proceedings of the Fourth Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pp. 61–70, 2006.
- [Ken84] David G. Kendall. Shape manifolds, Procrustean metrics, and complex projective spaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1984.
- [KHS⁺12] Shizuo Kaji, Sampei Hirose, Shigehiro Sakata, Yoshihiro Mizoguchi, and Ken Anjyo. Mathematical Analysis on Affine Maps for 2D Shape Interpolation. In *Proceedings of the Eurographics / ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation*, pp. 71–76, 2012.
- [KMP07] Martin Kilian, Niloy J. Mitra, and Helmut Pottmann. Geometric modeling in shape space. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 26, No. 3, 2007.
- [KSBC12] Michael Kazhdan, Jake Solomon, and Mirela Ben-Chen. Can mean-curvature flow be modified to be non-singular? *Computer Graphics Forum*, Vol. 31, No. 5, pp. 1745–1754, 2012.
- [LJ07] Haibin Ling and David W Jacobs. Shape classification using the inner-distance. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 29, No. 2, pp. 286–299, 2007.
- [Lof04] J. Lofberg. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pp. 284–289, 2004.
- [Lou27] Louis Leon Thurstone. A law of comparative judgment. *Psychological Review*, Vol. 34, No. 4, pp. 273–286, 1927.
- [Low04] David G. Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 60, No. 2, pp. 91–110, 2004.
- [Luc59] R. Duncan Luce. *Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis*. John Wiley & Sons, 1959.
- [LZW⁺13] H. Li, H. Zhang, Y. Wang, J. Cao, A. Shamir, and D. Cohen-Or. Curve style analysis in a set of shapes. *Computer Graphics Forum*, Vol. 32, No. 6, pp. 77–88, 2013.
- [MBWB02] Ken Museth, David E. Breen, Ross T. Whitaker, and Alan H. Barr. Level set surface editing operators. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 21, No. 3, pp. 330–338, 2002.

- [MM86] Farzin Mokhtarian and Alan Mackworth. Scale-Based Description and Recognition of Planar Curves and Two-Dimensional Shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 8, No. 1, pp. 34–43, 1986.
- [Mos51] Frederick Mosteller. Remarks on the method of paired comparisons: I. the least squares solution assuming equal standard deviations and equal correlations. *Psychometrika*, Vol. 16, No. 1, pp. 3–9, 1951.
- [MS01] Michela Mortara and Michela Spagnuolo. Similarity measures for blending polygonal shapes. *Computers & Graphics*, Vol. 25, No. 1, pp. 13–27, 2001.
- [MS05] Krystian Mikolajczyk and Cordelia Schmid. A performance evaluation of local descriptors. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 27, No. 10, pp. 1615–1630, 2005.
- [MY91] Kurt Mehlhorn and Chee-Keng Yap. Constructive whitney–graustein theorem: Or how to untangle closed planar curves. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 20, No. 4, pp. 603–621, 1991.
- [NBCW⁺11] Andy Nguyen, Mirela Ben-Chen, Katarzyna Welnicka, Yinyu Ye, and Leonidas Guibas. An optimization approach to improving collections of shape maps. *Computer Graphics Forum*, Vol. 30, No. 5, pp. 1481–1491, 2011.
- [Oku10] Kazuhiko Okushita. Red Thread. <https://www.youtube.com/watch?v=ARDBGPV0cWk> (accessed on 2017/9/24), 2010.
- [OS88] Stanley Osher and James A Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 79, No. 1, pp. 12 – 49, 1988.
- [PM90] Pietro Perona and Jitendra Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 12, No. 7, pp. 629–639, 1990.
- [PTBF07] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes (3rd Edition)*. Cambridge University Press, 2007.
- [RRKB11] Ethan Rublee, Vincent Rabaud, Kurt Konolige, and Gary Bradski. ORB: An Efficient Alternative to SIFT or SURF. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, pp. 2564–2571, 2011.
- [RW14] Martin Rumpf and Max Wardetzky. Geometry processing from an elastic perspective. *GAMM-Mitteilungen*, Vol. 37, No. 2, pp. 184–216, 2014.
- [SE02] Tatiana Surazhsky and Gershon Elber. Metamorphosis of planar parametric curves via curvature interpolation. *International Journal of Shape Modeling*, Vol. 8, No. 2, pp. 201–216, 2002.

- [SGWM93] Thomas W. Sederberg, Peisheng Gao, Guojin Wang, and Hong Mu. 2-D shape blending: An intrinsic solution to the vertex path problem. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pp. 15–18, 1993.
- [SK01] Robert Schneider and Leif Kobbelt. Geometric fairing of irregular meshes for free-form surface design. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 18, No. 4, pp. 359–379, 2001.
- [SM97] Cordelia Schmid and Roger Mohr. Local grayvalue invariants for image retrieval. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 19, No. 5, pp. 530–535, 1997.
- [SS05] Tatiana Surazhsky and Vitaly Surazhsky. Sampling planar curves using curvature-based shape analysis. In *Mathematical methods for curves and surfaces*, pp. 339–350. Nashboro press, 2005.
- [SSHS14] Marianna Saba, Teseo Schneider, Kai Hormann, and Riccardo Scateni. Curvature-based blending of closed planar curves. *Graphical Models*, Vol. 76, No. 5, pp. 263–272, 2014.
- [SSTF⁺15] Edgar Simo-Serra, Eduard Trulls, Luis Ferraz, Iasonas Kokkinos, Pascal Fua, and Francesc Moreno-Noguer. Discriminative Learning of Deep Convolutional Feature Point Descriptors. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, 2015.
- [Ste51] S. S. Stevens. Mathematics, measurement, and psychophysics. In *Handbook of Experimental Psychology*, pp. 1–49. John Wiley & Sons, 1951.
- [Sur] SurveyMonkey. SurveyMonkey. <https://www.surveymonkey.com/> (accessed on 2018/1/5).
- [SY14] Y. Sahillioğlu and Y. Yemez. Multiple shape correspondence by dynamic programming. *Computer Graphics Forum*, Vol. 33, No. 7, pp. 121–130, 2014.
- [Tau95] Gabriel Taubin. A signal processing approach to fair surface design. In *Proceedings of the 22Nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, Proceedings of SIGGRAPH, pp. 351–358, 1995.
- [TG11] Kristi Tsukida and Maya R. Gupta. How to analyze paired comparison data. Technical report, University of Washington, 2011.
- [Veg89] Gert Vegter. Kink-free deformations of polygons. In *Proceedings of the Fifth Annual Symposium on Computational Geometry*, pp. 61–68, 1989.
- [VL08] Bruno Vallet and Bruno Levy. Spectral Geometry Processing with Manifold Harmonics. *Computer Graphics Forum*, Vol. 27, No. 2, pp. 251–260, 2008.
- [WBH⁺07] Max Wardetzky, Miklós Bergou, David Harmon, Denis Zorin, and Eitan Grinspun. Discrete quadratic curvature energies. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 24, No. 8-9, pp. 499–518, 2007.

- [WCCL13] Chen-Chi Wu, Kuan-Ta Chen, Chun Yu Chang, and Chin-Laung Lei. Crowdsourcing multimedia qoe evaluation: A trusted framework. *IEEE Transactions on Multimedia*, Vol. 15, No. 5, pp. 1121–1137, 2013.
- [Wer12] Max Wertheimer. Experimentelle studien über das sehen von bewegung. *Zeitschrift für Psychologie*, Vol. 61, No. 1, pp. 161–265, 1912.
- [Whi37] Hassler Whitney. On regular closed curves in the plane. *Compositio Mathematica*, Vol. 4, pp. 276–284, 1937.
- [WII99] Joachim Weickert, Seiji Ishikawa, and Atsushi Imiya. Linear Scale-Space has First been Proposed in Japan. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 10, No. 3, pp. 237–252, 1999.
- [Wil00] Thomas J. Willmore. Surfaces in conformal geometry. *Annals of Global Analysis and Geometry*, Vol. 18, No. 3, pp. 255–264, 2000.
- [Wit83] Andrew P. Witkin. Scale-space filtering. In *Proceedings of the Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 1019–1022, 1983.
- [WS04] Florian Wickelmaier and Christian Schmid. A matlab function to estimate choice model parameters from paired-comparison data. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers*, Vol. 36, No. 1, pp. 29–40, 2004.
- [XPB06] Guoliang Xu, Qing Pan, and Chandrajit L. Bajaj. Discrete surface modelling using partial differential equations. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 23, No. 2, pp. 125 – 145, 2006.
- [YB02] Shin Yoshizawa and Alexander G. Belyaev. Fair triangle mesh generation with discrete elastica. In *Geometric Modeling and Processing*, pp. 119–123, 2002.
- [YTLF16] Kwang Moo Yi, Eduard Trulls, Vincent Lepetit, and Pascal Fua. LIFT: Learned Invariant Feature Transform. In *Proceedings of the European Conference on Computer Vision*, 2016.
- [ZR72] Charles T. Zahn and Ralph Z. Roskies. Fourier descriptors for plane closed curves. *IEEE Transactions on Computer*, Vol. 21, No. 3, pp. 269–281, 1972.
- [上坂 84] 上坂吉則. 開曲線にも適用できる新しいフーリエ記述子. 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J67-A, No. 3, pp. 166–173, 1984.
- [小林 77] 小林昭七. 曲線と曲面の微分幾何. 裳華房, 1977.
- [山田 09] 山田功. 工学のための関数解析. 数理工学社, 2009.
- [東京] 東京大学工学系・情報理工学系等安全衛生管理室. ライフサイエンス研究支援・研究倫理審査. <http://anzen2.t.u-tokyo.ac.jp/anzen2/experiment/lifescience/index.html> (accessed on 2018/1/5).
- [松本 08] 松本幸夫. 多様体の基礎. 東京大学出版会, 2008.
- [畔上 16] 畔上秀幸. 形状最適化問題. 森北出版, 2016.
- [谷村 06] 谷村省吾. 理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何. サイエンス社, 2006.

96 参考文献

- [難波 98] 難波精一郎, 桑野園子. 音の評価のための心理学的測定法. コロナ社, 1998.
- [鹿島 16] 鹿島久嗣, 小山聡, 馬場雪乃. ヒューマンコンピューテーションとクラウドソーシング. 講談社, 2016.