

気泡流乱流の微細流動構造の解明

杉山 和靖

学位論文

気泡流乱流の微細流動構造の解明

東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻

77054 杉山 和靖

目次

1 序論	6
1.1 研究の背景	6
1.2 従来の研究について	9
1.2.1 単一粒子・気泡の運動	9
1.2.2 分散性混相乱流	16
1.2.3 分散性混相流の数値シミュレーション	23
1.3 研究の目的, および, 本論文の内容	28
2 One-way coupling 法による気泡・粒子運動解析	35
2.1 定常セル流れ中の気泡・粒子の挙動	35
2.1.1 はじめに	35
2.1.2 定式化	36
2.1.3 解析手法	39
2.1.4 粒子速度の時間発展に対する粒子緩和運動の影響	40
2.1.5 粒子の沈降・上昇速度, 粒子分布 (カオスの挙動と相転移について)	41
2.2 一様等方性乱流中の気泡・粒子運動	45
2.2.1 はじめに	45
2.2.2 支配方程式	46
2.2.3 計算手法	46
2.2.4 計算条件の設定	48
2.2.5 Preferential concentration に対する St の依存性 (ρ^* の影響)	49
2.2.6 粒子の時間特性・乱流強度・分散	53
2.2.7 Langevin 方程式を用いた粒子分散モデル (粒子の速度変動との整合性について)	57
2.3 第2章のまとめ	59
3 気泡群の直接シミュレーション	93
3.1 矩形格子を用いた計算方法の構築	95

3.1.1	仮定	95
3.1.2	支配方程式	95
3.1.3	気泡表面上での境界条件の設定方法	96
3.1.4	計算手法	97
3.2	計算手法の検証	102
3.2.1	円柱周りに働く抗力係数	102
3.2.2	球周りに働く抗力係数 (定常計算)	104
3.2.3	単一球形気泡・粒子の上昇速度 (非定常計算)	105
3.3	2 気泡の相互作用	108
3.3.1	はじめに	108
3.3.2	計算条件	108
3.3.3	結果と考察	109
3.4	球形気泡群の直接数値シミュレーション	112
3.4.1	はじめに	112
3.4.2	計算条件	112
3.4.3	瞬時の気泡と流れ場の構造	114
3.4.4	上昇気泡群の抗力係数のボイド率依存性	116
3.4.5	上昇気泡群の自己拡散	117
3.4.6	球面調和関数を用いた気泡群周りの速度場の抽出	119
3.4.7	気泡流の Sub-Grid Scale 応力と各種 SGS モデルとの比較・検討	124
3.5	第3章のまとめ	131
4	平均化方程式を用いた分散性混相流モデルの構築	171
4.1	気泡流の平均化方程式の定式化	171
4.1.1	はじめに	171
4.1.2	気泡流の保存方程式の平均化	171
4.1.3	気泡の並進運動方程式	175
4.1.4	気泡流の圧力方程式 (非圧縮性気泡流)	176
4.2	従来の混相流解析手法の問題点と解決手法	177
4.2.1	はじめに	177
4.2.2	質点モデルの問題点	177
4.2.3	従来の平均化方程式の問題点	181
4.2.4	既存の数値モデルにおける非線形項の取扱い	186
4.3	新しい平均化方程式を用いた数値シミュレーション手法の構築	188
4.3.1	気泡の誘起する圧力 (Projection MAC 法の間ステップでの値)	188

4.3.2	気泡近傍で生成される粘性応力のモデリング	195
4.3.3	気泡流のSGS応力モデルの構築	197
4.4	計算手法	200
4.5	Euler-Lagrangeによる解析手順	200
4.6	計算条件	201
4.7	計算結果	201
5	結論	208
	謝辞	211
	参考文献	213
A	チャネル乱流中の粒子運動のLES解析とその問題点	227
A.1	はじめに	227
A.2	計算方法	228
A.2.1	支配方程式	228
A.2.2	LESのSGSモデル	229
A.2.3	SGSから粒子分散への影響	230
A.2.4	計算手法	231
A.3	計算結果と考察	232
A.3.1	単相流での計算結果	232
A.3.2	壁面乱流場における粒子の挙動	232
A.3.3	SGS変動成分から粒子分散への影響についての評価	237
A.4	まとめ	238
B	球形粒子に働く圧力抗力と粘性抗力との比の算出	252
C	ストークス流れにおける球形粒子が誘起する速度場の領域依存性	261
D	並進運動する球形粒子に働く並進減圧	272
E	球形粒子が誘起する平均速度場の評価	297
F	球形粒子が誘起するバルク乱れの評価	303
G	球形粒子近傍速度場のデータベースの構築法	317
H	相対速度・速度勾配テンソルの座標変換	329

I 球形粒子近傍速度場のデータベース

335

J 球形粒子表面圧力の球面調和関数展開

345

Chapter 1

序論

1.1 研究の背景

分散性混相流は、連続相(液体)に系の代表寸法より小さい分散体(気泡・粒子・液滴)が混在した流れであり、多くの自然現象や、工業装置で見受けられる。

最も身近に観測される分散性混相流の例には、雲・雨・霧などの気象が挙げられる。また、近年、重要視されている環境問題として、大気中のエアロゾル、火山灰、海洋の汚染物質の拡散輸送、沿岸域の沈殿輸送が挙げられる。さらに、土木・建設の分野での問題として、河川や海岸での土砂輸送や土石流、火砕流、雪崩などが挙げられる。

工業的分野でも、分散性混相流は重要な問題とされている。特に、分散性混相流の一例である気泡流は、多くの工業装置で見受けられ、非常に注目されている。その幾つかの事例について以下に説明する。

原子力発電プラントでは、原子炉冷却系統での流れ場が気泡流として観測される。特に、原子力開発では、有害な放射性物質を内蔵するために、事故を回避することが絶対であり、高度な安全設計が要求されている。また、沸騰水型炉が開発されるに至り、核分裂で生じる高速中性子を減速される機能に対し、ボイド率が重要であることが判明し、性能の評価の上でも気泡流の現象解明の重要性が指摘されている(「気液二相流の数値解析」, 日本原子力学会熱流動部会編, 1993)。

液体中に存在する微小な気泡が急激に成長・崩壊するキャビテーション現象は、発生した気泡と周囲流体との相互作用によって流動構造が変調し、流体機械の性能に大きな影響を与えるために注目されている。また、気泡の崩壊時に発生する GPa オーダーの高い衝撃圧によって壊食(エロージョン)が引き起こされ、流体機械の耐久性や安全性に悪影響がもたらされる。流体機械の性能を維持し、低コストをはかるためには小型化・高速化が必須であるが、高速流中では圧力変動が大きいので、キャビテーション現象の発生頻度が高くなる。このようなキャビテーション現象の問題に対して、気泡流としての性質を踏まえた研究が行われている。

化学プラントの触媒反応やバイオリアクタなどでは、触媒粒子や微生物の循環・混合を促進するために、容器の底から気泡を吹き出し、その気泡が上昇する際の駆動力が用いられている。特に、水中での滞在時間が長く、体積当たりの界面積が広い微細な気泡の拡散を利用した低エネルギーで高効率な液相化学反応器の開発に注目されており、微細気泡の生成法や数値解析手法の確立に向けた研究が現在行われている（通産省 NEDO プロジェクト 97E04007）。

地下水、海水、原油などを大量に組み上げるエアリフトポンプでは、気泡による浮力が駆動力として利用されている。エアリフトポンプの流動構造は気泡径やボイド率に対して敏感に依存することが知られており、それらの要因と流動構造との関係を明らかにすることが重要視されている。

マイクロ気泡を乱流境界層に吹き込むことによってせん断抵抗が削減されることが知られており（Madavan *et al.*, 1984）、例えば、実際の船舶に対して積極的に応用しようといった研究が行われている（「新機能流体デバイスによる乱流制御」、船舶技術研究所試験研究, 1999～）。抵抗低減の原因には、ボイド率の増大によって実質的な粘性係数が増加し層流化が促進されることが挙げられているが、より詳細な抵抗低減機構に対する知見が求められている。

近年、地球温暖化の問題が切実になっており、その主な原因は大気中へ放出される二酸化炭素である。大気中の二酸化炭素を削減するために、二酸化炭素が高压下で水よりも比重が大きくなる性質を利用して、深海中への投棄することが期待されている。そのプロセスでは、特に気泡流としての性質が重要視されている。

以上の気泡流の問題に対して、「気泡流乱流」としての性質が注目されている。「気泡流乱流」における乱れと気泡運動との相互作用に関して、流体物理的な観点によると、気泡流の持つスケールの多重性が重要であることが知られている。例えば、気泡流に存在する長さスケールには、代表長さが気泡径のミクロスケール、気泡間距離のメソスケール、全体の流動の代表長さからなるマクロスケールなどが挙げられ、多様である（図 1-1 参照）。また、時間スケールについても多様であり、乱れの渦構造の寿命、並進運動する気泡の緩和時間、気泡群の拡散の積分時間などが挙げられる。このように様々なスケールが混在する気泡流では、それらの大小スケール間の相互作用によって、変動性の強い複雑な流れ場が形成されている。従って、気泡流の現象を解明するには、気泡流におけるスケール間の干渉機構を考慮に入れて解析を行うことが必要である。

しかしながら、気泡流の分野では既に多くの研究がなされてきているのにも関わらず、現象に関わる要因が多岐にわたり、複雑であるため、気泡流のスケールの多重性についての理解が乏しいのが現状である。従って、「気泡流乱流」に対する知見は十分に得られているとは言いがたい。このような問題に関し、実験によって気泡流の構造を詳細に捉えることは難しく、数値シミュレーション利用することが有効であると考えられる。

本研究では液体中に多数の気泡が分散している流れである気泡流について、微細な気泡径を有する系を対象として、特に、気泡運動が渦によって受ける影響や気泡間の相互作用によってもたらされる現象に対する機構を解明することを目的とする。さらに、従来から広く使用されている合理的な平均化方程式を用いた気泡流の予測法に適した、より信頼性の高いモデルの確立をはかる。

1.2 従来の研究について

気泡乱流を理解するには、個々の気泡運動の特性や気泡運動と乱れとの相互作用の機構に対する知見が重要である。本節では、気泡だけでなく、分散性混相流一般を含め、「単一粒子・気泡の運動」や「分散性混相乱流」に関して、従来までに得られてきた知見についてまとめ、説明する。また、本研究では数値解析シミュレーションを主体としており、「分散性混相流の数値シミュレーション」についても言及する。

1.2.1 単一粒子・気泡の運動

粒子の運動方程式の記述

気泡流、粒子流の数値解析モデルでは、気泡・粒子の運動を記述する構成方程式が必要である。多くは、単一気泡・粒子に対する運動方程式に基づいて定式化がなされている。単一の気泡や粒子の運動の記述は、Magnaudet (1997) や Michaelides (1997) の最近のレビュー記事において詳しく紹介されている。以下に単一の気泡や粒子の運動に関する現在までに得られた知見について述べる。

粘性無しのポテンシャル流では、粒子運動に働く圧力抵抗が0であるといったダランベールのパラドックス (Landau & Lifshitz, 1959) が知られている。ポテンシャル流中の粒子運動は慣性力 $F_I (m_p \cdot dV/dt)$ 、付加慣性力 $F_A (= 1/2 \cdot m_f \cdot dV/dt)$ 、外力 F_{Ext} との釣り合いによって記述される。

レイノルズ数が0の極限状態の流れ (Creeping Flow) での粒子・気泡の運動を記述する方程式には、Basset-Boussinesq-Oseen (BBO) 方程式 (Hinze, 1975) が知られている。BBO方程式では、静止流体中を対象として粒子運動が記述されており、粒子自身の慣性力 F_I 、付加慣性力 F_A 、定常抗力 F_D 、履歴力 F_H の釣り合いによって書き表されている。Creeping Flow中の粒子運動に対して媒質側の運動を考慮されたものには、Tchen (1947) の式 (Hinze, 1975 参照) や Maxey & Riley (1983) の式が知られている。Maxey & Riley (1983) は粒子運動による乱れの変化が十分に小さい状況を想定し、creeping flow中の粒子の運動方程式を以下のように定式化している。

$$\left(\frac{m_f}{2} + m_p\right) \frac{dV}{dt} = m_p g + m_f \left(\frac{DU}{Dt} - g\right) + F_D + F_H \quad (1.1)$$

媒質流体にせん断速度がある場合には、式 (1.1) に陽には記述されていない気泡・粒子の進行方向に対して垂直方向の力である揚力 F_L が存在する。揚力は慣性の影響によってもたらされることが知られている。

有限レイノルズ数の場合、ナビエ=ストークス方程式が非線形であるため、気泡・粒子運動方程式を理論的に導出することができない。しかしながら、式 (1.1) の形式と同様

に、気泡・粒子に働く力の線形和によって近似することが一般的であり、妥当性について検討されている (Magnaudet, 1997; 高木・松本, 1996). 本研究でのモデル方程式を用いた気泡流解析では、気泡・粒子に働く力を線形和で記述したものをを用いる。気泡・粒子に働く力には、自身の慣性力 F_I , 付加慣性力 F_A , 周囲流体の加速による力 F_P , 浮力 F_G , 抗力 F_D , 揚力 F_L , 履歴力 F_H を考える。この中で、経験式によって記述される F_D, F_L, F_A, F_H を以下に説明する。

抗力

Stokes (1851) (Batchelor, 1967 参照) は Stokes 方程式に基づき、レイノルズ数が 0 の creeping flow において固体球に働く抗力係数を、以下のように導出している。

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (1.2)$$

また、Haramard (1911) や Ribcynsky (1911) (Batchelor, 1967 参照) は、任意の粒子・流体粘性比で、creeping flow 中の粒子に対する定常抗力を以下のように導出している。

$$C_D = \frac{16\mu_f + 24\mu_p}{(\mu_f + \mu_p)Re} \quad (1.3)$$

レイノルズ数が小さく有限である場合 ($0 < Re < 1$)、Oseen (1913) は粒子遠方での対流速度の影響を「Oseen 近似」によって導入し、固体粒子の抗力係数を以下のように導出している。

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) \quad (1.4)$$

後に、Oseen 近似は、微小なレイノルズ数を摂動パラメータとしたときの、摂動展開方程式としては正しくないことが示されている。しかしながら、creeping flow の結果を $O(Re^1)$ まで正しく摂動展開した「解適合展開法」(Proudman & Pearson, 1957) による解析によると、Oseen (1913) の抗力係数はレイノルズ数の 1 次のオーダーまで合っていることが示されている。

Clean bubble に対する働く抗力係数に関して、 $O(Re^0)$ まで展開した解は以下のように書き表される。

$$C_D = \frac{16}{Re} \left(1 + \frac{Re}{8} \right) \quad (1.5)$$

高レイノルズ数 $Re \gg 0$ の場合、球形 clean bubble の運動によって誘起される流れ場はポテンシャル流の流れ場に近く、球形 clean bubble の抗力係数がポテンシャル流の抗力係数に漸近することが知られている。渦度なし流れの場合、球形粒子に働く抗力は、抗力による仕事と流体内部で粘性によって散逸されるエネルギーとが等しいといった Levich (1949)

のエネルギー散逸理論 (Landau & Lifshitz, 1959 参照) から導かれ、以下のように書き表される。

$$C_D = \frac{48}{Re}. \quad (1.6)$$

さらに, Moore(1963) は, 気泡の境界層と気泡の後流について考慮して, $O(Re^{-3/2})$ まで展開して抗力係数を算出している。

中間レイノルズ数域における抗力係数は, 理論的に求めることができず, 実験や数値解析によって明らかになっている。なお, 従来の気泡・粒子・液滴に働く抗力係数の実験値は Clift *et al.* (1978) によって整理されている (図 1-2)。

Schiller & Naumann (1933) は, 剛体球に働く抗力について, 以下のように示される実験式を得ている。

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687}) \quad (1.7)$$

この実験式は, 今日の混相流解析においても広く用いられるものである。また, 水道水中における気泡について, Sridhar & Katz(1995) の画像処理を用いた実験によると, レイノルズ数 20~80 での気泡に働く抗力は, Schiller & Naumann (1933) の固体粒子に対する実験式と一致することが示されている。

信頼性の高い数値実験結果として, Mei(1993) は剛体球に働く抗力係数を直接数値シミュレーションによって求め, 以下のように示される相関式を提案している。

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right), & Re &\leq 0.01 \\ &= 1 + 0.1315 Re^{0.82-0.05 \log_{10} Re}, & 0.01 < Re &\leq 20 \\ &= 1 + 0.1935 Re^{0.6305}, & 20 < Re &\leq 260 \end{aligned} \quad (1.8)$$

さらに, Mei *et al.* (1994) は, 同様に, 有限レイノルズ数における気泡に働く抗力係数を数値シミュレーションによって求め, 以下のように示される相関式を提案している。

$$C_D(Re) = \frac{16}{Re} \left(1 + \left(\frac{8}{Re} + \frac{1}{2} (1 + 3.315 Re^{-1/2}) \right)^{-1} \right) \quad (1.9)$$

気泡の場合, その径が大きくなると, 表面張力と圧力とのバランスによって, 界面曲率に変化し, 変形がもたらされる。その結果, 気泡径が大きい場合の抗力係数は変形の影響を強く受けることが, 実験的に知られている (図 1-2(Clift *et al.*, 1978 より))。気泡の変形を考慮した, 信頼性の高い数値シミュレーションには, Ryskin & Leal (1984) の軸対称 2 次元定常計算や, 高木 (1995) の 3 次元非定常計算が挙げられる。

前述したように, 不純液体中の気泡の上昇速度は, 固体粒子の値に近いことが実験観測されており (Sridhar & Katz, 1995; 図 1-2, 1-3(Clift *et al.*, 1978 より)), 微量な不純物濃度に敏感に依存すると考えられている。そのメカニズムについて, Cuenot *et al.* (1997) は, 球形気泡界面での表面張力勾配の不純物依存性 (不純物に対するマランゴニ効果) に

着目し、不純物の輸送過程を解き、抗力係数の不純物濃度に対する依存性を評価している。また、山本(1999)は、同様な手法を変形気泡の運動に適用し、マランゴニ効果が気泡の抗力にもたらす影響を算出している。

さて、気泡流では、分散体体積率(ボイド率)が重要なパラメータであるが、抗力係数もボイド率に依存することが知られている。Zuber(1964)は、沈降する粒子に対し、分散体が集積した場合の終端速度 U_p と、単一粒子の場合における終端速度 U_T に対し、過去の実験データを整理して、以下の相関式(Brinkman-Roscoe 方程式)が実験結果を良く再現することを示している。

$$C_D(f_p) = C_D(f_p) \Big|_{f_p=0} \frac{1}{(1-f_p)^{4.5}} \quad (1.10)$$

ここで、 f_p は分散体の体積率を表す。また、Ishii & Zuber (1979) は粒子・液滴・気泡に対する抗力係数の分散体体積率依存性を示している。Ishii & Zuber (1979) によると、気泡流の場合には、気泡形状によって分類されている。理論的な研究に関して、Sangani *et al.* (1991) は、Creeping flow を対象として、多重極展開法による動力学シミュレーションを行い、rigid bubble の抗力係数のボイド率依存性を以下のように得ている。

$$C_D(f_p) = C_D(f_p) \Big|_{f_p=0} \frac{1+2f_p}{(1-f_p)^3} \quad (1.11)$$

揚力

気泡や粒子に働く揚力は、実験や理論や数値解析により現在多くの議論がなされているところである。Creeping flow における揚力は、Kinetic Reversibility(Leal, 1992) によって 0 であることが知られている。従って、気泡や粒子に働く揚力には慣性力の影響が重要である。

微小な慣性の影響に関して、Saffman (1965, 1968) は適合漸近展開法を用いて、(1) 並進レイノルズ数とせん断レイノルズ数 $Re_{sh} (= (ReAw)^{1/2})$ が微小 ($0 < Re, Re_{sh} \ll 1$)、(2) せん断レイノルズ数が並進レイノルズ数に対して卓越 ($Re \ll (ReAw)^{1/2}$)、との条件の下、粒子に働く揚力を導出している。さらに、McLaughlin (1991) は Saffman (1965) の理論を任意の Aw/Re に対して適用できるような定式化を行い、粒子に働く揚力を算出し、定式化している。 $0 < Re \ll 1$ における、clean bubble に働く揚力は、Legendre & Magnaudet (1997) によって正しく計算され、McLaughlin (1991) の結果に対して $(2/3)^2$ 倍となることが示されている。

$0 < Re \ll 1$ における揚力に対する粒子の角速度の影響について、Drew (1978) はせん断流中の回転粒子に働く揚力を理論的に計算し、粒子回転の揚力への貢献が 0 になることを示している。

ポテンシャル流での粒子に働く揚力は、速度場が渦の伸縮の構造に由来して渦度が歪められるために解くことが難しいことが知られている。ポテンシャル流の揚力は、せん断が十分に小さいといった仮定の下、最近になってようやく、Auton(1987)によって導出されている。

気泡に働く揚力の実験測定について、Sridhar & Katz (1995) は気泡の軌跡を画像処理することによって揚力を導出している。そして、レイノルズ数が 20~80 の範囲での揚力が渦度の $1/4$ 乗に比例し、液相の粘性に依存しないことを示している。また、揚力の実験式を用いて定式化された気泡運動方程式により予測される気泡軌跡は実験結果と良好に一致することが示されている。

球形粒子に働く揚力の数値計算について、Komori & Kurose (1996) は $Re = 500$ までの剛体球に働く揚力の計算を行っている。その結果、 $Re = 50$ 程度で、揚力の符号が変わることを示している。また、Legendre & Magnaudet (1998) は clean bubble に働く揚力の計算を行い、高レイノルズ数域での揚力は Auton(1987) の表記に漸近すること、また、Auton(1987) の理論解析で制限されていた A_w の条件に依存しないことを示している。また、揚力を生み出す要因について、低レイノルズ数では気泡表面で生成される渦度の非対称な外部流による輸送が支配的であるのに対し、高レイノルズ数では、気泡外部の渦度輸送の非対称性や渦度の伸縮による影響が支配的であることを示している。また、気泡に働く揚力は、気泡の変形の影響に強く依存することが実験的に観測されているが(仮屋崎, 1987 など)、高木 (1995) は、非定常 3 次元数値シミュレーションを行い、実験で観測されるように変形によって揚力の変化する方向が変化することを示している。

付加慣性力

付加慣性力は物体周りの流動に関するポテンシャル理論によって導出される。ポテンシャル流中の球形粒子の場合、付加慣性力は付加質量係数 $\beta (= 0.5)$ と周囲流体の密度と粒子体積周囲流体に対する相対加速度によって以下のように記述される。

$$\mathbf{F}_A = \beta \left(\frac{d(V_p \rho_f \mathbf{u}_p)}{dt} - \frac{D_t(V_p \rho_f \mathbf{u}_f)}{Dt} \right) \quad (1.12)$$

この付加付加質量係数 β は、ストークス流れの場合も同じ 0.5 である (Landau & Lifshitz, 1959)。

中間レイノルズ数域での β はレイノルズ数や加速度に依存しても、流体物理的に何ら問題はない。Odar & Hamilton (1964) はオイルタンク中での振動粒子について、様々な振動数において粒子に働く力を測定し、付加慣性力を実験的に算出している。その結果、付加質量係数 β が Re に独立であることを示し、 β が加速度 $Ac (= 2a|d(U-V)/dt|/|U-V|^2)$ に対して、減衰関数として表されることを示している。しかしながら、実験では付加質量係数は、履歴力や定常抗力をモデル化した式を介して算出され、直接測定することが

できない。数値シミュレーションを用いて付加質量係数を算出する試みについて、Rivero *et al.* (1991) (Magnaudet, 1997 参照) は、ステップ状に加速度を変化させ、固定剛体球や固定気泡に働く力を計算することによって付加質量係数を算出している。その結果、広範囲のレイノルズ数、加速数に渡って、付加質量係数 β が 0.5 であることを示している。Rivero *et al.* (1991) によると、実験と数値解析との違いは、Odar & Hamilton (1964) の実験で履歴力の評価に低レイノルズ数でしか適用できないはずの Basset 力を不当に用いていることが原因であると説明されている。また、他者の数値計算結果 (Mei *et al.*, 1991; 高木・松本, 1996) から、Rivero *et al.* (1991) と同様に $\beta = 0.5$ としたモデルが妥当であることが示されている。

付加付加質量係数のボイド率依存性に関して、Zhang & Prosperetti (1994) はポテンシャル流のアンサンブル平均化方程式を用いて、導出している。また、Sangani *et al.* (1991) は、ストークス流中の気泡運動を多重極展開法によって理論的に解き、導出している。

履歴力

履歴力とは、粒子に働く力を定式化したときに、初期値に依存する形で積分表記される力である。例えば、非定常ストークス方程式を考えると、時間微分項が 1 階微分、粘性項が 2 階微分で記述され、微分の階数が異なることに起因して、粒子に働く力を算出すると 1/2 階の時間微分に相当する項が現れる。この非整数階の時間微分項は、初期値に依存する積分表記で記述される (詳細については例えば Kim *et al.*, 1998)。

Creeping flow 中において、固体粒子に働く履歴力は Basset 力として知られており、以下のように書き表される。

$$\mathbf{F}_H = \mu a \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) \quad (1.13)$$

$$K(t-\tau) = \frac{3}{2} \left(\frac{4\pi a^2}{\nu(t-\tau)} \right)^{1/2} \quad (1.14)$$

履歴力は、粒子表面で生成される渦度の拡散と関連するために、粒子表面での渦度の生成に対する境界条件が重要である。Creeping flow 中での clean bubble に働く履歴力は、最近、Yang & Leal (1991) によって理論的に導出され、式 (1.13) の積分核が以下の記述で与えられている。

$$K(t-\tau) = 4\pi \exp \left(\frac{36\nu(t-\tau)}{4a^2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{36\nu(t-\tau)}{4a^2} \right) \quad (1.15)$$

履歴力は粒子表面上での渦度の生成の影響が強い。従って、clean bubble の場合、渦度の生成は固体粒子に比べて小さいために、履歴力は Basset 力に比べると小さい。

中間レイノルズ数の場合の固体粒子に働く履歴力について, Mei & Ardian (1992) は弱い振動流中での数値解析と $Re \ll 1$ での低周波数の漸近解析を行い, 式 (1.13) の積分核について, 以下ように示されるモデル式を提案している.

$$K(t-\tau) = 3\pi \left(\left(\frac{\pi\nu(t-\tau)}{a^2} \right)^{1/4} + \left(\frac{\pi|U-V|(t-\tau)^2}{2\nu a f_H(Re)^3} \right)^{1/2} \right)^{-2} \quad (1.16)$$

ここで, $f_H(Re) = 0.75 + 0.105Re$ である. また, Mei *et al.* (1994) は, 中間レイノルズ数の場合の clean bubble に対する履歴力を数値解析によって導出している. 高木・松本 (1996) は, 静止流体中を上昇する単一気泡について, 気泡の界面でフリースリップ条件, 固着条件の両方に対して数値解析を行い, Mei (1993), Mei *et al.* (1994) の提唱するモデルとの良好な一致を示している.

1.2.2 分散性混相乱流

混相乱流の分野では、渦と粒子運動との相互作用に対する知見が重要であり、これまでも、多くの研究がなされてきている。混相乱流で見られる特徴的な現象は、以下の3つに分類される。

- 粒子分散 (Particle Dispersion)
- 渦構造に対する粒子の選択的な集積 (Preferential Concentration)
- 乱流変調 (Turbulence Modulation)

以下に、上記の分類に沿って、従来の混相乱流の研究成果について示す。

粒子分散

粒子分散は、例えば、塗料の噴霧特性や燃焼における火炎の拡散特性を知る上で重要である。粒子分散に対する知見は、特に、流れの代表寸法に比べて粒子サイズが十分に微小とみなせる固気混相流の分野で、多く得られている。この粒子分散は、分散相の乱れ強度と関連があり、混相乱流のモデル化をはかるためにも重要な乱流統計量である。

乱流中の流体粒子の分散に関する理論的研究には、Taylor(1921)の乱流拡散理論が知られている。この理論に基づくと、流体粒子の拡散係数は、乱れ度の2乗と積分時間(速度のLagrangian自己相関係数の積分値)の積によって書き表される。また、Taylor(1921)の乱流拡散理論によって与えられる拡散係数は、一般的な乱流モデルである渦粘性モデルの渦粘性係数に一致する。

混相流での粒子分散の理論的研究に関して、Hinze(1975)の著書においてTchenの理論が紹介されている。Tchenの理論では、乱れから粒子運動の影響が統計的に扱われている。例えば、Tchenの理論によると、一様等方性乱流中の粒子のrms速度は、粒子緩和時間が大きいほど小さくなることが示されている。しかしながら、統計論的であるTchenの理論には、粒子が渦を直進する「crossing-trajectories」効果や次節で示す「preferential concentration」などの影響は無視されており、適用範囲に限界がある。従って、粒子分散を理解するには、実際の乱流場を対象とした実験や数値計算が重要となる。

粒子分散の実験に関して、Snyder & Lumley(1971)は一様等方性乱流中の粒子速度をラグランジュ的に測定している。その結果、粒子緩和時間が小さくても、「crossing-trajectories」効果によって、粒子変動速度の積分時間が大きくなることを示している。また、Lee & Durst(1982)は、鉛直管内乱流中の粒子分散に関して、グラスビーズ(100, 200, 400, 800 μm)の運動を測定し、壁面近傍の流体速度に比べ境界層にそった粒子速度が大きくばらつくこと

を示している。また、Krämer & Leuckel (1988) はガラスビーズ ($26 \sim 143 \mu\text{m}$) を対象として、ほとんど等方とみなせる管内中心部分における流体と粒子の rms 速度の関係に対して実験相関式を導いている。粒子分散に対する重力の影響に関して、粒子が一様な外力を受けて運動する場合の粒子分散は、無重力を仮定したときとは異なることが知られている。例えば、重力が働いている場合の粒子分散に関する実験 (Wells & Stock, 1983) や数値計算 (Wang & Maxey, 1993; Squires & Eaton, 1991) によると、粒子変動速度の Lagrange 相関が速く減衰することが示されている。

固気二相流の分野における粒子分散に対する研究では、近年、流体運動から粒子運動へ影響を考慮した「One-way coupling 法」と呼ばれる計算手法を用いた数値シミュレーションが主流となっている。この手法は、固気二相流で粒子濃度が希薄な場合 (質量混合比が 0.2 以下) に有効な手段であり、実験とほぼ一致した結果が得られることが示されている (例えば、Yuu & Umekage, 1991)。また、Elghobashi & Truesdell (1992) は DNS を用いて等方性乱流中の粒子分散を計算し、Snyder & Lumley (1971) の実験と整合する結果を得ている。また、Tang *et al.* (1992) は粒子分散特性が、preferential concentration の影響に強く依存し、ストークス数 (粒子の緩和時間と流体の積分時間との比) によって大きく異なることを示している (図 1-4)。また、Rouson *et al.* (1997) は非等方性の強い流れ場における粒子分散特性に関して、チャンネル乱流の DNS を用いた one-way coupling 法によって粒子運動を計算し、粒子緩和時間が大きい粒子ほど壁面付近での乱れ強度が大きくなることを示している。これは、Tchen の理論 (Hinze, 1975) と逆の傾向であり、非等方性の強い流れ場での粒子の乱れが、局所的な乱れの応答だけではなく、流れの非等方な構造にも影響を受けることを示している。

乱流中の粒子分散のモデル化と関連し、粒子分散現象を理論的に記述する方法についても、最近研究が進められている。例えば、Reeks (1991) は、Maxwell-Boltzmann 方程式と等価な「kinetic-equation」に基づいて、粒子の数密度関数の輸送方程式を定式化している。また、 $k-\epsilon$ 方程式を用いた数値解析に適した粒子分散モデルとして、Sommerfeld *et al.* (1993) は、Langevin 方程式に基づいた計算手法を構築している。

さて、自然循環型の気泡流では、気泡数密度が拡散的な振舞いを示すことが知られている (Serizawa *et al.*, 1991)。上述した低濃度固気二相流の場合の粒子分散は、乱流渦の乱れに対して分散体が受動的に運動し、拡散的に振舞う影響のみが支配的であった。それに対し、気泡流での拡散現象は、個々の気泡が乱れを作り出し、気泡間が相互作用する影響にも強く依存している。例えば、気泡群の拡散的な振舞いに関し、村井 (1996) はボイド率や気泡径をパラメータとして、気泡ブルームの数値シミュレーションを行っている。その結果、気泡分布に対して気泡間の流体力学的な相互作用が重要であることを示している。

Preferential concentration

壁面乱流の中に水素気泡を流した場合、ストリーク構造が具現化することが知られている。これは、水と密度が異なる気泡が、特定の乱れの構造に対して選択的作用を受け、特定の領域に集積するために起こる現象である。このような現象は preferential concentration と呼ばれる (Eaton & Fessler, 1994)。Preferential concentration に対する知見は、乱流場を統計論的に扱う理論を用いて得ることが困難であり、主に、実験や数値解析を通じて得られてきた。

固気二相噴流中の実験測定によると、連続する渦輪中のサドル領域に粒子の高濃度領域が形成されることが示されている (Longmire & Eaton, 1989)。他にも、実験によって、選択的に乱流構造に対して粒子が集中することが知られている (Rashidi *et al.*, 1990; Kafouri *et al.*, 1995; Pedinotti *et al.*, 1993 など)。しかし、preferential concentration は実験で得ることが難しい乱流の局所的な構造と関連があり、実験によってその機構を解明することは困難である。従って、より有用な知見は「one-way coupling 法」による数値シミュレーションを用いた解析によって得られてきている。Maxey (1987) は一様等方性乱流を漸近法により構築し、慣性の効果によって重い粒子が低渦度、高ひずみ速度の領域に集まることを示している。また、Squires & Eaton (1991) は、DNS を用いて無重力場下の一様乱流中における重い粒子運動を計算し、ストークス数が大きな粒子が、渦のコア部分から離れ、高ひずみ速度、低渦度の領域に選択的に集積することを示している。また、Wang & Maxey (1993) は、preferential concentration に対する重力の影響に関して、DNS を用いて、一様乱流中における沈降する重い粒子運動を計算し、下降流の部分に粒子が数多く存在することを示している。さらに、preferential concentration は粒子の慣性の応答時間と Kolmogorov の時間スケールが同じ程度であるときに最も顕著であることを示している。気泡の場合に関して、Wang & Maxey (1993) は DNS を用いて一様等方性乱流中の気泡運動を計算している。その結果、気泡が渦のコア部分に集中して分布し、重い粒子とは逆の傾向であることを示している。非等方な流れ場に関して、Pedinotti *et al.* (1993) は DNS を用いて壁面乱流中の粒子運動の計算を行い、粒子分布のストリーク構造が現れることを示している。特に、粒子は低速ストリークに集積し、その度合は粒子の応答時間が中間スケールの場合に preferential concentration が強く、応答時間が大きいときや小さいときには粒子分布が一様になることを示している。また、次節で説明する乱流変動との関係について、Squires & Eaton (1994) は DNS を用いて粒子運動を解析し、非一様な乱れエネルギースペクトルの歪みが preferential concentration によってもたらされることを示している。

乱流変調

気泡や粒子を含む流れ場では、乱流状態が変化することが広く知られている。混相流の研究の究極的な目的は乱流変調の解明にあると言える。

乱流変調について大まかに考えると、その重要な要因は、密度の異なる分散体の混入に伴い、混合体の慣性が増加することである。従って、固気混相流の場合には質量混合比、気泡流の場合には気相体積率(ボイド率)が、乱流変調に対する重要な要因である。

固気混相流では、分散体密度が大きいため、乱流の渦スケールよりも小さな粒子径で粒子体積濃度が低くても、質量混合比が大きければ乱流変調がもたらされる。従って、詳細な非圧縮性単相流の乱流構造と関連づけた解析が可能である。一方、気泡流では、多くの場合、気泡径が乱流渦スケールよりも大きく、ボイド率が数パーセント以上に及ぶため、気泡流中の乱れの微細構造は単相乱流の場合とは全く異なっている。従って、これまでの気泡流の解析の主眼は、多次元的な流れ場の詳細な構造よりも、ボイド率をパラメータとして、相平均化した質量・運動量・エネルギー輸送に関して1次元的な統計量を得ることにあつた。以下に、固気混相流、固液混相流、気泡流の乱流変調に関する従来の研究成果について示す。

乱流変調の先駆的な実験として、Sproull(1961)は固体粒子が添加された管内乱気流場の流路抵抗を測定し、抵抗値が減ることを報告している。Saffman(1962)はこの抵抗低減のメカニズムが粒子の添加に伴い流れ場の安定性が変化することに起因するものと考え、粒子を含む流れのOrr-Sommerfeld方程式を構築し、ポアズイユ流れに対して安定解析を行っている。その結果、粒子の添加に伴う流れ場の安定性は、粒子径や数密度によって安定化と不安定化の両方に変化するを示している。

乱流強度の変化を測定したものについて、Lee & Durst(1982)は円管内流中の乱流構造の変化についての測定し、小さな粒子の添加によって、乱流強度が減衰することを報告している。また、Tsuji & Morikawa(1982)は、粒子を含む水平円管内流をLDV(Laser Doppler Velocimeter)を用いて測定し、粒子の沈降に伴い、粒子分布が非一様化し、その結果平均速度がゆがめられることを示している。そして、小さな粒子が添加された場合には乱流強度が減衰するのに対して、大きな粒子が添加された場合には逆に乱流強度が増大することを報告している。また、Rashidi *et al.*(1990)は、チャネル乱流中における固液混相流を対象として乱流強度を測定し、粒子径が大きい場合には、粒子体積率が $O(10^{-4})$ と低くても乱流強度が大きく増大することを示している。また、Rogers & Eaton(1991)は、乱流境界層での流体への粒子の影響について、質量混合比が20%程度で乱れが減衰することを示し、質量混合比が重要な要因であることを報告している。また、Kulick *et al.*(1994)は、重い粒子を含む垂直チャネル乱流を対象として質量混合比が最大80%までについて実験を行い、乱流変調に対する粒子の緩和時間、粒子の質量分率、壁面からの距離に対する依存性を調べている。その結果、特定の乱れの周波数に対し、粒子の添加に伴

い乱れが弱められることを示している。

粒子添加に伴い乱流強度が増減する機構は、未だに統一的な見解が得られていないものの、理論的なアプローチによっていくつかの提案がなされている。Hetsroni (1989) は噴流 (Hetsroni & Sokolov, 1971; Tsuji *et al.*, 1988 など) や管内流 (Lee & Durst, 1982; Tsujiet *al.*, 1984 など) などの混相乱流の実験データをまとめ、粒子レイノルズ数 Re_p によって、乱れを増減を整理している。Hetsroni (1989) は、粒子の後流で渦が定在する場合 ($Re_p < 400$) には乱れが減衰し、粒子からの渦放出が起きる場合 ($Re_p > 400$) には乱れが増大すると述べている。また、Yuan & Michaelides (1992) は、Hetsroni (1989) と同様の考え方に基づいて、乱れを増減を予測するモデルを提案している。

Gore & Crowe (1989) は、様々な混相乱流の実験データを集めて、粒子径 d_p と乱れの積分スケール l_e の比によって乱れを増減を整理している。Gore & Crowe (1989) によると、 $d_p/l_e < 0.1$ では、乱れの強さが減少し、 $d_p/l_e > 0.1$ では、乱れの強さが増加する傾向にあると述べている。また、Elghobashi (1994) のレビュー記事によると、Gore & Crowe (1989) と同様に、粒子体積率と粒子緩和時間によって、乱れが増減が整理されるとしている (図 1-5 参照)。Elghobashi (1994) によると、固体粒子の混入比 (体積濃度, ϕ_v) が $\phi_v > \times 10^{-6}$ の場合に乱流変調の効果が現われるが、 $\phi_v < \times 10^{-6}$ では、その影響は無視できる (いわゆる, one-way 干渉) としている。さらに、粒子体積率が $10^{-6} \sim 10^{-3}$ では、流体と粒子の相互作用 (two-way 干渉) が生じ、粒子の体積率が 10^{-3} 以上では粒子と粒子の相互作用 (four-way 干渉) が生じるとしている。

他にも、乱流変調の機構に対する説明として、Kenning & Crowe (1997) は粒子間スケール λ と乱れの積分長さ L_f を用いた、ハイブリッド長さスケール L_h を定義し、沈降粒子が誘起する乱れの生成が L_h によって整理されることを述べている。さらに、従来の固気混相乱流の乱流強度に対する測定データをまとめ、乱れが増減がハイブリッド長さスケール L_h で整理されることを示している。また、Sato *et al.* (1999) はラグランジアン PIV 計測によって、管内乱流中の固体粒子群が生成する乱れを測定し、Kenning & Crowe (1997) と同様、粒子間長さスケールが乱流変調に対して重要な役割をはたしていることを示している。また、Sato *et al.* (1999) は、粒子群間における個々の粒子運動と乱れとの非等方的な干渉現象の理解が乱流変調のメカニズムの解明に重要であると報告している。

気泡流の分野では、実験的な乱流変調に関する研究が行われてきている (Serizawa *et al.*, 1975; Lance & Bataille, 1991 など)。その結果、気泡流乱流の場合には、気泡の混入に伴いほとんどの場合乱れが増大し、ボイド率に強く依存することが示されている。また、気泡流を記述する方程式について、Kataoka & Serizawa (1989) は、二相の体積率や界面輸送の影響を考慮して気泡流の質量・運動量・エネルギー輸送方程式の定式化を行っている。さらに、Serizawa *et al.* (1991) は、気泡流の $k-\epsilon$ 方程式の相関項に対するモデリングを行い、相分布や乱れ強度が Serizawa *et al.* (1975) の実験結果を再現し得ることを示してい

る。しかしながら、 k と ε の輸送方程式には、完結問題を満足するための未知項が多く含まれ、そのほとんどが経験的なモデル定数であり、分散体を含む流れに特有な、局所的な相互作用を詳細に解析するには向かないと考えられる。

粒子と乱れとの相互作用の数値計算では、多くの場合、粒子が受ける抗力の反力が流体運動量のポイントソースとして扱われる、two-way coupling 法が用いられている。この手法は、 $0 < Re_p < 1$ の場合のみにかぎって有効とされており、解析対象が限定されている。従って、粒子から放出される渦が乱れに及ぼす影響は扱うことができない。しかしながら、two-way coupling 法を用いることによって、乱流構造と粒子との相互作用について詳細に調べることが可能であり、これまでに多くの知見が得られてきた。

Squires & Eaton (1990) は、DNS を用いて、一様等方乱流中の粒子と流体との相互作用を解析し、粒子の添加に伴い全体的な乱流エネルギーが散逸し、乱れ度が減衰することを示している。そして、乱れエネルギーの減衰は、粒子の緩和時間より、質量混合比に強く依存することを示している。また、Elghobashi & Truesdell (1993) は、DNS を用いて、減衰一様乱流中を重力によって沈降する粒子が添加されている系を対象として計算している。その結果、速度場の高波数成分のエネルギーが相対的に増大することを示し、これが乱れの散逸率の増大によってもたらされることを述べている。さらに、沈降粒子が非一様な乱れを生成し、乱れエネルギーが重力方向に増大することや、重力と垂直方向速度が小さなスケールから大きなスケールへと逆カスケードする様子を示している。

気泡流の場合にも、固気混相流と同じような two-way coupling 法による数値解析が行われはじめている。気泡流の乱流変動は、固気混相流の場合と異なり、流体と粒子の運動量交換よりも、局所的な気泡体積率変化に着目して計算が行われている (Ruetche & Meiburg, 1994; Sugiyama & Matsumoto, 1998)。しかしながら、気泡を含む乱流の乱流変動を数値計算するに、特に気泡径が小さいといった制限が必要であり、実際の気泡流よりも径の小さな気泡のみしか適用することはできない。また、研究例は少なく、まだ、多くの検討すべき問題が残されている。

さて、境界層内に微小な気泡 (マイクロ気泡, Microbubble) を吹き込むことにより摩擦抵抗が低減することが知られている (例えば, Merkle-Deutsch, 1990 によるレビュー)。この現象は、例えば、船体の底部にマイクロ気泡を吹き込むことにより、せん断抵抗を低減することに期待されている。実験例について、例えば, Madavan *et al.* (1984) は多孔質板を介して発生させた気泡を境界層に吹き込み、壁面に働くせん断抵抗を測定し、単相流に比べ最大 80% もの抵抗低減が得られることを報告している (図 1-6 参照)。また、土井ら (1991) や高橋ら (1997) は、船形模型を用いて、実際の船舶での低減効果を調べている。マイクロ気泡によって抵抗が低減するメカニズムは、その詳細はわかってはいないが、その一つの要因として実効粘性の増加により、低レイノルズ数化し、壁面付近の乱れが抑制されることによってもたらされることが考えられている (Madavan *et al.*, 1985)。

この低レイノルズ数化の影響は、日夏 (1995) の数値解析によって検討されている。日夏 (1995) は、希薄懸濁粒子を含む流れの実効粘性係数がボイド率に依存して増大すること (Einstein, 1906, 1911 (Batchelor, 1967 参照)) に着目し、チャネル乱流の LES を行い、高ボイド率領域では層流化し、抵抗低減することを示している。また、最近の直接数値シミュレーションを利用した研究例として、Kanaï (1998) は密度関数法を用いて壁面乱流中に変形気泡が存在する系を解析し、気泡の変形が抵抗低減に対して重要な要因であることを報告している。

1.2.3 分散性混相流の数値シミュレーション

近年の計算機の発達に伴い、Computational Fluid Dynamics(CFD)によって合理的に流体解析が行われるようになってきており、その進歩は目覚ましい。混相流の分野でも CFD を用いた流動予測が行われているが、混相流では相間の不連続性を持つために、単相流の場合に比べて定式化には工夫が必要である。従って、これまでに、計算の目的に応じて様々な数値計算手法が提案されている。それらは、大まかに以下の3つに分類される。

(1) 「直接数値シミュレーション」

粒子界面上での応力条件を境界条件として直接扱う手法である。流体運動では NS 方程式が、粒子運動では粒子の慣性力と粒子に働く表面応力の釣り合いの式 (Newton の運動方程式) がそれぞれ直接計算される。

(2) 「微小粒子を含む混相乱流数値シミュレーション」

連続相の乱流場は、DNS や LES を用いて NS 方程式を解くことによって得られ、(1) の場合と同様である。ただし、粒子運動方程式についてはモデル式によって記述される。

(3) 「平均化方程式を用いた数値シミュレーション」

不連続性を有する流れ場に対して空間・時間的な平均操作を施すことによって、分散相と連続相をともに連続体として近似する計算手法である。

以下に、上記の分類に沿って、従来の粒子・気泡を含む流れの数値解析の研究成果について示す。

直接数値シミュレーション

レイノルズ数が 0 の極限状態にあるストークス流中の多数の粒子を含む流れの従来の計算方法は、ストークス動力学法 (例えば、Brady & Bossis, 1988)、多重極展開法 (例えば、Sangani *et al.*, 1991)、境界積分法 (例えば、Zhou & Pozrikidis, 1993; Loewenberg & Hinch, 1996) が挙げられ、粒子の混入量と見掛け上の物性値の関係などについての知見が得られている。また、ポテンシャル流中の球形気泡群の運動解析 (Sangani & Diwania, 1993) によると、水平方向に平板状の粒子クラスター構造が形成されることや抗力の時間依存性が小さくなることなどの結果が得られている。しかしながら、ストークス流では非線形な慣性力を生み出す機構について、ポテンシャル流では粒子周囲のバルク流の渦度の影響についてそれぞれ無視されており、実現象における粒子を含む流れの理解には、流体の慣性や粒子界面が生成する渦度の影響が考慮して、ナビエ=ストークス方程式を直接数

値シミュレーション (DNS) することが重要となる。

粒子運動の高精度な解析に関し、粒子数が1個の場合については、合理的な境界条件の設定が可能となる境界適合する格子を用いた方法が有効である。例として変形を伴う気泡運動の計算について挙げると、境界適合する直交格子を用いた有限差分法 (FDM) によって軸対象2次元定常解析 (Ryskin & Leal, 1984) や3次元非定常解析 (Takagi & Matsumoto, 1995) が行われ、気泡に働く抗力や変形を精度良く捉えられることが示されてきた。しかしながら、粒子数の多い場合には境界適合する格子の形成が困難であり、FDMによる計算を行うことは事実上不可能である。

多粒子系の解析法の1つには、移動する粒子の境界に適した要素分割を行う有限要素法 (FEM) が挙げられる。計算例には、Johnson & Teduyar (1999) による円管中を落下する1000個程度の球形粒子の3次元解析や、Hu (1996) による2次元チャネル中の200~300個の円柱群の2次元解析が挙げられる。もう一つの解析法は矩形格子を用いるFDMであり、粒子表面位置を同定できる関数を利用され、粒子表面上での境界条件が満たされるような操作が施される。このFDMを用いた方法は、さらに、変形する流体粒子を対象とする方法と剛体粒子を対象とした方法に分類される。

変形界面を有する問題を対象とした計算手法には、マーカーセルを用いるMAC法 (Harlow & Welch, 1965)、グリッド内部の分散相体積率を用いるVOF法 (Hirt & Nichols, 1981)、界面からの距離を用いるLevel Set法 (Sussman, *et al.*, 1994)、界面がラグランジュ的に追跡されるFront Tracking法 (Unverdi & Tryggvason, 1992) が挙げられる。これまで行われてきた計算例には、Tomiyama *et al.* (1995) のVOF法を用いた4個の変形気泡の3次元解析、Esmaceli & Tryggvason (1996, 1998, 1999) のFront Tracking法を用いた300個までの2次元気泡の2次元解析と8個までの気泡の3次元解析などがある。このような粒子変形が考慮できる解析の問題点について、粒子界面の移流に連続関数を用いる手法 (MAC法, VOF法, Level Set法) は低次精度の差分スキームを用いて安定化をはかる必要があり数値的散逸がもたらされること、Front Tracking法は界面曲率の算出精度が保証されるように粒子界面上の要素を分割する手順が複雑であること、が挙げられる。

矩形格子を用いるFDMで剛体粒子群を対象とした手法では、粒子の運動をニュートン則に基づき、粒子表面応力による力、体積力、慣性力とのバランスによって記述し、粒子の重心位置を追跡する。粒子から流体への作用には、粒子と流体との速度差分を運動量輸送方程式の対流項に導入し、体積力として扱う方法 (Peskin & McQueen, 1989; Pan & Banerjee, 1997) や粒子内部の格子点上に粒子速度を与える方法 (滝口ら, 1998) が挙げられる。このような方法では、粒子の変形を扱うことができないが、定式化が簡単であり、高次精度スキームを用いた数値解析が可能である。

微小粒子を含む混相乱流数値シミュレーション

「混相乱流の直接シミュレーション」と称されているものの多くは、乱流の長さスケールよりも微小な粒子を含む系を対象とし、流体について直接シミュレーションが行われている。しかしながら、粒子の運動にはモデル式(例えば Maxey & Riley, 1983 の式)が用いられており、厳密な意味で直接計算ではない。このようなシミュレーションは、主に、乱れた気流中に微小な重い粒子が含まれる系を対象として多く行われている。そのような、計算手法は、Crowe *et al.* (1996) のレビュー記事に詳しい。

さて、粒子と流体との相互作用について、流体から粒子への作用のみを考慮して粒子から流体への影響を無視する計算手法は one-way coupling 法と呼ばれる。One-way coupling 法は、乱流中の「粒子分散」や「preferential concentration」の解析を目的とした手法であり、乱流の変調について扱うことができない。「乱流変調」を扱う計算手法は、two-way coupling 法と呼ばれ、粒子から乱れへの作用についてモデリングされている。殆んどの two-way coupling 法による混相乱流解析では、ストークス動力学法(例えば、Brady & Bossis, 1988)のように、粒子が受ける抗力の反力を流体運動量のポイントソースとして扱っている、ポイントフォースモデルが用いられている。このような計算手法が妥当であるのは、以下の条件が満たされるときである。

- (1) 粒子径が乱れの最小長さスケール(コルモゴロフ長さスケール)に比べて十分に小さいこと、
- (2) 粒子の相対速度が十分に小さく粒子レイノルズ数が1よりも十分に小さいこと
- (3) 粒子の体積濃度が十分に小さいこと

多くの混相乱流の解析では、上記の条件を逸脱している場合が多いように見受けられる。しかしながら、従来の研究では、このような問題に対し、さしたる検討がなされておらず、中間レイノルズ数の場合でもポイントフォースモデルが用いられているのが現状である。

平均化方程式を用いた数値シミュレーション

混相流では相間に不連続面が存在するため、流体の方程式を連続関数によって一意に記述することは困難である。また、混相流の不連続性を考慮することが可能であっても、分散体が系の中に多数分散している混相流の場合、計算機のメモリと計算速度には限界があり、直接数値計算(DNS)によって現象を解明することは膨大な計算負荷を必要とする。従来の混相流の解析では、連続相と分散相に対してNS方程式を時間・空間的に平均操作を施すことによって導かれる「平均化方程式」を用いて、両相の変数を連続体として扱う

手法が広く用いられてきている。また、平均化操作によって場が粗視化されるために、解析精度は下がるものの、計算資源は低減される。このような、平均化方程式を用いた数値シミュレーションは、主に気液の体積率分布が重要である気泡流で発達している。

平均化方程式に基づく気液二相流解析モデルには、混合流体モデルと二流体モデルがある。混合流体モデルにはさらに、均質流モデル、スリップ流モデル、ドリフトフラックスモデルに分類される。まず、均質流モデル (Homogeneous Model) は気相と液相との相対速度がないとして、定式化されている。これは気泡流が均一な混合体として扱われ、方程式の数が少なく、簡便であり、従来、利用されてきた。例えば Shida ら (1986) の翼周りの粘性気泡流動や Ikohagi ら (1994) の Cavitating Jet Flow が挙げられる。この均質流モデルは気液のスリップ速度が小さい系でのみ妥当である。実際の気泡流においては気液のスリップ速度の影響が流動特性を支配する大きな要因であるために、限られた場合 (微小重力、超微細気泡) のみ適用可能である。

スリップ流モデルは、相間の速度差をスリップ比によって記述し、このスリップ比についてモデリングしたものである。このモデルは管内環状流 (Stratified flow) のみに適用可能である。

ドリフトフラックスモデルでは、混合体の流速差各相のドリフト速度として定義し、これを用いて方程式が定式化されている。ドリフトフラックスモデルにおけるドリフト速度は、ボイド率の関数として表され、様々な気液二相流の流動様式 (気泡流、スラグ流、フロス流) に対して適用されている。また、実験値を用いることによって気泡の合体、分裂を表現することが可能であるため、特に気体流量の多いスラグ流での適用に対して、その真価を発揮する。しかしながら、構成方程式は等方的なマクロスケールでの平均化に基づくために、一次元管内流のみしか有効ではなく、多次元的な流動や外部流への適用が困難である。

二流体モデルは、質量、運動量、エネルギーの輸送方程式を平均化することによって導かれたものであり、気液間の質量移動、応力伝達、熱移動などの界面輸送を扱うことが可能である。二流体モデルは主に原子炉冷却系統の流動解析において使用されており、有名なものには Liles ら (1984) の TRAC-PF1 コード、Ransom ら (1985) RELAP5-MOD2 コードが挙げられる。また気泡流で重要となってくる気液間のスリップ運動の定式化など、混合流体モデルに比べ、流動の非定常性や保存性について、よく実現象に則した記述が可能である。また多次元解析に応用すること可能であることから、現在の気液二相流解析では主流となっている。二流体モデルは NS 方程式の平均操作によって導かれていることから物理的根拠が明確なものであり、二相流を記述する支配方程式としては正しい。しかしながら、方程式系を完結させるためには、方程式の平均操作によって派生する、相間の相互作用項や非線形項 (単相流でのレイノルズ応力項に相当) に対する何らかの構成方程式が必要になってくる。しかしながら、混相流では、相間項の数が単相流に比べて非常に多

く、ほとんど未解決のままであり、気液間の構成方程式の定式化が十分に整備されていない。また、二流体モデルを用いた解析の多くは、物理的な根拠の乏しい実験式・経験式が用いられており、詳細な解析に向いていない。以上の問題点については今後検討されるべき課題であると考えられる。

ボイド率が低い気泡の合体、分裂が無いとした限定された仮定の下では、上で示されたモデルよりも、厳密な方程式の記述が可能である。例えば、西川 (1987) は気泡数密度の保存性を利用した「数密度モデル」と呼ばれる方程式系を導いている。数密度モデルでは二相の質量保存式と気液の均一流体としての運動量保存の式が用いられている。また、気泡の並進運動の記述には、よく知られた単一気泡に働く力の釣り合いの式が用いられている。さらに、村井 (1996) は圧縮性、非圧縮性の流体が混在する気泡流解析に適した数値解析スキームについて、数密度モデルを基にした圧力方程式を導出している。

現在、分散性混相流の数値解析で主流となっているものには、分散相を流体と同様に連続体として扱うオイラー法と、個々の粒子の運動を追跡するラグランジュ法 (粒子追跡法) に大別される。一般に粒子追跡法は粒子の慣性運動が支配的な場合に多く用いられており、特に固気混相乱流の分野で発達している計算手法である。気泡流の分野では、村井 (1996) によってラグランジュ法が導入されている。村井 (1996) は、数密度モデルの方程式系を基に、液相についてはオイラー的、個々の気泡運動についてはラグランジュ的に取り扱うオイラー=ラグランジュモデル (Euler-Lagrange model; EL model) を構築している。そして、この EL モデルを用いて気泡ブルームの数値解析を行い、実験で観測される気泡分布を再現し得ることを示している。また、EL モデルを用いることによって、オイラー法に比べて、気泡分布が高精度に得られることを示している。

平均化方程式によって解析された気泡流の数値解は、特に村井 (1996) によって開発された EL モデルを考えると、直接計算ではないにも関わらず、実験結果を良好に再現することが示されている。この理由について、マクロな気泡運動の非一様性、非平衡性が強いときには、気泡流の平均化方程式において気泡流特有の渦度の生成機構が反映されているためである (第 4 章参照)。しかしながら、個々の気泡が誘起する境界層や剥離構造の影響は、既存の平均化方程式を用いたモデルに反映されていない。従って、個々の気泡運動がもたらす局所的な乱れの構造や、一様に気泡が分布し、統計的に平衡状態にある場合の気泡間の相互作用については、既存の気泡流の解析手法で正しく計算されない。

1.3 研究の目的, および, 本論文の内容

本研究の目的は, 微細な気泡径を有する場合の気泡流を対象として, 気泡運動が渦によって受ける影響や気泡間の相互作用によってもたらされる現象を解明することである。さらに, 従来から広く使用されている合理的な平均化方程式を用いた気泡流の予測法に適した, より信頼性の高いモデルの構築をはかる。

第2章は, 「One-way coupling 法による気泡・粒子運動解析」と題し, 渦により気泡・粒子運動が受ける影響を調べている。特に, 乱流渦の life time, 気泡の緩和時間, 気泡群の拡散の積分時間などの, 気泡流の時間スケールの多様性に着目して, 考察を行っている。まず, セル状流れやの一樣等方性乱流中の気泡・粒子運動を, 粒子緩和時間, 密度比, 重力をパラメータとして計算し, 気泡と粒子の運動の渦構造に対する指向性の違いについて整理する。次に, 一樣等方性乱流中の気泡・粒子運動について, 直接数値シミュレーションを用いた解析を行い, 気泡と粒子の乱流統計量を計算する。乱流中に重い粒子を含む場合には理論的・数値的研究によって多くの知見が得られているが, 特に preferential concentration について, 気泡の場合の結果との違いについて照らし合わせる。また, 気泡と粒子の乱流統計量について, 乱れの渦構造を無視した既存の統計的理論との比較を行い, 理論の適用限界について論じる。また, Langevin 方程式を用いた粒子分散モデルについて, 粒子緩和時間をパラメータとしたときの, 粒子乱流強度の再現性について調べる。

第3章は「気泡群の直接数値シミュレーション」と題し, 多数の上昇気泡の運動を直接計算し, 気泡によって形成される流れ場の詳細を調べる。特に, 気泡間の相互作用によってもたらされる, ミクロ=メゾスケールの現象の解明に重点を置いて, 解析を行う。まず, 多数の気泡を扱うための新しい計算手法を構築し, 従来の分散粒子の含み系に対する実験や計算結果との定量的な比較を行い, 計算手法の妥当性, 整合性についての検討を行う。そして, 構築された計算手法を用いて, 2個の気泡運動や空間的に周期的な領域における上昇気泡群の運動を直接数値シミュレーションし, 気泡間の相互作用について定性的な考察を行うとともに, 気泡群の抗力係数や気泡が誘起する乱れなどの統計量を算出し, 詳細な知見を得る。

第4章は「平均化方程式を用いた分散性混相流モデルの構築」と題し, まず, 既存の混相流解析手法(ポイントフォース法, 二流体モデルなど)における問題点を指摘するとともに, 流体の物理に則した数学的議論を行い, 問題点の解決手法を提案する。そして, 第3章における直接数値シミュレーションの結果を踏まえて, 新たな気泡流解析手法を構築し, その有効性について議論する。

そして第5章が「結論」であり, 本研究によって得られた新しい知見についてまとめられている。

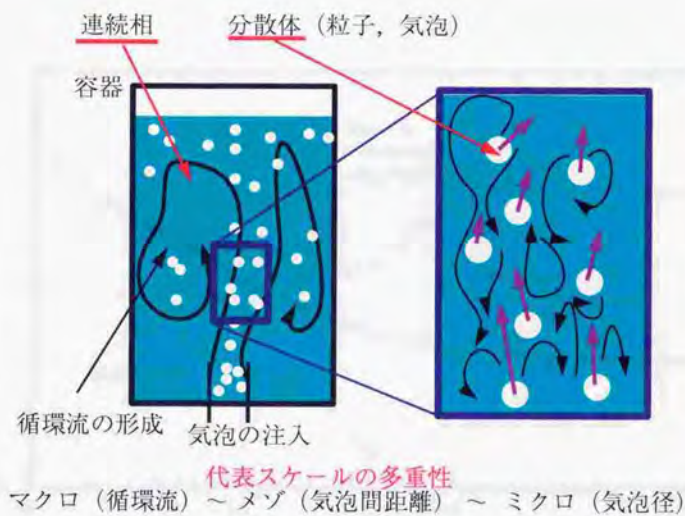


Fig. 1-1 分散性混相流における多重スケール構造の説明図 (例・混合容器内の流れ)

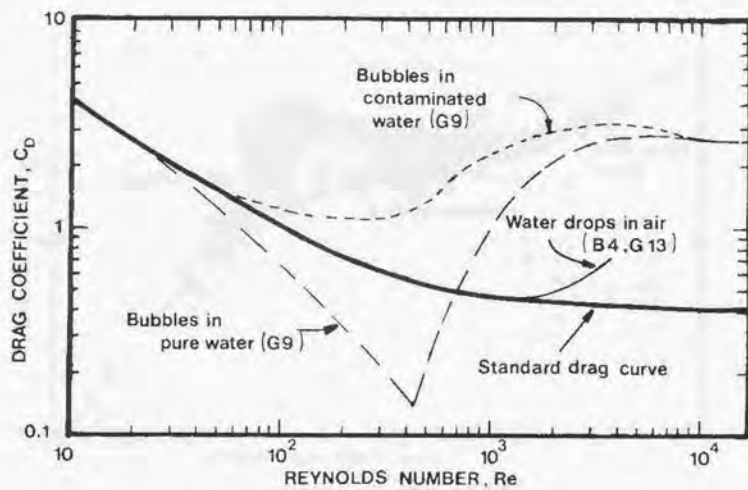


Fig. 1-2 Drag coefficient as function of Reynolds number for water drops in air and air bubbles in water, compared with standard drag curve for rigid sphere. (Clift *et al.*, 1978)

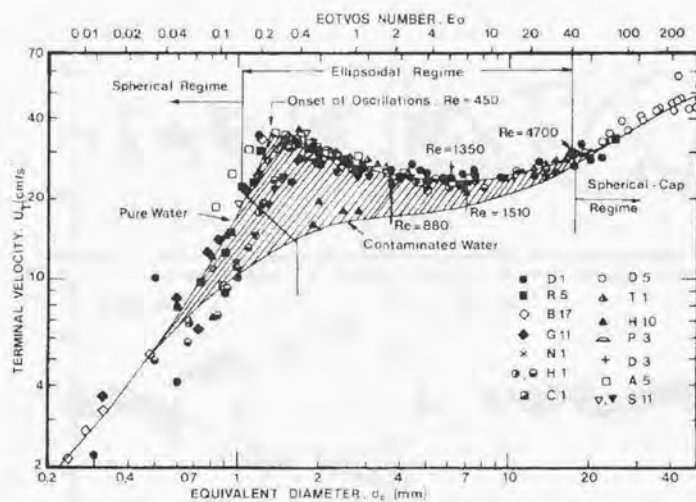


FIG. 1-3 Terminal velocity of air bubbles in water at 20°C

Fig. 1-3 Terminal velocity of air bubbles in water at 20°C (Clift *et al.*, 1978)

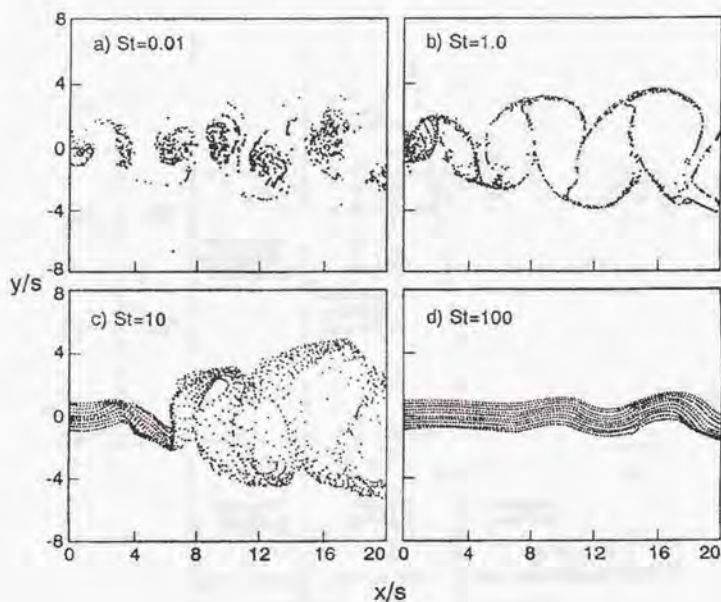


Fig. 1-4 Instantaneous particle dispersion patterns from numerical simulation of a spatially developing plane wake. (Tang *et al.*, 1992)

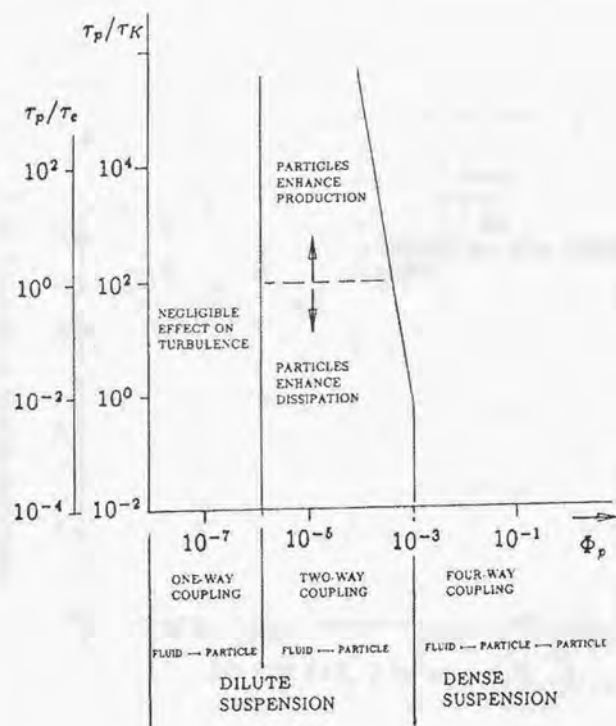


Fig. 1-5 Map of regimes of interaction between particles and turbulence. (Elghobashi, 1994)

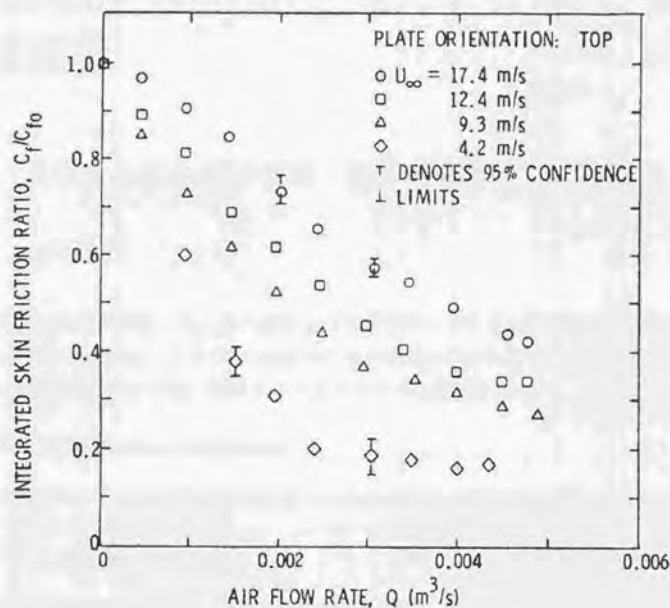


Fig. 1-6 Ratio of integrated skin friction in the presence of microbubbles to skin friction without microbubbles as a function of air flow rate. (Madavan *et al.*, 1984)

Chapter 2

One-way coupling 法による気泡・粒子運動解析

2.1 定常セル流れ中の気泡・粒子の挙動

2.1.1 はじめに

混相乱流の分野では、渦と粒子運動との相互作用に対する知見が重要であり、これまでも、多くの研究者によってその理解のための研究がなされてきた。混相乱流で見られる特徴的な現象については、おおまかに以下の3つに分類される。

- (1) 乱流変調 (Turbulence Modulation),
- (2) 渦構造に対する粒子の選択的な集積 (Preferential Concentration)
- (3) 粒子分散 (Particle Dispersion)

実際の分散性混相流では、粒子から流体への作用によって (1) で示された「乱流変調」がもたらされる。しかし、その乱流変調の影響が十分に小さく、無視できる場合には、流体運動に対する粒子運動の作用を無視して、流体運動から粒子運動に対する作用のみを考慮した解析が可能である。このような手法は、流体・粒子の相互作用のうち、流体から粒子への1方向のみの運動量輸送で記述されていることから、one-way coupling 法と呼ばれる。この、one-way coupling 法は、(2) と (3) で示された「選択的な集積」や「粒子分散」の解析に対しては有力な手段であり、従来、多くの有益な研究成果が得られている。

さて、渦運動から粒子運動への作用を支配する要因には、粒子径、重力、密度比、渦の長さスケール、流体の粘性係数など、多くのものが挙げられる。従って、分散性混相流では粒子と流体の持つ時間・空間のスケールが多様であるために、複雑な現象が生まれる。

そのような現象の理解には、第一に、簡単化された条件下で、様々なパラメタに対する動的挙動を調べることが有効であろう。

ナビエ=ストークス方程式を満たす渦として最も簡単化されたものには、空間で周期的なセル流れ場 (cellular flow field) が挙げられる。既存の定常セル流れ場における粒子運動の解析について、Maxey (1987) は、粒子の緩和時間、重力の影響をパラメタとして計算を行っている。その結果、流体よりも重い粒子は沈降速度が静止流体中よりも増加すること、軽い粒子は渦中心付近に集積しやすく上昇速度が静止流体中よりも減少することが示されている。しかしながら、調査しているパラメタの範囲が限定されたものとなっている。特に、Maxey (1987) の解析では、流体よりも重い粒子に対する挙動に対する調査に主眼が置かれているため、軽い粒子に対する議論が十分ではない。そこで、本節では気泡運動と渦との相互作用に対する様々なパラメタの依存性を調べるために、定常セル流れ場における気泡運動の解析を行う。また、重い粒子に対しても同様な解析を行い、結果を照らし合わせる。

2.1.2 定式化

2次元非圧縮性流体において、空間的に周期的な NS 方程式の解の 1 つに Taylor-Green 渦 (Taylor, 1923) が挙げられる。Taylor-Green 渦の流れ関数 Ψ は以下のように書き表される。

$$\Psi(x, y, t) = \frac{\omega_0}{k^2} \exp(-\nu k^2 t) \sin(k_x x) \sin(k_y y) \quad (2.1)$$

ここで、 ν は動粘性係数、 ω_0 は渦度のピーク値である。また、 k_x, k_y はそれぞれ、 x, y 方向に対する周期渦の波数である。 x, y 方向に対する周期長さをそれぞれ、 L_x, L_y と書き表すと以下に示される関係が成り立つ。

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x}, \quad k_y = \frac{2\pi}{L_y} \quad (2.2)$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (2.3)$$

この解の特徴は NS 方程式を以下のように分離することが可能であることである。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{U} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.5)$$

このような分離が可能であることは、流れ関数の線形的な分離が可能であることを表している。すなわち、式 (2.4) が満たされるような $\Psi(x, y, t)$ を、線形的に重ね合わせしても

のも式(2.4)が満たされる。つまり、Taylor-Green 渦の支配方程式は非線形な NS 方程式であるのに対して、その流れ関数は線形的な性質を有している。

本研究では、外力によって流れ関数が定常状態に維持されているようなセル流れ (cellular flow) を想定し、1つの波数成分のみを考える。式(2.1)の定常解は、以下のように書き表される。

$$\Psi(x, y) = \frac{\omega_0}{k^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \quad (2.6)$$

このとき、渦度 ω 、圧力 p 、速度 u, v についてはそれぞれ以下のように書き表される。

$$\omega(x, y) = k^2 \Psi(x, y), \quad (2.7)$$

$$p(x, y) = p_0 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + k^2 \Psi^2 \right], \quad (2.8)$$

$$U_x(x, y) = \frac{\omega_0 k_y}{k^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y), \quad (2.9)$$

$$U_y(x, y) = -\frac{\omega_0 k_x}{k^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y). \quad (2.10)$$

本研究では、 $k_x = k_y$ の場合を対象とする。無次元化には以下のように示される長さ・速度スケールを用いる。

長さスケール:

$$\tilde{L} = \frac{L}{2\pi} \quad (2.11)$$

速度スケール:

$$\tilde{U} = \frac{\omega_0 L}{4\pi} \quad (2.12)$$

このとき、 $x^* = k_x x$, $y^* = k_y y$ と記述すると、無次元化された流れ関数は以下のように書き表される。

$$\Psi^*(x^*, y^*) = \sin(x^*) \sin(y^*), \quad (-\pi \leq x^*, y^* \leq \pi). \quad (2.13)$$

このとき、速度分布、圧力分布、渦度分布は図 2-1 のように示される。

粒子の運動方程式は、Maxey & Riley (1983) の式を適用する。この式は粒子レイノルズ数が 0 の極限状態にある場合の固体粒子に対して成り立つ。本研究では、いわゆる、one-way coupling 法を用いて計算を行う。すなわち、流体運動から粒子運動への作用は考慮するものの、粒子運動から流体運動への影響については無視する。また、Faxén 項、履歴項は無視する。以上の仮定により、粒子の運動方程式は以下のように書き表される。

$$\frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{\rho_f}{2} + \rho_p \right) \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{\rho_f}{2} + \rho_f \right) \frac{D\mathbf{U}}{Dt} + 6\pi\nu\rho_f a(\mathbf{U} - \mathbf{V}) + \frac{4\pi a^3}{3} \mathbf{g}(\rho_p - \rho_f) \quad (2.14)$$

ここで, U は流体速度, V は粒子速度, ρ は密度, g は重力加速度, a は粒子半径, 添字の p, f はそれぞれ粒子, 流体を示す. また, D/Dt は流体の実質時間微分であり, 定常状態で $D/Dt = U \cdot \nabla$ と書き表される. ここで, 密度比 ρ^* , 粒子緩和時間 τ_p を以下のように定義する.

$$\rho^* = \frac{\rho_p}{\rho_f}, \quad (2.15)$$

$$\tau_p = \frac{a^2}{9\nu}(2\rho^* + 1). \quad (2.16)$$

式 (2.15)(2.16) を用いると, 静止流体中における粒子の沈降・上昇速度 W は以下のように書き表される.

$$W = 2g\tau_p \frac{\rho^* - 1}{2\rho^* + 1} \quad (2.17)$$

ここで, 式 (2.14) を式 (2.15)(2.16)(2.17) の関係を用いて書き直すと, 以下のように書き表される.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{2\rho^* + 1} \frac{DU}{Dt} + \frac{U + W - V}{\tau_p}. \quad (2.18)$$

式 (2.18) に対し, 式 (2.11)(2.12) に示された長さ・速度スケールで無次元化を施すと, 以下のように書き表される.

$$\frac{dV^*}{dt^*} = \frac{3}{2\rho^* + 1} \frac{DU^*}{Dt^*} + \frac{U^* + W^* - V^*}{\tau_p^*}. \quad (2.19)$$

従って, 粒子運動を記述するパラメータは ρ^* , $\tau_p^* (= \tau_p \bar{U} / \bar{L})$, $|W^*| (= |W| / \bar{U})$ の3つである. また, 粒子位置 X^* に対する方程式は以下のように書き表される.

$$\frac{dX^*}{dt^*} = V^* \quad (2.20)$$

2.1.3 解析手法

式 (2.19) で示された粒子の運動方程式は、時間に対して離散化し、時間積分する。なお、空間に対して、粒子位置に対する流体速度は式 (2.9)(2.10) によって解析的に与えられ、離散化の必要はない。

粒子初期位置は、セル領域を 32×32 のグリッドに等分割し、それぞれのグリッドの中心位置に設定する。サンプル粒子数は 1024 である。重力方向は、 x 方向とする。従って、 $W_y^* = 0$ であり、 W_x^* をパラメタとする。また、時間積分法について、式 (2.19) で示される粒子速度の時間積分は Adams-Bashforth 法、式 (2.20) で示される粒子位置の時間積分は Crank-Nicolson 法を適用する。また、初期の粒子速度について、流体に対する相対速度を $|W^*|$ とする。パラメタは、以下のように示される。

Table 2-1. Parameters for calculation of particle motion in cellular flow.

ρ^*	0, 3, 100
τ_p^*	0.01~100
W_x^*	0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0

なお、全計算時間については、次節の速度の時間発展に対する粒子緩和運動の影響を考慮して求める。

2.1.4 粒子速度の時間発展に対する粒子緩和運動の影響

粒子速度が平衡状態に至るまでの時間発展に関して、粒子緩和時間を用いて整理する。全粒子数を N_p と書き表すと、粒子速度のアンサンブル平均 $\langle \mathbf{V}^* \rangle(t^*)$ は、以下のように書き表される。

$$\langle \mathbf{V}^* \rangle(t^*) = \frac{1}{N_p} \sum_{l=1}^{N_p} \mathbf{V}^{*(l)}, \quad (2.21)$$

ここで、 $\mathbf{V}^{*(l)}$ は、 $l(1 \leq l \leq N_p)$ 番目の粒子速度を表す。

重力方向 (x 方向) の粒子平均速度 $\langle V_x^* \rangle(t^*)$ の時間発展を、以下のように示される指数関数を用いて近似する。

$$\langle V_x^* \rangle(t^*) = V_0^* + (\langle V_x^* \rangle(\infty) - V_0^*) \exp(-t^*/T^*) \quad (2.22)$$

ここで、 T^* は粒子平均速度に対する緩和時間を表す。図 2-2 には、気泡 ($\rho^* = 0$) の $W_x^* = 1$ の場合に対する平均速度 $\langle V_x^* \rangle(t^*)$ の時間発展の計算結果が示されている。また、図 2-2 には、式 (2.22) での表記に対して、緩和時間 T^* を最小二乗法を用いて求めて、フィッティングした結果が示されている。図 2-2 より、平均速度 $\langle V_x^* \rangle(t^*)$ の時間発展は、緩和時間 T^* をうまく選ぶことによって、式 (2.22) の近似式で適切に記述されることが示される。

図 2-3 には、最小二乗法によって求めた緩和時間 T^* と粒子緩和時間 τ_p^* との関係が示されている。図 2-3 より、粒子緩和時間 τ_p^* が $O(1)$ の場合に、緩和時間 T^* が最小の値をとることがわかる。また、図 2-3 より、粒子緩和時間 τ_p^* が $O(1)$ よりも大きい場合には、緩和時間 T^* は τ_p^* のほぼ 1 乗に比例し、 $O(1)$ よりも小さい場合には、 T^* は τ_p^* のほぼ -1 乗に比例することが示されている。この理由について、粒子緩和時間 τ_p^* が $O(1)$ よりも大きい場合には、粒子に働く粘性の影響よりも慣性の方が卓越し、粒子運動の周囲流体に対する追従性が鈍くなることが挙げられる。すなわち、粒子緩和時間 τ_p^* が大きいほど平衡状態に至るまでの時間が長くなり、その結果、緩和時間 T^* は τ_p^* のほぼ 1 乗に比例する。この傾向は至極、当然なものである。それに対して、粒子緩和時間 τ_p^* が $O(1)$ よりも小さい場合に、緩和時間 T^* が大きくなる理由には、 τ_p^* の小さい粒子ほど、周囲流体によく追従することが挙げられる。 τ_p^* の小さい場合には粒子と流体との相対速度が小さい。慣性スケール I^* といったものを導入すると、相対速度のスケールは粒子緩和時間 τ_p^* を用いて、 $I^* \tau_p^*$ と見積もられる。ここで、平均速度 $\langle V_x^* \rangle(t^*)$ が平衡状態までに至る過程を考えると、相対速度を有する粒子は渦の長さスケール L^* の影響を受けなくてはならない。従って、平均速度 $\langle V_x^* \rangle(t^*)$ の時間発展に対する緩和時間は $L^*/(I^* \tau_p^*)$ と見積もられ、 T^* は τ_p^* のほぼ -1 乗に比例するといった図 2-3 の結果に整合する。

図 2-4 には、密度比 (ρ^*) や重力 (W_x^*) に対する図 2-3 と同様にして算出される緩和時間 T^* と粒子緩和時間 τ_p^* との関係が示されている。なお、図 2-4 には、式 (2.22) に対する

最小二乗法によるフィッティングが成功しなかった点が除外されている。図 2-4 に示されるように、図 2-3 と同様、粒子緩和時間 τ_p^* が $O(1)$ の場合、緩和時間 T^* が最小の値をとること、また、粒子緩和時間 τ_p^* が $O(1)$ よりも大きい場合では、緩和時間 T^* は τ_p^* のほぼ 1 乗に比例し、 $O(1)$ よりも小さい場合では、 T^* は τ_p^* のほぼ -1 乗に比例することが、様々な密度比 (ρ^*) や重力 (W_x^*) の条件に対して成り立っている。すなわち、緩和時間 T^* は密度比 (ρ^*) や重力 (W_x^*) が一定の下で、粒子緩和時間 τ_p^* に比例する領域 ($\tau_p^* > O(1)$) と、粒子緩和時間 τ_p^* に反比例する領域 ($\tau_p^* < O(1)$) との 2 つの領域に分類されることがわかる。

2.1.5 粒子の沈降・上昇速度、粒子分布 (カオスの挙動と相転移について)

計算時間 T_{max}^* は、前節で議論した、粒子速度の緩和時間 T_p^* に対する粒子緩和運動 τ_p^* の影響を考慮して、以下のように設定する。

$$T_{max}^* = \max(1000\tau_p^*, 1000/T_p^*) \quad (2.23)$$

また、粒子速度の平均速度 \bar{V}^* は、 $0.8T_{max}^*$ 以降に対して行い、式 (2.21) に示されたアンサンブル平均粒子速度 $\langle V^* \rangle(t^*)$ を用いると、以下のように書き表される。

$$\bar{V}^* = \frac{\int_{0.8T_{max}^*}^{T_{max}^*} dt^* \langle V^* \rangle(t^*)}{0.2T_{max}^*} \quad (2.24)$$

図 2-5 には、 W_x 毎に対する粒子平均速度 \bar{V}_x^* と粒子緩和時間 τ_p^* の関係が示されている。また、図 2-5 における緑色、青色、赤色の線はそれぞれ式 (2.15) で表される密度比 ρ_p^* が、0, 3, 100 に対応している。また、図 2-5 中の紫色の線は、静止流体中における、粒子の沈降 ($\rho_p^* = 3, 100$)・上昇 ($\rho_p^* = 0$) 速度 (W_x) を表している。

図 2-5 から、 τ_p に対する流体よりも重い粒子 ($\rho_p^* = 3, 100$) の平均沈降速度 \bar{V}_x^* の傾向は、静止流体中での粒子沈降速度が渦の速度スケールに比べて小さい場合 ($W^* < 1$) と大きい場合 ($W^* \geq 1$) に分類されることが示されている。すなわち、 $W^* < 1$ の τ_p に対する \bar{V}_x^* の変化は複雑であるのに対して、 $W^* \geq 1$ の場合は連続的である。まず、 $W^* < 1$ の平均沈降速度 \bar{V}_x^* についての挙動について考察を行うため、例として、 $\rho_p^* = 3$, $W_x = 0.2$ の場合の $t^* = T_{max}^*$ における粒子分布を図 2-6 に示す。図 2-5 に示されるように、流体よりも重い粒子 ($\rho_p^* = 3, 100$) で $W^* < 1$ の場合、 τ_p が小さいときには、粒子の沈降速度 \bar{V}_x^* が W_x^* に比べて大きいことがわかる。図 2-6 の粒子分布に示されるように、 τ_p が小さい場合 ($= 0.05, 0.7$) には、渦の速度が下向きの領域を選択的に通過していることがわかる。従って、図 2-5 で示された $\bar{V}_x^* > W_x^*$ の傾向は、粒子が高速領域を選択的に通過していること

によってもたらされる。流体よりも重い粒子の場合、粒子は遠心力の作用によって渦の中心から外向きの力を受けるため、渦度が大きい領域よりも高いひずみ速度を有する領域に対して力を受ける。そして、重力の影響を受けると、粒子は、抗力が小さくなるような領域に存在しやすくなり、結果として高速領域を選択的に通過し、図 2-6 の $\tau_p = 0.05, 0.7$ のような粒子分布が形成される。

図 2-5 に示されるように、流体よりも重い粒子 ($\rho_p^* = 3, 100$) で $W^* < 1$ の場合、 τ_p^* の増大に伴う平均速度 \bar{V}_x^* の挙動は複雑に変化することがわかる。この理由について以下に説明する。図 2-6 に示された、 $\tau_p = 0.7, 0.9, 1.5, 4.0$ に対する粒子分布から、 τ_p が大きいほど粒子は複数の線上に存在し、分布形態が複雑となることがわかる。また、 τ_p が大きい場合 (= 20.0) には、粒子分布が、1 本の線上に乗ることが図 2-6 より示される。図 2-5 に示された流体よりも重い粒子 ($\rho_p^* = 3, 100$) で $W^* < 1$ の場合の平均速度 \bar{V}_x^* の複雑な挙動は、図 2-6 に示された、粒子分布形態によって強く依存すると考えると、粒子分布の複雑化 $\tau_p^* = 0.7 \sim 4.0$ 、および、単純化 $\tau_p^* = 4.0 \sim 20.0$ の機構によってもたらされる。この機構の性質を明らかにするために、図 2-6 と同様 $\rho_p^* = 3$, $W_x = 0.2$ の条件下で、 $0.475\pi \leq x^* \leq 0.525\pi$ で、粒子が存在する y^* 座標を図 2-7 に示す。図 2-7 の横軸は粒子緩和時間 τ_p^* である。図 2-7 より、粒子が存在する y^* 座標は $\tau_p^* < O(0.7)$, $y > 0$ で 1 価である。これは、図 2-6 で示された $\tau_p^* = 0.05, 0.7$ のように粒子分布が 1 本の線上に存在することに対応している。図 2-7 より、 $\tau_p^* \sim 0.7$ を越えると、粒子が存在する y^* 座標が $y > 0$ で 2 価となっており、解が「分岐」する様子が示される。これは、粒子分布が図 2-6 の $\tau_p = 0.9$ で示されるように、2 本の線上に存在することに対応している。図 2-7 より、粒子が存在する y^* 座標が $y > 0$ で 2 価であるのは $O(0.7) < \tau_p^* < O(1.0)$ であることが示される。さらに、粒子緩和時間が $\tau_p^* \sim 1.0$ よりも大きくなると、図 2-7 より、解の分岐が進行する様子が示される。これは、図 2-6 の $\tau_p^* = 0.9, 1.5, 4.0$ で、 τ_p^* が大きいほど粒子の分布が乱雑になることに対応している。図 2-7 より、解の分岐が進行している $\tau_p^* \sim 4.0$ で粒子が存在する y^* 座標の分布密度が粗くなっており、粒子分布挙動が $O(1.0) < \tau_p^* < O(4.0)$ と $O(4.0) < \tau_p^* < O(8.0)$ で分類されることが示される。後者の領域 ($O(4.0) < \tau_p^* < O(8.0)$) では、粒子緩和時間 τ_p^* の増大に対して 3 周期構造が現れた後、「カオス状態」に移行しているものと考えられる。さらに τ_p^* が大きい場合について、図 2-7 より、 $\tau_p^* \sim 8$ を越えると、粒子分布は $y^* > 0$ に対して 1 価となり、「相転移」を引き起こすことが示される。以上より、流体よりも重い粒子 ($\rho_p^* = 3, 100$) で、静止流体中での粒子沈降速度が渦の速度スケールに比べて小さい ($W^* < 1$) 場合の粒子分布は、 τ_p^* に対してカオス的な振舞いを示す。従って、流体の非線形なメカニズムが粒子運動に対して影響を及ぼしている。流体の運動方程式 (式 (2.19)) について、非線形効果は流体の対流を表す右辺第 1 項のみに含まれているが、セル流れでは、式 (2.4)(2.5) で議論されたように、流れ関数 (Ψ) は線形的に記述することが可能である。従って、流線上を通過する流体粒子に

対しては、カオスの挙動を生み出す非線形の影響が実質的にないと考えられる。ただし、粒子の場合は、流体との慣性力の違いによって流体の流線上を外れた運動軌跡を有し、その結果、粒子運動のカオスの挙動を生み出す、流体から粒子への非線形な効果が発生すると考えられる。

図 2-5 に示されるように、流体よりも重い粒子 ($\rho_p^* = 3, 100$) で $W^* \geq 1$ の場合について、 τ_p が小さいときには、粒子の沈降速度 \bar{V}_x^* は W_x^* に比べて若干低いことが示される。また、 τ_p が大きな場合には、 \bar{V}_x^* は W_x^* に漸近することが示される。 $W^* \geq 1$ の場合についての考察を行うため、例として、 $\rho_p^* = 3$, $W_x^* = 5.0$ の場合の $t^* = T_{max}^*$ における粒子分布を図 2-8 に示す。また、図 2-7 と同様に、粒子が通過する y^* 座標と粒子緩和時間 τ_p^* の関係を図 2-9 に示す。図 2-8 より、 τ_p^* が小さい場合 ($= 0.05, 0.2$)、粒子はひずみ速度が大きく、渦中心から最も外れた領域において、ほぼ鉛直状に分布する。それに対して、 τ_p^* が大きい場合 ($= 0.4$)、粒子はひずみ速度が大きく領域から離れ、渦中心に近い位置を通過する。さらに、 τ_p^* が大きくなると ($= 10.0$)、粒子は、ほとんど鉛直状に分布する。重い粒子 ($\rho_p^* = 3, 100$) で沈降速度の大きい ($W^* \geq 1$) 場合、粒子が存在する y^* 座標と粒子緩和時間 τ_p^* の関係 (図 2-9) には、沈降速度の小さい図 2-7 と比べると、カオス的な振舞いの特徴的な解の分岐が観測されないことがわかる。図 2-9 における粒子が存在する y^* 座標は、 τ_p^* の増大に対して、 $\tau_p^* = 0.3 \sim 0.4$ において、急激に分布形態が変化している。すなわち「相転移」については観測される。従って、重い粒子 ($\rho_p^* = 3, 100$) で沈降速度の大きい ($W^* \geq 1$) 場合、「カオス状態」に移行せずに「相転移」する。

図 2-5 において、気泡 ($\rho_p^* = 0$) の平均上昇速度の傾向は静止流体中での粒子沈降速度が渦の速度スケールに比べて小 ($W^* < O(1)$)、中 ($W^* \sim O(1)$)、大 ($W^* > O(1)$)、に分類されることがわかる。粒子平均速度 \bar{V}_x^* と粒子分布との関連を調べるために、 W_x^* が小、中、大のそれぞれに対する $t^* = T_{max}^*$ の粒子分布について、図 2-10 ($\rho_p^* = 0$, $W_x^* = 0.2$)、図 2-11 ($\rho_p^* = 0$, $W_x^* = 1.0$)、図 2-12 ($\rho_p^* = 0$, $W_x^* = 5.0$) を示す。また、図 2-10, 2-11, 2-12 に対する粒子が通過する y^* 座標と粒子緩和時間 τ_p^* の関係を図 2-7 と同様に図 2-13 に示す。気泡 ($\rho_p^* = 0$) で $W^* < O(1)$ の場合の平均上昇速度 \bar{V}_x^* は、図 2-5 に示されるように、紫色で示された W_x^* よりも低く、ほとんど 0 であることがわかる。この条件での粒子分布は、図 2-10 ($\rho_p^* = 0$, $W_x^* = 0.2$) から、渦中心の 1 点に集中している。このため、図 2-10 の $W_x^* = 0.2$ の分布より、粒子が存在する y^* 座標 (図 2-13, $W_x^* = 0.2$) には、 τ_p^* に対して若干の依存性が見受けられるものの、 $y^* > 0$ での挙動は、全ての τ_p^* に対して 1 価である。従って、図 2-7, 2-9 で示された相転移は起きてない。流体よりも軽い気泡の場合、低圧領域である渦の中心に向かう力を受け、重い粒子とは逆の挙動を示す。そして、 W_x^* が小さい場合には、図 2-10, 2-13 に示されるように、気泡に働く体積力が渦中心から脱出するに十分でないため、渦中心に粒子が集積する。図 2-6 より重い粒子 ($\rho_p^* > 1$) で W_x^* が小さいときは、渦中心から離れた高ひずみ領域に選択的に存在していることが示さ

れている。重い粒子の場合は、高ひずみ領域の中心部には安定に定在せず、粒子に働く体積力の影響によって高速領域を選択的に通過 ($\bar{V}_x > W_x^*$) する。それに対し、気泡の場合には、粒子を引きつける力をもたらず渦中心に定在する。従って、図 2-1 や式 (2.6) からセル状渦が高ひずみ領域も高渦度領域も同じ構造を持つことを考えると、粒子が渦に対して定在するかどうかは、密度比の ρ_p^* 影響が強いことがわかる。 $W^* \sim O(1)$ ($= 1.0, 2.0$) の場合、気泡の平均上昇速度 \bar{V}_x は、図 2-5 より、 τ_p^* が小さいときに紫色で示された W_x^* よりも高く、 τ_p^* が大きいときに W_x^* より低いことがわかる。 $W^* \sim O(1)$ の条件では、図 2-11 ($\rho_p^* = 0, W_x^* = 1.0$) に示されるように、 τ_p^* が小さい場合 ($= 0.05$) に、気泡が高速領域を選択的に通過している。そして、より大きな粒子緩和時間 ($\tau_p^* = 0.8, 1.0$) で、渦中心への向かう力によって、気泡分布がゆがんでいる。さらに、大きな粒子緩和時間 ($\tau_p^* = 2.0, 10.0$) で、 $W^* < O(1)$ の場合と同様に、気泡が渦中心付近の 1 点に集中している。さらに、大きな粒子緩和時間 ($\tau_p^* = 100.0$) で、気泡が渦中心付近を鉛直に進行している。 $W^* \sim O(1)$ の条件において、気泡の通過する y^* 座標は、図 2-13 ($\rho_p^* = 0, W_x^* = 1.0$) より、 $\tau_p^* \sim O(1)$ 付近で大きく変化している様子が示される。これは、図 2-11 に示された粒子分布に対する「相転移」に相当する。ただし、気泡の場合の「相転移」は図 2-13 ($\rho_p^* = 0, W_x^* = 1.0$) に示されるように、 y^* 座標が連続的に変化し、流体よりも重い粒子の場合 (図 2-7, 2-9) と傾向が異なることがわかる。また、図 2-11 より、粒子が存在する y^* 座標は $y^* > 0$ に対して常に 1 価であり、この傾向についても重い粒子の場合 (図 2-7, 2-9) と異なっている。

$W^* > O(1)$ ($= 5.0, 10.0$) の場合、粒子の平均上昇速度 \bar{V}_x は、図 2-5 より、 τ_p^* が小さいときと、大きい場合に対して紫色で示された W_x^* よりも高く、 $\tau_p^* = O(1)$ で W_x^* に近づく。このときには、 \bar{V}_x は常に W_x^* よりも高い。この $W^* > O(1)$ の条件での気泡は、図 2-12 ($\rho_p^* = 0, W_x^* = 5.0$) より、 τ_p^* が小さい場合 ($= 0.05$) に、高速領域を選択的に通過し、より大きな粒子緩和時間で渦中心付近を鉛直に進行している。また、図 2-13 ($\rho_p^* = 0, W_x^* = 5.0$) より、 \bar{V}_x の τ_p^* に対する分布は $W_x^* = 0.2$ と逆の傾向を示している。従って、 $W^* > O(1)$ では、粒子が存在する y^* 座標は $y^* > 0$ に対して常に 1 価である。

以上より、気泡 ($\rho_p^* = 0$) の分布は、流体よりも重い粒子 ($\rho_p^* = 3, 100$) の場合に見受けられた、解の分岐が観測されない。従って、気泡 ($\rho_p^* = 0$) の場合には、「カオス状態」が起きないことがわかる。また、気泡 ($\rho_p^* = 0$) の「相転移」は、 $W_x^* \sim 1$ の場合のみ起こる。

2.2 一様等方性乱流中の気泡・粒子運動

2.2.1 はじめに

前節では、定常状態にある渦から粒子運動への作用について、粒子密度、粒子緩和時間、重力の影響について議論した。しかしながら、現実の乱流中の渦は非定常的であり、特定の時間が過ぎると消滅する。また、現実の渦は、渦同士の干渉によって複雑な挙動を示す。従って、流体の乱れによって作用を受ける粒子運動を解析するには、渦の非定常性を考慮することが重要である。

さて、Tchen の理論 (Hinze, 1975) によると、一様等方性乱流中で受動的に輸送される粒子の乱れ度は、粒子と流体との密度比と粒子緩和時間と乱れの積分時間スケールのみによって決定される。この、Tchen の理論では、粒子が渦の特定な領域に対して集積 (Preferential concentration) する影響が考慮されていない。しかしながら、実際の乱流場では、粒子運動が乱れの微細構造から影響を受け、粒子の preferential concentration が起こることが知られている (Squires & Eaton, 1991; Wang & Maxey, 1993)。また、前節では、セル状の渦構造が粒子・気泡運動に対して作用する系を解析し、密度比や粒子の時間スケールに大きく依存して、粒子・気泡が一様ではなく強く偏って分布する様子が示された。従って、乱流中の粒子・気泡の運動特性の理解には、preferential concentration の影響を考慮に入れて解析を行うことが重要である。本研究で対象としている気泡流において、乱れに対する気泡運動の特徴を理解するには、粒子時間スケールと分散相の各種乱流統計量の関係について、気泡と重い粒子との性質の違いを照らし合わせることで有効であると考えられる。しかしながら、一様等方乱流中の気泡運動をシミュレートした研究例は、筆者が知る限りで Wang & Maxey (1993), Maxey *et al.* (1994), Druzhinin & Elghobashi (1998) のみであり、重い粒子の場合に比べて少ない。また、いずれの研究においても、気泡の各種乱流統計量の粒子緩和時間に対する依存性について、十分に調べられておらず、気泡と重い粒子との性質の違いを照らし合わせるために十分な知見が得られていないのが現状である。

本節では、直接数値シミュレーションによって一様等方性乱流場を構築し、その中における粒子・気泡運動を Maxey & Riley (1983) の運動方程式を用いて追跡する。そして、粒子の各種乱流統計量を計算し、密度比やストークス数 (粒子緩和時間と乱流の時間スケールの比) によって整理して議論を進める。特に、Tchen の理論によって得られる粒子の乱流強度と計算結果との整合性について、粒子分散や preferential concentration などの特徴を踏まえて議論する。また、乱流中における粒子の分散のモデル化に適した Langevin model (Sommerfeld, 1993) と Tchen の理論との整合性について調べ、そのモデルの有効

性を議論する。なお、現実の混相乱流では粒子運動によって乱流変動がもたらされるが、本節ではその影響を無視し、いわゆる one-way coupling 法によって解析を行う。

2.2.2 支配方程式

本節での解析に用いる支配方程式は以下のように書き表される。

○連続の式:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.25)$$

○運動量方程式:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.26)$$

ここで、 u_i は流体速度、 p は圧力、 t は時間、 x_i は座標を表す。また、運動量方程式にランダムな外力が働き、乱れは維持されるものとする。

○粒子運動方程式:

$$\frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho_p}{\rho_f} \right) \frac{dv_i}{dt} = \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{3}{2} \right) \frac{Du_i}{Dt} + \frac{1}{2} \pi a^2 C_D |u - v| (u_i - v_i) \quad (2.27)$$

$$\frac{dx_{pi}}{dt} = v_i \quad (2.28)$$

ここで、 v_i は粒子速度、 C_D は粒子に働く抗力係数 x_{pi} は粒子位置を表す。また、揚力や履圧力を無視し、粒子自身の慣性力、粒子に働く定常抗力と、多くの固気混相乱流の解析で無視されている付加慣性力や粒子周囲流体の慣性力を考慮している。式 (2.27) 中の抗力係数 C_D は以下に示されるようにストークス流中の固体粒子に対するものを適用する。

$$C_D = \frac{24}{Re_p}. \quad (2.29)$$

2.2.3 計算手法

解析対象は、一様で等方な乱流場中の粒子挙動である。解析領域は1辺が128mmの立方体であり、格子点数は 64^3 である。動粘性係数 ν は $7 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ である。乱流場のエネルギースペクトルは時間とともに減衰しないように外力によって、それを維持する。流体の速度 $\text{rms}(u_{\text{rms}})$ は $2.02 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ である。また、時間刻みは 5.00×10^{-3} とする。統計量の算出は、4.00~10.0 (s) に対して行う。NS方程式の解法にはProjection MAC法を採用し、圧力のポアソン方程式は、前処理つき共役勾配法であるICCG法 (incomplete

Cholesky conjugate gradient 法) を用いて解いている。時間積分は 4 階の Runge-Kutta 法, 空間差分はエネルギー保存型の 4 次精度の中心差分 (森西 1996) で近似を行っている。境界条件は全周周期境界条件を課している。粒子位置への物理量の内挿は 5 次精度のラグランジュ補間を用いる。分散相に関する統計量の算出には, 10000 個の粒子を用いて行う。

乱流の状態について, テイラーレイノルズ数 $Re_\lambda (= u_{rms}^2 / (\nu \langle \partial_i u_i \rangle_{rms}))$ は 35.6 と求めた。また, 以下に示されるように定義される渦の寿命 (ラングランジュ積分時間, Eddy Life Time) T_{Lf} を計算すると, 0.727 s と求めた。

$$T_{Lf} = \frac{1}{(\langle u_i^{(L)} u_i^{(L)} \rangle - \langle u_i^{(L)} \rangle \langle u_i^{(L)} \rangle)} \int_0^\infty d\tau \left(\langle u_i^{(L)}(0) u_i^{(L)}(\tau) \rangle - \langle u_i^{(L)}(0) \rangle \langle u_i^{(L)}(\tau) \rangle \right) \quad (2.30)$$

ここで, $u_i^{(L)}(\tau)$ は時刻 τ における流体粒子をラグランジュ的に追跡したときの速度である。流体の乱流拡散係数 $D_f (= u_{rms}^2 T_{Lf})$ は, 2.97×10^{-4} と求められ, 分子の拡散に対して約 40 倍と見積もられた。また, 速度勾配テンソルの第二不変量と圧力との相関係数を計算するとは, 0.587 と求めた。

図 2-14 は連続相速度のエネルギー縦スペクトル分布であり, 波数に対する $-5/3$ 乗の勾配とエネルギーカスケード過程の勾配との対比により, 慣性領域における $-5/3$ 乗則が満たされていることが示されている。

2.2.4 計算条件の設定

密度比 ρ^* , 粒子緩和時間 τ_p を以下に示されるように定義する.

$$\rho^* = \frac{\rho_p}{\rho_f}, \quad (2.31)$$

$$\tau_p = \frac{a^2}{9\nu}(2\rho^* + 1). \quad (2.32)$$

本研究では, 式(2.29)に示されるようにストークス流の式を仮定している. よって式(2.27)は密度比 ρ^* と粒子緩和時間 τ_p で整理され, 以下のように書き表される.

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{3}{2\rho^* + 1} \frac{Du_i}{Dt} + \frac{u_i - v_i}{\tau_p}. \quad (2.33)$$

この式は有次元の式であるが, レイノルズ数のように粒子径に依存するパラメタが陽に含まれていない. 従って, 粒子運動を決めるパラメタは式(2.31)に示された密度比 ρ^* と, 以下のように示される粒子緩和時間と乱流の時間スケールの比(ストークス数) St のみである.

$$St = \frac{\tau_p}{T_{LJ}} \quad (2.34)$$

本節では粒子の拡散係数, 渦への選択的な集積, 粒子速度変動とストークス数 St との関係について, ρ^* の影響を調べる.

さて, St の選定について, 以下に示されるような2つの時間に対する制約を考える. 1つ目は, シミュレーションにおける時間刻みの制約であり, 計算の時間ステップが粒子緩和時間程度よりも大きすぎる場合には, 精度や計算の安定性に問題が生じる. 2つ目は, 全シミュレーション時間の制約である. 後述するように, 重い粒子の場合には粒子緩和時間が大きいと, 粒子速度の積分時間が増大し, 妥当に統計量を算出するためには, 極めて長時間の計算時間を要する. 以上の制約により, 本節では, St を $O(10^{-3}) \sim O(10)$ の範囲に絞って計算を行う. 密度比 ρ^* は 0, 3, 1000 の3通り設定し, それぞれに対する St の条件は表 2-2 に示される.

Table 2-2 Parameters for calculation of particle motion in isotropic homogeneous turbulence

$\rho^* = 0.0$		$\rho^* = 3.0$		$\rho^* = 1000.0$	
St	$a(\text{mm})$	St	$a(\text{mm})$	St	$a(\text{mm})$
5.47×10^{-3}	(0.5)	1.53×10^{-3}	(0.1)	4.38×10^{-3}	(0.01)
2.19×10^{-2}	(1.0)	6.13×10^{-3}	(0.2)	1.75×10^{-2}	(0.02)
8.76×10^{-2}	(2.0)	3.83×10^{-2}	(0.5)	0.110	(0.05)
0.547	(5.0)	0.153	(1.0)	0.438	(0.10)
2.19	(10.0)	0.613	(2.0)	1.75	(0.20)
8.76	(20.0)	3.83	(5.0)		
54.7	(50.0)				

2.2.5 Preferential concentration に対する St の依存性 (ρ^* の影響)

乱れの渦が粒子運動に対して選択的に作用をもたらす構造には、以下に示される2つの要因が考えられる。1つ目には慣性の影響の大きい大規模な渦であり、2つ目には乱流渦中心で局在化している微細構造が挙げられる。慣性力の強い大規模な渦を表す指標には、流体自身の遠心力が圧力勾配とつり合っていることから、圧力 p が適切である。また、乱れの微細構造に対する指標には、速度勾配テンソルの第2不変量が適切である。本研究では、速度勾配テンソルの第2不変量を q と記述する。 q は以下のように書き表される。

$$q = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = S_{ij}S_{ij} - \frac{1}{2}\omega_k\omega_k \quad (2.35)$$

式(2.35)から、 q の正の領域は高いひずみ速度を有する領域、負の領域は高い渦度を有する領域を表すことがわかる。以下に p , q の確率密度関数や粒子・気泡の数密度との相関係数を用いて気泡・粒子の preferential concentration を評価する。

一般の流れ場では、圧力 p を確率密度関数 (Probability Density Function, PDF) で表現することは適切でない。しかし、本計算で扱っている等方な流れ場の場合には、一様な圧力勾配が0であり、圧力はガリレイ不変性が満たされる速度勾配テンソルの第2不変量 q の空間積分によって一意に決定される。波数 (k) 空間で記述すると、 p と q は形式的に以下のように書き表される。

$$(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\bar{p}(\mathbf{k}) = \bar{q}(\mathbf{k}) \quad (2.36)$$

一様等方性より、 p は全領域での平均値が0の条件の下、圧力は形式的には以下のように書き表される。

$$p(\mathbf{r}) = \int dk_x \int dk_y \int dk_z \frac{\hat{q}}{k^2} \exp(i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) \quad (2.37)$$

である。

さて、 p と q の相関係数は、Taylor-Green 渦のような、単一の波数成分を持つ周期渦に対して 1 である。 p と q の相関係数が低いほど、渦の微細構造と大規模渦のスケール差が大きいことを示す。

全計算領域で一様にサンプリングした圧力 p と速度勾配テンソルの第 2 不変量 q の PDF をそれぞれ $PDF(p), PDF(q)$ と書き表す。また、粒子位置でサンプリングした p と q の PDF を $PDF(p|n_p), PDF(q|n_p)$ と書き表す。図 2-15, 2-16, 2-17 は $PDF(p)$ と $PDF(p|n_p)$ との関係さまざまな $St (= \tau_p/T_{LJ})$ に対して示したものであり、それぞれ密度比 $\rho^* (\rho_p/\rho_f)$ が 1000, 3, 0 の場合に対応している。また、図 2-18, 2-19, 2-20 は $PDF(q)$ と $PDF(q|n_p)$ との関係について、さまざまな St に対して示したものであり、それぞれ密度比 $\rho^* (\rho_p/\rho_f)$ が 1000, 3, 0 の場合に対応している。図 2-15, 2-16 から、重い粒子の場合の圧力の PDF に関して、粒子位置での分布 $PDF(p|n_p)$ は単相の分布 $PDF(p)$ よりも右にシフトしている。これは、媒質流体よりも重い粒子は、高い圧力の領域に粒子が選択的に集積することに相当する。また、粒子位置でサンプリングされた PDF のピークが単相の場合のピークよりも右側へシフトする大きさは、 $St (= \tau_p/T_{LJ})$ が中程度の場合 ($O(0.1) \sim 1$) に最も大きいことがわかる。図 2-18, 2-19 に示されるように、重い粒子の場合、 q の PDF に関して、粒子位置での分布 $PDF(q|n_p)$ は単相の分布 $PDF(q)$ よりも右にシフトしている。これは、粒子が必ずみ速度が高く渦度が低い領域に選択的に集積していることを表している。 q についても、粒子位置でサンプリングされた PDF のピークが単相の場合のピークよりも右側へシフトする大きさは、図中の St が中程度の場合に最も大きいことがわかる。以上の結果を踏まえると、高圧力、高ひずみ領域に対して粒子が選択的に集積する傾向は粒子緩和時間 τ_p と渦の寿命 T_{LJ} のスケールが同程度である場合に最も強く、Squires & Eaton (1991) の DNS を用いた計算結果と同様である。密度比の影響について、 $\rho^* = 1000$ (図 2-15, 2-18) と $\rho^* = 3$ (図 2-16, 2-19) との場合から、 St の変化に対して、粒子位置でサンプリングされた PDF のピークが単相の場合のピークよりも右側へシフトする大きさは、ほぼ同程度である。従って、媒質流体よりも重い粒子の場合、粒子が特定の渦へと指向的に集まる性質は、粒子密度よりも、粒子緩和時間の影響の方が強いことが示される。

気泡の場合、図 2-17, 2-20 に示されるように、 p と q の PDF に関して、いずれの場合も、気泡位置でサンプリングされた PDF のピークは単相の場合のピークよりも左側にシフトしている。これは、重い粒子の場合とは逆の傾向であり、気泡が圧力が低く、渦度が高い領域に選択的に集積することを表している。図 2-17, 2-20 の気泡位置でサンプリングされた p と q との PDF のピーク位置が単相流の場合よりも左側へシフトしている大きさは、図 2-15, 2-16, 2-18, 2-19 に示した重い粒子の場合のシフト量に比べると大きいことが示される。すなわち、ストークス数 St が同じ程度であっても、せん断速度が卓越

している領域に集まりやすい重い粒子と、渦度が卓越している領域に集まりやすい気泡とは、渦構造から受ける影響の指向性が大きく異なっている。また、重い粒子の場合(図 2-15, 2-16, 2-18, 2-19), St が $O(1)$ よりも大いときには、粒子点でサンプリングされた $PDF(p|n_p)$, $PDF(q|n_p)$ が、流体の $PDF(p)$, $PDF(q)$ に近づくのに対して、気泡の場合, St が $O(10)$ でも $PDF(p|n_p)$, $PDF(q|n_p)$ と $PDF(p)$, $PDF(q)$ との差が大きいことがわかる。これは、気泡の場合の preferential concentration が、重い粒子よりも広い St に渡って起こることを表している。

粒子の数密度の圧力 p や速度勾配テンソルの第 2 不変量 q に対する指向性を定量化して評価するために、PDF の比を用いる。図 2-21, 図 2-22 はそれぞれ $PDF(p|n_p)/PDF(p)$ と $PDF(q|n_p)/PDF(q)$ の分布が示されている。なお、図 2-21, 2-22 中の 1 は、 p と q との確率密度が流体と同じであることを表す。なお、 p と q が 0 から大きく離れると p と q の PDF は非常に小さくなること、すなわちサンプル数が少ないために分布が滑らかではない、図 2-21, 2-22 より、重い粒子の場合 ($\rho^* = 3,1000$) には、 p と q が高い領域で $PDF(p|n_p)/PDF(p)$, $PDF(q|n_p)/PDF(q)$ が高く、粒子が p と q の高い領域において集積しやすく、その傾向が St が中程度であるほど顕著である様子が示される。これは図 2-15, 2-16, 2-18, 2-19 を用いて議論された結果と同様である。また、PDF の比 $PDF(p|n_p)/PDF(p)$ と $PDF(q|n_p)/PDF(q)$ の最大ピーク値は、いずれも 2~3 倍程度であることが示される。気泡の場合 ($\rho^* = 0$) には、図 2-17, 2-20 での議論と同様に、 p と q が低い領域で $PDF(p|n_p)/PDF(p)$, $PDF(q|n_p)/PDF(q)$ が高いことがわかる。また、PDF の比のピーク値について、 $PDF(p|n_p)/PDF(p)$ では約 25, $PDF(q|n_p)/PDF(q)$ では約 10 であり、重い粒子の場合と比べると極めて大きな値を示している。このことから、粒子数密度分布の渦構造に対する指向性は重い粒子よりも、気泡の場合の方が強いことが示される。

粒子・気泡の渦構造への集積の傾向について、さらに定量的に評価するために、 p , q と粒子数密度 n_p の相関係数 ($Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$) を導入する。 $Cor(p, n_p)$ と $Cor(q, n_p)$ は以下のように書き表される。

$$Cor(p, n_p) = \frac{\langle pn_p \rangle - \langle p \rangle \langle n_p \rangle}{\sqrt{(\langle pp \rangle - \langle p \rangle \langle p \rangle)(\langle n_p n_p \rangle - \langle n_p \rangle \langle n_p \rangle)}} \quad (2.38)$$

$$Cor(q, n_p) = \frac{\langle qn_p \rangle - \langle q \rangle \langle n_p \rangle}{\sqrt{(\langle qq \rangle - \langle q \rangle \langle q \rangle)(\langle n_p n_p \rangle - \langle n_p \rangle \langle n_p \rangle)}} \quad (2.39)$$

ここで、例えば、 $Cor(p, n_p)$ が正であれば、圧力が高いほど粒子数密度が高いことを表す。

図 2-23 は $Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$ と $St (= \tau_p / T_{LJ})$ との関係であり、 $\rho^* (\rho_p / \rho_f)$ が 1000, 3, 0 の場合について示されている。重い粒子の場合 ($\rho^* = 3,1000$)、粒子が高圧・高ひずみ速度領域に対して集まっているため、相関係数 $Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$ は正の値を示して

いる。また、相関係数 $Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$ のピーク位置は、ともに $St = 0.1 \sim 0.5$ である。従って、preferential concentration は $St = 0.1 \sim 0.5$ で顕著であることがわかる。それに対して、気泡の場合 ($\rho^* = 0$)、気泡が低圧・高渦度領域に対して集まりやすいため、相関係数 $Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$ は負の値を示している。図 2-23 より、気泡の場合、相関係数 $Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$ の絶対値は重い粒子に比べると大きいことが示されている。このことから、粒子数密度分布の渦構造に対する指向性は、重い粒子よりも、気泡の場合の方が強いことがわかる。また、気泡の相関係数の $Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$ のピーク位置は $St = 1 \sim 10$ にある。従って、気泡の場合に preferential concentration が顕著となるのは、重い粒子の場合よりも大きな粒子緩和時間のときであることがわかる。相関係数の $Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$ のピークをとる St が重い粒子と気泡の違うことから、図 2-15 ~ 2-23 で示された、重い粒子と気泡の preferential concentration に対する強さの違いをもたらす要因は以下のように説明される。

$St(\tau_p)$ が小さい場合、式 (2.33) の慣性項が小さいために、気泡・粒子は流体の抗力によりひきづられて運動し、流体運動に対する追従性が高い。そのため、乱れの局所的な構造に対して、選択的な影響を受けにくく、 $Cor(p, n_p)$ と $Cor(q, n_p)$ の値は低い。

それに対して、 $St(\tau_p)$ が大きい場合、式 (2.33) より、粒子の運動には抗力に比べ流体の慣性力が重要となる。重い粒子の場合には、流体の密度に比べて粒子の密度の方が大きいために、流体運動に対する応答が鈍感であり、追従性が低い。従って、 $St(\tau_p)$ が大きい場合の重い粒子の運動は乱れの構造に対して影響を受けにくい。その結果、相関係数 $Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$ は低くなる。 $St(\tau_p)$ が大きい気泡の場合、式 (2.33) の気泡の慣性項と流体の慣性項を照らし合わせると、気泡運動の加速度の応答は流体の加速に対して 3 倍に増幅される。従って、 τ_p が大きい場合、気泡の流体運動に対する応答は非常に敏感であり、低圧領域へと気泡は捕獲されやすくなる。その結果、相関係数 $Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$ が重い粒子の場合に小さくなる時の $St(\sim O(1))$ でも、気泡の場合には渦構造に敏感に応答するために、 $Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$ の絶対値は重い粒子の場合に比べて大きい。気泡の場合、さらに大きなストークス数 ($St > O(10)$) では、乱れの様々なスケールの渦の影響を、不規則に受けるために、局所的な乱れ渦と粒子分布との相関 $Cor(p, n_p)$, $Cor(q, n_p)$ が下がっている。

図 2-23 より、全ての ρ^* に対する p, q と n_p との相関係数の大きさの違いについて、 St が小さい場合には $Cor(q, n_p)$ の方が大きく、 St が大きい場合には $Cor(p, n_p)$ の方が大きい。すなわち、粒子・気泡の緩和時間が小さい場合の preferential concentration は、大規模渦よりも乱流の微細渦の影響が重要である。それに対して、粒子・気泡の緩和時間が大きい場合、慣性の影響が重要となるために、粒子運動は流体の慣性と関連の強い圧力分布の影響を直接受け、preferential concentration は乱流の微細渦よりも大規模渦が重要である。

2.2.6 粒子の時間特性・乱流強度・分散

本節では、ストークス数 St をパラメタとして、分散相の各種統計量 (積分時間 T_{Lp} , rms 速度 v_{rms} , 拡散係数 D_p) について調べる. 特に, 上で述べた密度比 ρ^* に対する preferential concentration の性質の違いに着目しつつ議論を進める.

粒子速度のラグランジアン自己相関関数 $R_{Lp\alpha}(\tau)$ は以下のように書き表される.

$$R_{Lp\alpha}(\tau) = \frac{\langle v_\alpha(t)v_\alpha(t+\tau) \rangle - \langle v_\alpha(t) \rangle \langle v_\alpha(t+\tau) \rangle}{\langle v_\alpha v_\alpha \rangle - \langle v_\alpha \rangle \langle v_\alpha \rangle} \quad (\text{no summation on } \alpha) \quad (2.40)$$

積分時間 T_{Lp} と自己拡散係数 D_p は, 流れ場の等方性を利用すると以下のように算出される.

$$\begin{aligned} T_{Lp} &= \frac{1}{3} \int_0^\infty d\tau (R_{Lp11}(\tau) + R_{Lp22}(\tau) + R_{Lp33}(\tau)) \\ &= \int_0^\infty d\tau R_{Lp}(\tau) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} D_{Lp} &= \frac{1}{3} \left(v_{rms1}^2 \int_0^\infty d\tau R_{Lp11} + v_{rms2}^2 \int_0^\infty d\tau R_{Lp22} + v_{rms3}^2 \int_0^\infty d\tau R_{Lp33} \right) \\ &\sim v_{rms}^2 T_{Lp} \end{aligned} \quad (2.42)$$

ここで, $R_{Lp} = 1/3 \cdot (R_{Lp11} + R_{Lp22} + R_{Lp33})$, $v_{rms}^2 = 1/3 \cdot (v_{rms1}^2 + v_{rms2}^2 + v_{rms3}^2)$ である.

図 2-24, 2-25, 2-26 は, ラグランジアン自己相関係数の時間変化を表し, 様々なストークス数 St に対して表示されている. 図 2-24, 2-25, 2-26 の密度比 ρ^* は, それぞれ, 1000, 3, 0 に相当する. 図中の緑線は流体のラングランジアン自己相関係数 $R_{Lf}(t)$ であり, 青線は粒子の値 $R_{Lp}(t)$ である. 重い粒子の場合 (図 2-24, 2-25), Elghobashi & Truesdell (1992) の DNS 計算と同様に, St が大きいほど, 流体よりも長い間に渡って相関値が下がらないことがわかる. 気泡の場合 (図 2-26) には, $St < O(0.1)$ で St の増大に伴い, 相関係数の減衰が若干遅くなり, $St > O(0.1)$ で相関係数の減衰が流体よりも速くなるのがわかる. この理由については, 後で議論する.

さて, 式 (2.29) の時間積分 T_{Lp} の算出について, ∞ の時間まで計算は行えないので, 本研究では 6s までの間で数値積分を行った. この近似は, 図 2-24, 2-25, 2-26 より, $t = 6(s)$ での相関値の値が, 十分に減衰しており, 妥当であると考えられる. なぜなら, ある程度時間が経過すると, 初期乱れの影響が弱まり, 相関係数の挙動はランダムな変動に対する応答 (後の Langevin 方程式の議論を参照) のように, $\exp(-t/T_L)$ で近似される. 従って, 大きな時間 T_{big} において, 相関係数が ϵ に減衰していれば, 誤差 (T_{big} 以降の相関係数の積分値) は ϵ である. 従って, ϵ が十分に小さければ, 時刻 ∞ まで相関係数を積分した値との誤差は十分に小さい.

表 2-3, 2-4, 2-5 に, それぞれ密度比 ρ^* が 1000, 3, 0 に対する, ストークス数 St , 積分時間比 T_{Lp}/T_{Lf} , 乱れ強度比 v_{rms}/u_{rms} , 拡散係数比 D_p/D_f を示す.

Table 2-3 分散相の各種統計量 ($\rho_p/\rho_f = 10^3$)

St	T_{Lp}/T_{Lf}	v_{rms}/u_{rms}	D_p/D_f
4.38×10^{-3}	0.999	1.01	1.01
1.75×10^{-2}	1.03	1.02	1.07
0.110	1.26	0.986	1.22
0.438	1.56	0.828	1.08
1.75	2.27	0.615	0.859

Table 2-4 分散相の各種統計量 ($\rho_p/\rho_f = 3$)

St	T_{Lp}/T_{Lf}	v_{rms}/u_{rms}	D_p/D_f
1.53×10^{-3}	1.00	1.00	1.00
6.13×10^{-3}	0.999	1.00	1.00
3.83×10^{-2}	1.05	1.01	1.07
0.153	1.20	0.974	1.14
0.613	1.50	0.853	1.09
3.83	1.81	0.681	0.842

Table 2-5 分散相の各種統計量 ($\rho_p/\rho_f = 0$)

St	T_{Lp}/T_{Lf}	v_{rms}/u_{rms}	D_p/D_f
5.47×10^{-3}	1.00	0.982	0.967
2.19×10^{-2}	1.06	0.930	0.919
8.76×10^{-2}	1.02	0.871	0.773
0.547	0.490	0.898	0.395
2.19	0.320	1.02	0.334
8.76	0.311	1.29	0.516
54.7	0.585	1.69	1.67

さて, 一様等方乱流中の粒子の挙動の理論解析には, Tchen の理論 (Hinze, 1975) が挙げられる. Tchen の理論が成り立つための仮定は, その趣旨をまとめると, 以下のよう
に示される.

1. 流体の乱流状態は等方で統計的に定常.
2. 粒子に働く抗力はストークス抵抗に従う.
3. 流体の運動に対して粒子は one-way coupling で記述される.
4. 粒子の運動の間, 粒子近くには同じ流体で形成されている.

以上について、1~3は本研究と同じ仮定である。4については、粒子運動が特定の乱流構造に対して選択的な影響を受けないことに相当する。従って、前述したように、本計算では、preferential concentration が観測され、4の仮定が成り立たない。Tchen の理論(不規則応答理論)によると、乱流強度比 v_{rms}/u_{rms} は式(2.33)のように粒子運動方程式が記述される場合、式(2.31)(2.32)(2.33)の関係を用いると以下のように書き表される。

$$\frac{v_{rms}}{u_{rms}} = \sqrt{\frac{1 + (3/(2\rho^* + 1))^2 St}{1 + St}} \quad (2.43)$$

なお、この式の導出には仮定4が重要であり、乱流渦の全ての周波数スケールにおける速度変動に対して、粒子運動が均等に応答するといった関係が用いられる。

図2-27には、乱流強度比 v_{rms}/u_{rms} とストークス数 $St(= \tau_p/T_{Lf})$ の関係について、表2-3、2-4、2-5に示された本計算結果(点)とTchenの理論(線)が様々な密度比 ρ^* に対して示されている。図2-15、2-16、2-18、2-19、2-20、2-21、2-13に示されたように preferential concentration がそれほど強くない媒質流体よりも重い粒子の場合($\rho^* = 1000, 3$)、数値シミュレーション結果は、概ねTchenの理論と合っていることが示される。特に、Tchenの理論におけるストークス数に対する v_{rms}/u_{rms} の変化について、密度比の影響による違い($\rho^* = 1000, 3$)が、はっきりと再現されていることがわかる。Tchenの理論によって得られる v_{rms}/u_{rms} は、式(2.43)より、密度比 ρ^* とストークス数のみによって表される関数であり、特に複雑な乱流構造について反映されているわけではなく、乱流状態を大胆に単純化して、統計論的に導かれるものにすぎない。にもかかわらず、重い粒子の場合($\rho^* = 1000, 3$)については、図2-27に示された程度の理論と計算との一致が見られることは興味深い。

図2-27に示されるように気泡の場合($\rho^* = 0$)の結果は、定性的にはTchenの理論と同じ傾向であり、 St が大きい場合、 St の増大に伴い v_{rms}/u_{rms} が大きくなることからわかる。これは、式(2.33)に示されたように、 τ_p が大きいほど慣性の影響が重要となるが、気泡の場合には、気泡と流体との慣性の釣り合いから、粒子の速度変動が流体の速度変動に対して増幅されやすくなるからである。しかしながら、図2-27に示されるように、 St に対する定量的な v_{rms}/u_{rms} の値はTchenの理論結果と大きくずれている。この理由は、先に議論したように、Tchenの理論では、特に気泡の場合に強く現れる preferential concentration が考慮されていないことが原因である。気泡の場合、図2-27に示されるように、数値シミュレーションによって得られる v_{rms}/u_{rms} が、理論よりも著しく小さいのは、気泡が集積している渦構造の中心部付近での速度変動スケールが小さいためであると考えられる。以上の v_{rms}/u_{rms} の分布に対する結果から、 $\rho^* > 1$ の場合には、統計論的なTchenの理論を拡張し、確率論的な記述で粒子分散を表現することの妥当性が高い。

図2-28は表2-3、2-4、2-5で示された結果をグラフ化したものであり、横軸がストークス数 $St(= \tau_p/T_{Lf})$ である。図中の緑は積分時間比 T_{Lp}/T_{Lf} 、青は乱れ強度比 v_{rms}/u_{rms} 、赤は拡散係数比 D_p/D_f を表す。図2-28の重い粒子の場合には Uijttewaai & Oliemans

(1996) の管内流の DNS と同様に、ストークス数 St が 1 を越えると St が大きいほど D_p/D_f が小さくなることを示される。これは、 St が大きくなると乱れに対する粒子の応答性が低下し、粒子運動の直進性が強くなるといった 'crossing trajectory' 効果によってもたらされる。また、粒子の preferential concentration が強い $St = O(0.1) \sim 1$ (図 2-23) では、 D_p/D_f が 1 以上である。この理由について、重い粒子の選択的に集積しやすい領域はひずみ速度が高く、例えば、渦粘性の概念によると統計的に流体粒子が強く拡散するためである。従って、ひずみ速度が高い領域に粒子が集積する場合には、バルクの流体よりも自己拡散が大きくなる ($D_p/D_f > 1$)。

気泡 $\rho^* = 0$ の運動は慣性の影響が大きい ($St > \sim 2$) 場合、乱れに対する応答が敏感で、流体の乱れよりも増幅された乱れがもたらされるために、 St が大きいほど D_p/D_f が大きくなる。また、気泡の選択的に集積しやすい領域はひずみ速度が低い領域であり、渦粘性の概念から考えると統計的に流体粒子の拡散が弱い。従って、preferential concentration の傾向が強いときの気泡の自己拡散はバルクの流体よりも小さい ($D_p/D_f < 1$)。従って、 $St > O(0.1)$ で気泡の自己相関係数の減衰が流体よりも速い (図 2-26) 理由は、気泡の自己拡散がバルクの流体の乱流拡散よりも小さいためであると考えられる。また、 $St > O(0.1)$ では、図 2-28 に示されるように気泡が渦中心部に選択的に集積するため、乱れ強度比 v_{rms}/u_{rms} と拡散係数比 D_p/D_f がともに 1 より小さいことがわかる。このとき、気泡の拡散係数 D_p/D_f の低下の方が、乱れ強度 v_{rms}/u_{rms} の低下よりも著しいため、式 (2.42) に示されるように粒子の積分時間 T_{L_f} が小さくなり、その結果気泡の自己相関係数は流体よりも早く減衰する。

2.2.7 Langevin 方程式を用いた粒子分散モデル (粒子の速度変動との整合性について)

前節では、一様等乱流中の粒子運動の数値解析を行い、媒質よりも粒子が重い場合 ($\rho^* > 1$) は、乱れに対する粒子の応答に Tchen の理論 (Hinze, 1975) を適用することが有効であることが示唆された。Tchen の理論は、統計論的なモデルであり、特に乱流渦の構造について言及されていない。従って、Tchen の理論を確率論的に展開することが可能である。そこで、本節では Sommerfeld (1993) の粒子運動に確率的な外乱を導入する手法である Langevin model を用いて、Tchen の理論の再現性を調べ、例えば LES への Langevin model の適用可能性について言及する。

連続相の速度の変動成分を u' 、粒子の速度の変動成分を v' とおく。離散化した Langevin 方程式 (連続相の速度変動を得る) は以下のように書き表される (Sommerfeld, 1993)。

$$u'(t + \Delta t) = u'(t)R(\Delta t) + \sqrt{1 - R(\Delta t)^2} \sigma(u_{rms}). \quad (2.44)$$

ここで、 $\sigma(u_{rms})$ は rms 値が u_{rms} となる白色の外乱を表す。また、 $R(\Delta t)$ は、 u' についての自己相関係数である。粒子の速度の変動成分に v' に対する輸送方程式は以下に示されるように式 (2.33) から以下のように書き表される。

$$\frac{dv'_i}{dt} = \frac{3}{2\rho^* + 1} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{u'_i - v'_i}{\tau_p} + o(u') + o(v'). \quad (2.45)$$

さて、まず、Langevin 方程式 (式 (2.44)) の厳密解の例を以下に示す。変動速度 u' に対する積分時間 $T_I (= \int_0^\infty dt \overline{u'(0)u'(\tau)}/\overline{u'u'^{(\infty)}})$ が陽に与えられている場合、理論解が容易に求まるように式 (2.44) の自己相関係数を

$$R(\Delta t) \sim \exp(-\Delta t/T_I) \quad (2.46)$$

と定義する。速度変動の平均値 $\overline{u'u'}(t)$ の理論解は、 $u'(t)|_{t=0} = 0$ の初期条件の下、以下のように書き表される

$$\overline{u'u'}(t) = \overline{u'u'^{(\infty)}} \left(1 - \exp\left(-\frac{2t}{T_I}\right) \right). \quad (2.47)$$

また、 $u'(t)$ の確率密度関数 (PDF) は、以下のように書き表される。

$$PDF\left(\frac{u'(t)}{\sqrt{\overline{u'u'^{(\infty)}}}}\right) = \frac{1}{2\pi(1 - \exp(-2t/T_I))} \exp\left(-\frac{t^2}{2T_I^2(1 - \exp(-2t/T_I))}\right) \quad (2.48)$$

Langevin 方程式の厳密解に対し Langevin model を数値的にモンテカルロ積分を行った結果の再現性について以下に示す。式 (2.44) について、式 (2.46) の関係を用いて、1000

個のサンプル粒子にランダムな外力を与え、 $T_l = 1.0$, $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$, $u_{rms} = 1.0$ の条件で数値積分し、理論解 (式 (2.47)(2.48)) と比較する。ここで、 $\sigma(u_{rms})$ には、 $-\sqrt{3}u_{rms} \sim \sqrt{3}u_{rms}$ の一様乱数を用いた。図 2-29 には $\overline{u'u'}(t)/\overline{u'u'}^{(\infty)}$ の時間発展を、図 2-30 には $PDF(u'(t)/\sqrt{\overline{u'u'}^{(\infty)}})$ の時間依存性を示す。両方の図において、点は計算結果、線は式 (2.47)(図 2-29) と式 (2.48)(図 2-30) で与えられる理論解を表し、両者とも良好に一致していることがわかる。次に、式 (2.44) で得られた結果を式 (2.45) に導入し、 $\sqrt{v'v'}/\sqrt{u'u'}$ を算出する。このとき、 $T_l \rightarrow T_{L_f}$ (流体のラグランジアン積分時間) とすると、 $\sqrt{v'v'}/\sqrt{u'u'}$ の厳密解は、Tchen の理論解 (式 (2.43)) に一致する。図 2-31 には、 $\sqrt{v'v'}/\sqrt{u'u'}$ と T_{L_f} の関係について、式 (2.44)(2.45)(2.46) を用いて数値的に解いた結果 (点) と理論解 (線) が示されている。なお、密度比 ρ^* は、1000, 3.0 とした。図 2-31 より、離散化された Langevin 方程式 (式 (2.44)) を用いて粒子応答方程式 (式 (2.45)) を数値解とが極めて良好に一致することがわかる。

さて、式 (2.33) では、速度を変動成分 u' , v' について定式化を行っている。流体と粒子の平均速度が $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$ で与えられる場合、速度の変動成分 u' , v' の大きさが $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$ の大きさに比べて小さければ、式 (2.33) は u' と v' の振動方程式として正しい。

LES を用いて粒子運動を解析するには、SGS エネルギーから粒子へとエネルギー輸送を評価するための定式化が必要である。そのためには、 u' を SGS モデルと整合するように、式 (2.44) を用いて確率的に計算し、式 (2.45) を用いて粒子の Sub-Grid Scale (SGS) 速度 (v') の応答を調べることが有効であると考えられる。

Appendix A では、チャネル内の乱流の DNS を用いた one-way coupling 法による粒子運動の数値シミュレーション (Rouson *et al.*, 1997) と同じ条件にて、格子解像度が低い LES の計算を行い、各種 SGS モデルによる計算結果への影響や Langevin Model を用いた SGS エネルギーから粒子へとエネルギー輸送、格子サイズ依存性について調べられている。その結果は、以下に示されるようにまとめられる。

- LES の τ_p に対する粒子乱流統計量の振舞いは、概ね DNS 結果を再現するが、定量的に異なる。
- 確率論的に記述される Langevin モデルによって、Tchen の理論が良好に再現されるにもかかわらず、Langevin モデルで評価される LES の SGS 乱れから粒子分散への影響は小さい。従って、preferential concentration の影響が重要であると考えられる。

2.3 第2章のまとめ

本章は以下のようにまとめられる。

定常セル流れ中の気泡・粒子の挙動

- セル流れ中での気泡・粒子速度の時間発展過程について緩和時間を調べた。その結果、従来から知られているような τ_p^* に比例する影響だけでなく、 τ_p^* が小さい場合には $1/\tau_p^*$ に比例することがわかった。
- τ_p^* に対する粒子・気泡の平均沈降・上昇速度 \bar{V}_x の振舞いは、粒子・気泡の分布形態に大きく依存することが示された。また、粒子・気泡分布は W^* を用いて、表 2-6 に示されるように分類される。

Table 2-6 粒子・気泡分布の分類

$\rho^* > 1$		
	分岐	相転移
$W^* < O(1)$	カオス的	あり
$W^* > O(1)$	非カオス的	あり

$\rho^* < 1$		
	分岐	相転移
$W^* < O(1)$	非カオス的	なし (1点集中)
$W^* \sim O(1)$	非カオス的	あり
$W^* > O(1)$	非カオス的	なし (1線上)

一様等方性乱流中の気泡・粒子運動

- 気泡は重い粒子よりも preferential concentration が強く、rms 速度に対する Tchen の理論とのずれが大きい。
- ストークス数に対する、粒子拡散特性は気泡と重い粒子とで逆の傾向を示す。

なお、本章で行った理論解析はいわゆる、one-way coupling 法によって行われており、分散相から連続相への作用は考慮されていない。実際の流れ場では気泡・粒子運動によっ

て連続相の流れの変調が無視できないが、その強さは、preferential concentration に依存すると考えられる。特に、気泡の場合には、気泡分布の渦構造に対する指向性が強いことから、重い粒子よりも並進運動によって誘起される流れの変調を考慮することが重要であると考えられる。

従って、次章以降では、粒子から流体への作用に着目し、気泡群の並進運動について DNS を用いた詳細な数値解析やそのモデリングに向けた理論解析を行う。

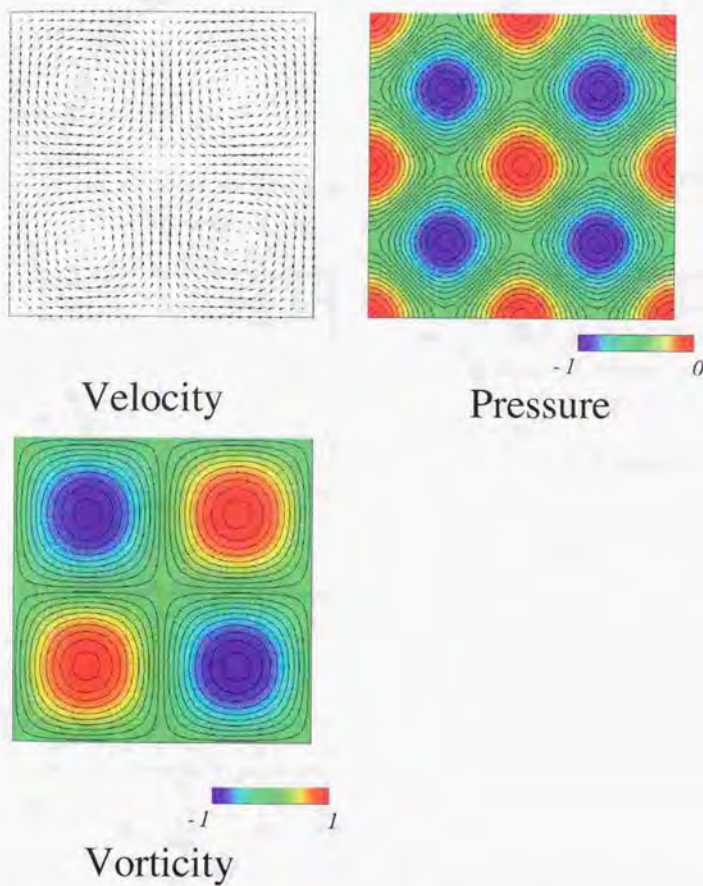


Fig. 2-1 Velocity, pressure and vorticity distribution of cellular flow field.

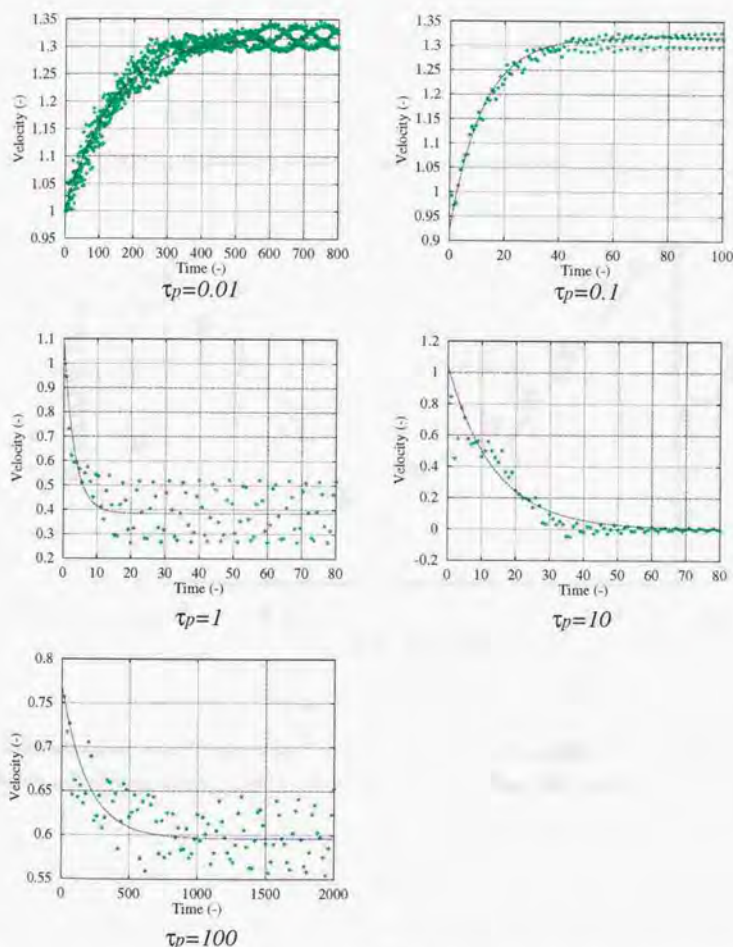


Fig. 2-2 Time evolution of particle mean velocity $\langle V_x^* \rangle(t^*)$ for various particle relaxation time conditions. ($\rho^* = 0$ and $W_x^* = 1.0$) (\diamond : Simulation results; —: Fitting curve given by Eqn. (22))

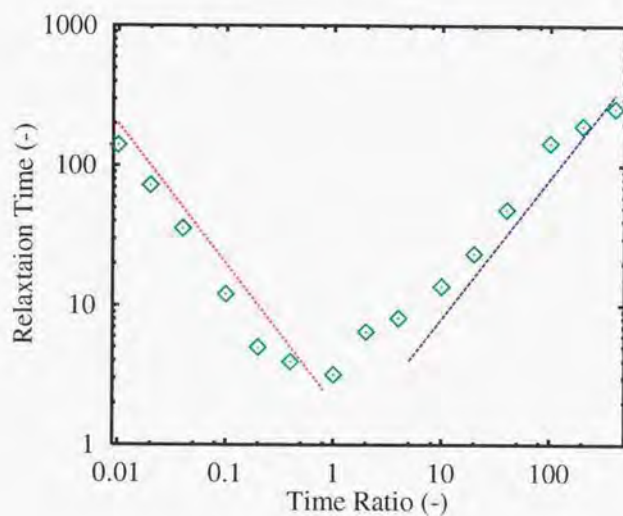


Fig. 2-3 Relaxation time T^* given by Eqn.(22) versus particle relaxation time τ_p^* . ($\rho^*=0$ and $W_g^*=1.0$) (\diamond : Simulation results; Red line: ($\propto 1/\tau_p$); Blue line: ($\propto \tau_p$))

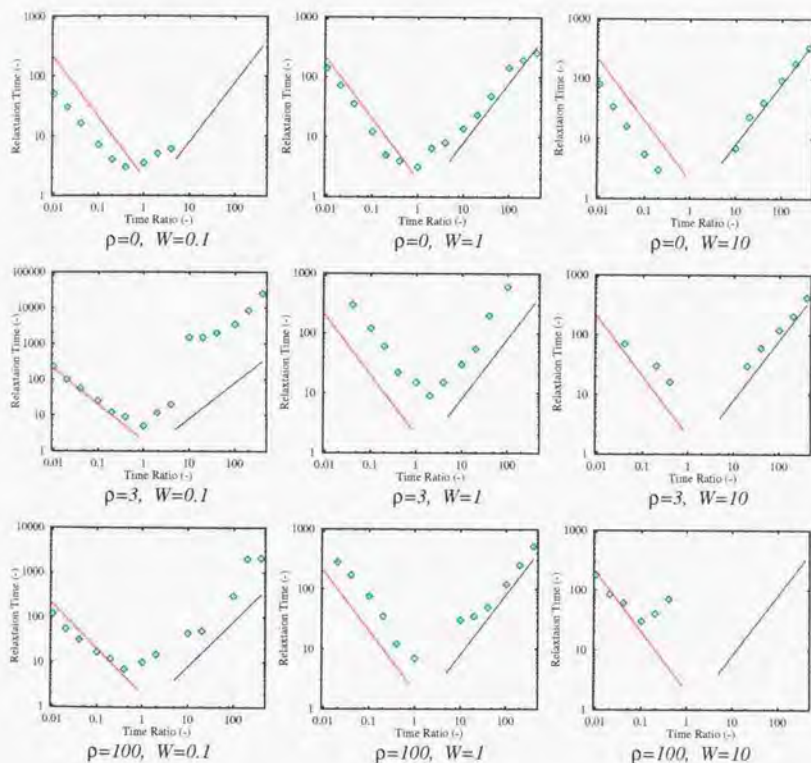
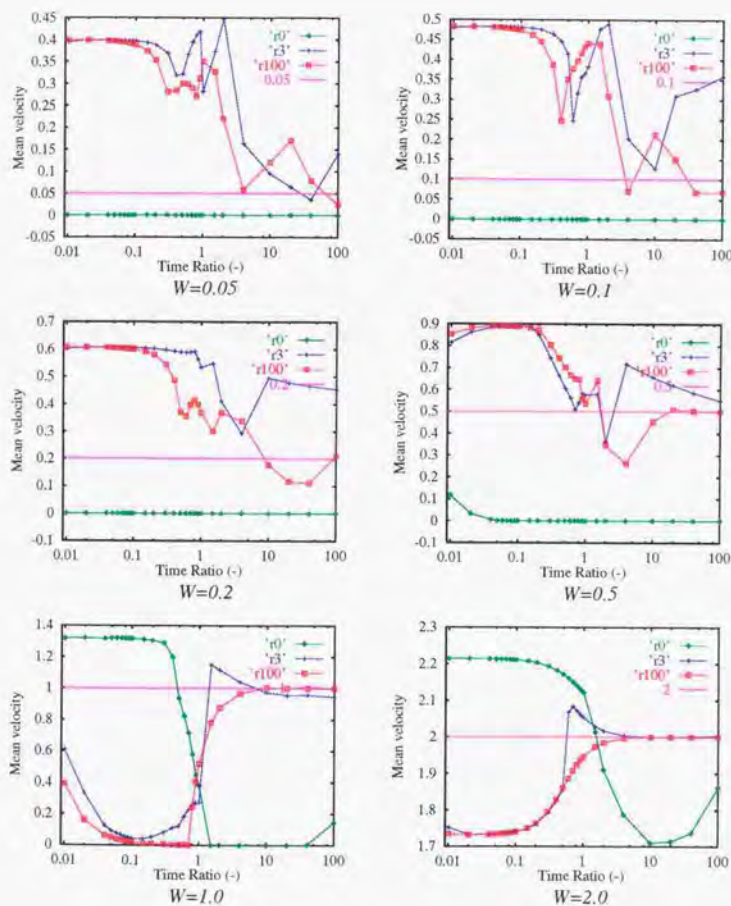


Fig. 2-4 Relaxation time T^* given by Eqn.(22) versus particle relaxation time τ_p^* for various density ratio (ρ^*) and terminal velocity W_x^* conditions in quiescent fluid. (\diamond : Simulation results; Red line: ($\propto 1/\tau_p$); Blue line: ($\propto \tau_p$))



(For caption see next page)

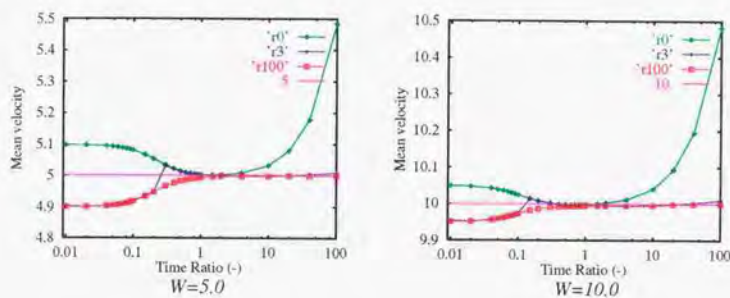


Fig. 2-5 Mean settling or rising velocities versus particle relaxation time τ_p^* for various terminal velocity W_x^* conditions in quiescent fluid. (Green line: $\rho^* = 0$; Blue line: $\rho^* = 3$; Red line: $\rho^* = 100$)

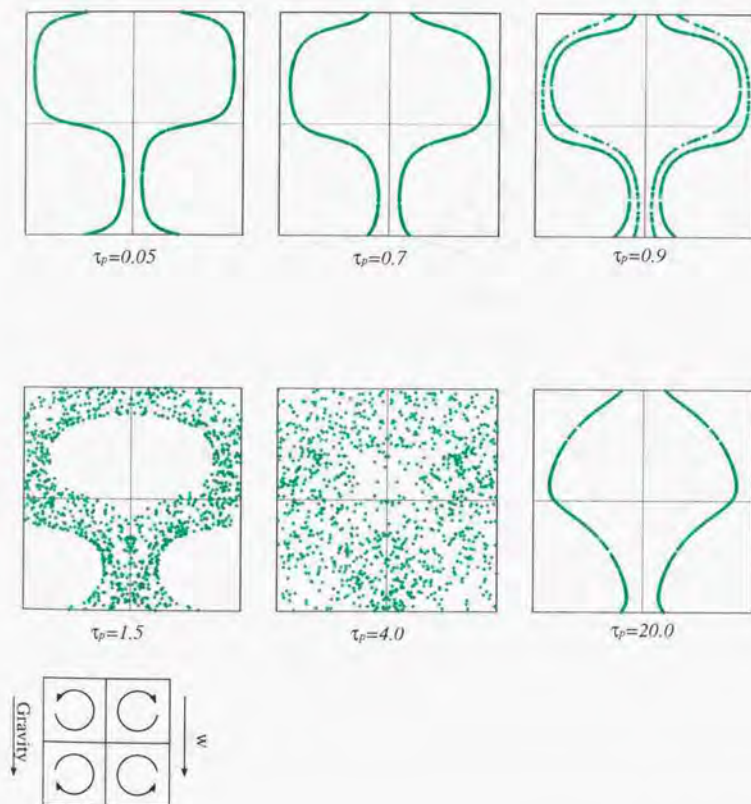


Fig. 2-6 Particle distribution at fully developed time for various particle relaxation time (τ_p^*) conditions. ($\rho^* = 3, W_x = 0.2$)

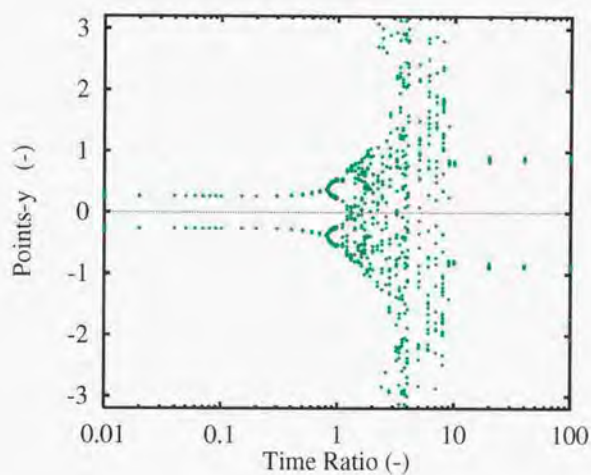


Fig. 2-7 Bifurcation diagram of particle y-position versus particle relaxation time τ_p^* in the region of $x \in [0.475\pi, 0.525\pi]$. ($\rho^* = 3, W_x = 0.2$)

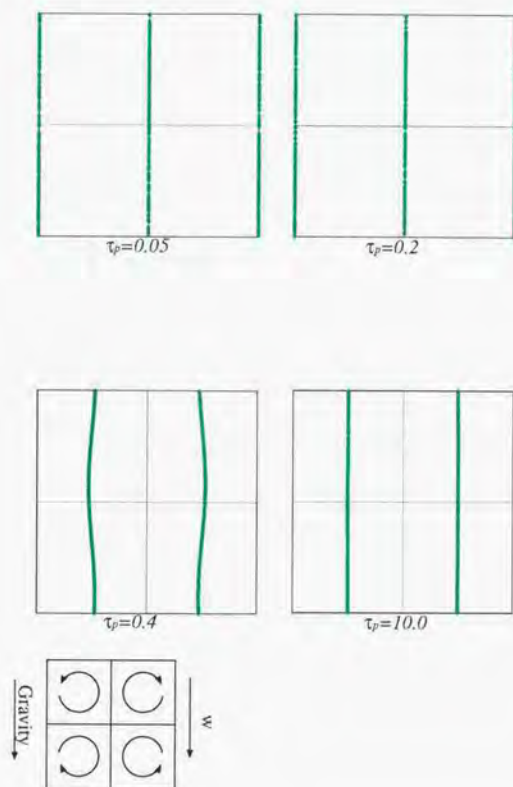


Fig. 2-8 Particle distribution at fully developed time for various particle relaxation time (τ_p^*) conditions. ($\rho^* = 3, W_x = 5$)

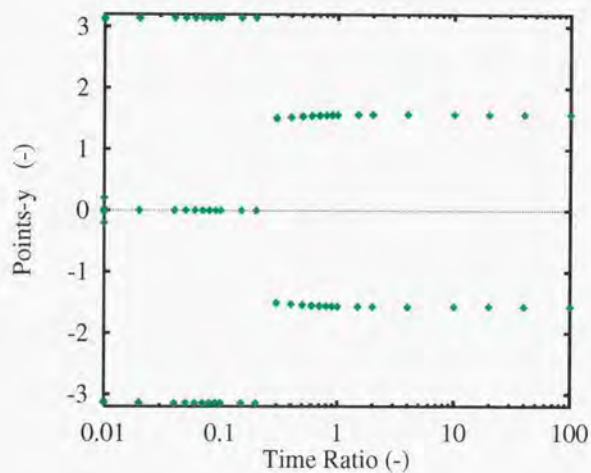


Fig. 2-9 Bifurcation diagram of particle y-position versus particle relaxation time τ_p^* in the region of $x \in [0.475\pi, 0.525\pi]$. ($\rho^* = 3, W_x = 5$)

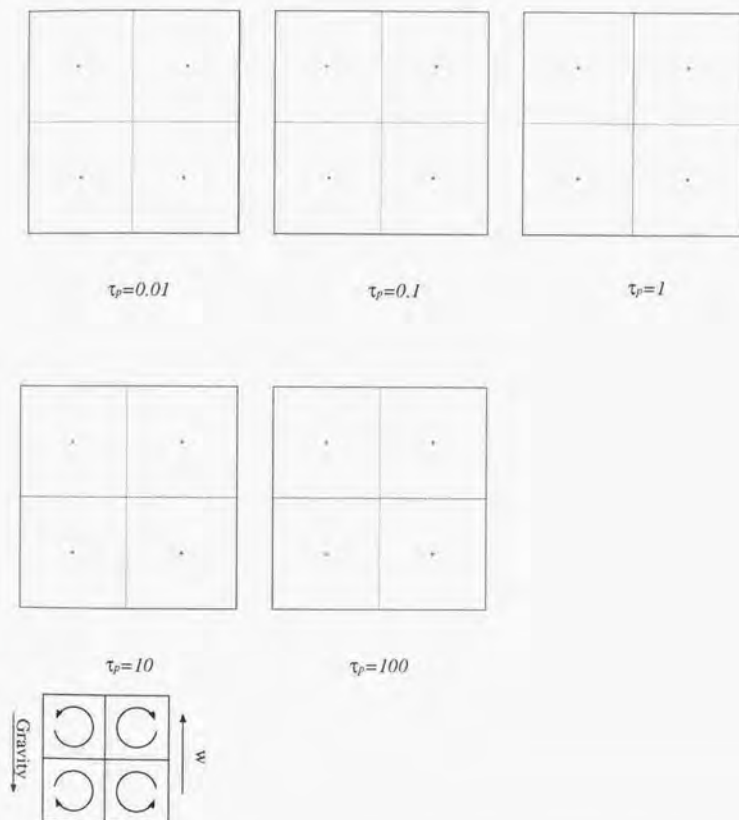


Fig. 2-10 Particle distribution at fully developed time for various particle relaxation time (τ_p) conditions. ($\rho^* = 0$, $W_x = 0.2$)

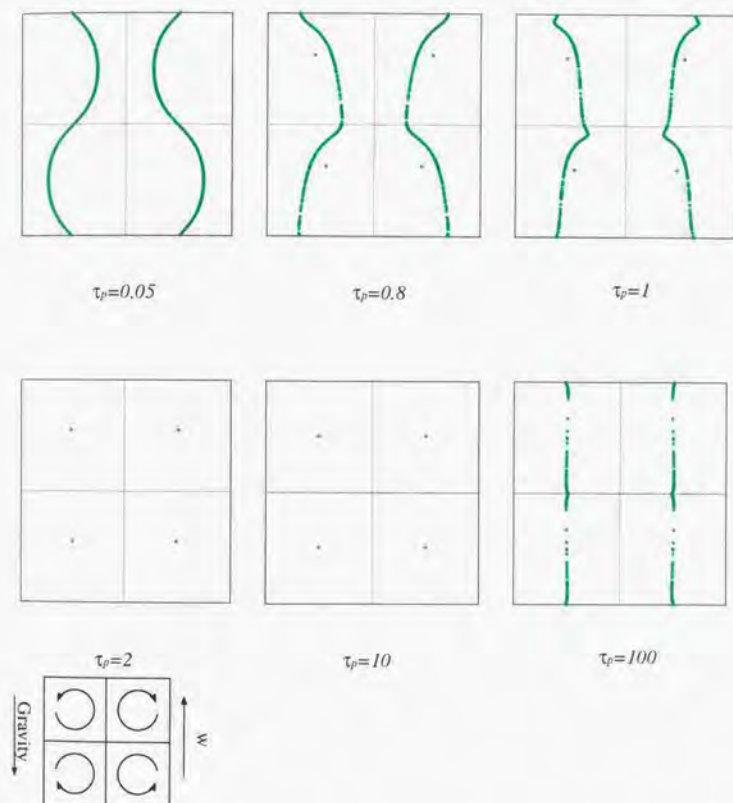


Fig. 2-11 Particle distribution at fully developed time for various particle relaxation time (τ_p^*) conditions. ($\rho^* = 0$, $W_x = 1$)

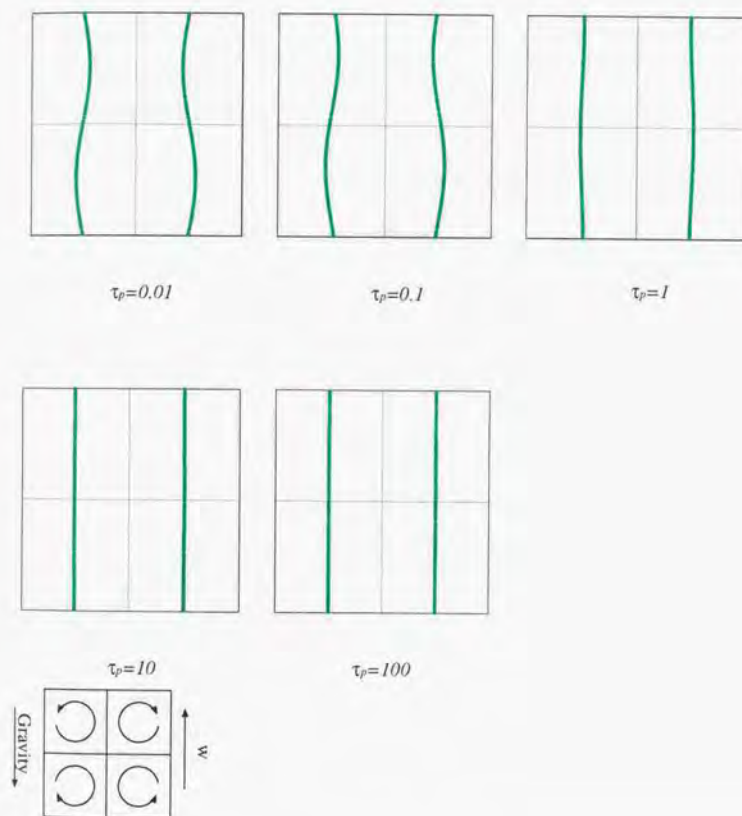


Fig. 2-12 Particle distribution at fully developed time for various particle relaxation time (τ_p^*) conditions. ($\rho^* = 0, W_x = 5$)

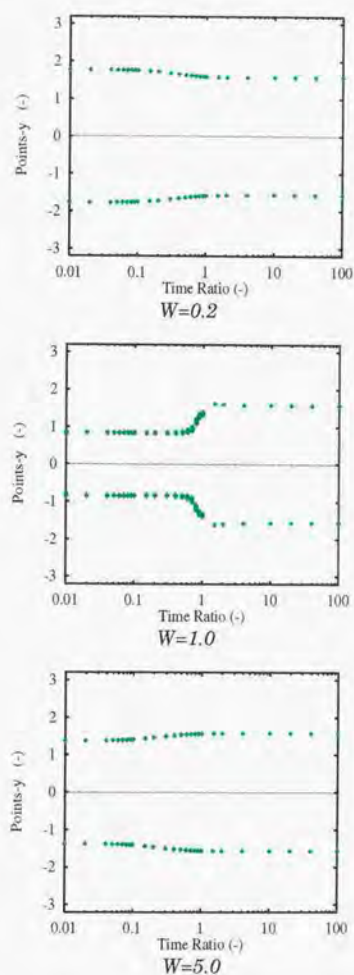


Fig. 2-13 Bifurcation diagram of particle y-position versus particle relaxation time τ_p^* in the region of $x \in [0.475\pi, 0.525\pi]$ for $W_x=0.2, 1.0$ and 5.0 . ($\rho^* = 0$)

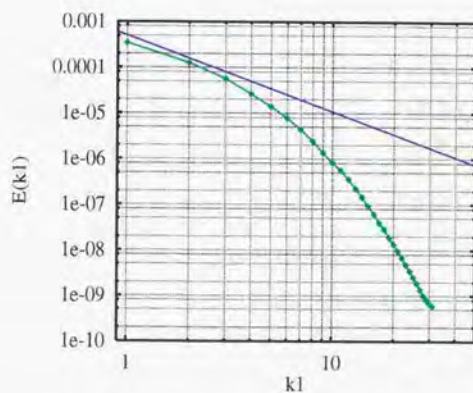


Fig. 2-14 One-dimensional vertical energy spectrum distribution versus wave number.
(Green line: Present DNS result; Blue line: $-5/3$ power law)

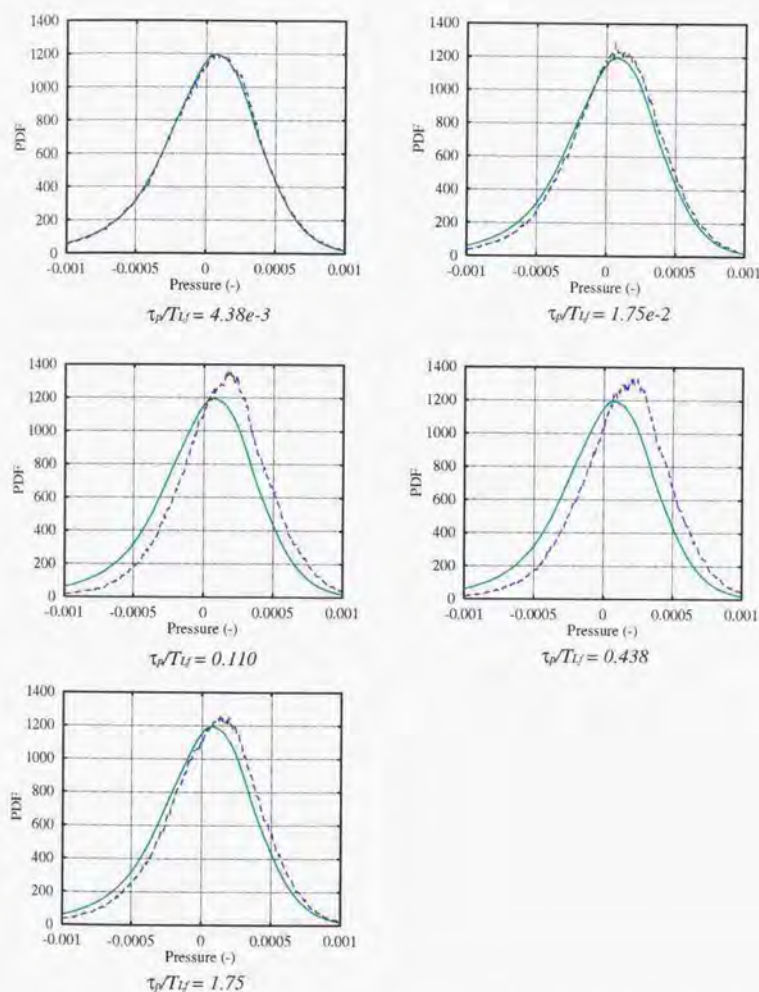


Fig. 2-15 Probability density function of pressure. (Green line: Single phase; Blue line: Particle $\rho^* = 1000$)

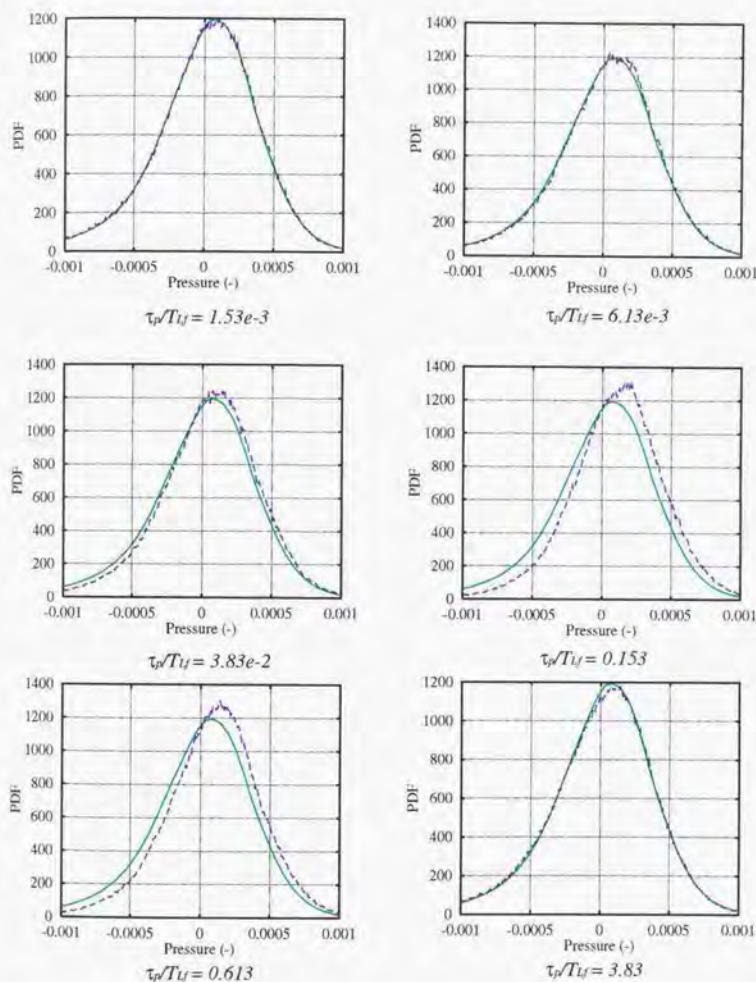


Fig. 2-16 Probability density function of pressure. (Green line: Single phase; Blue line: Particle $\rho^* = 3$)

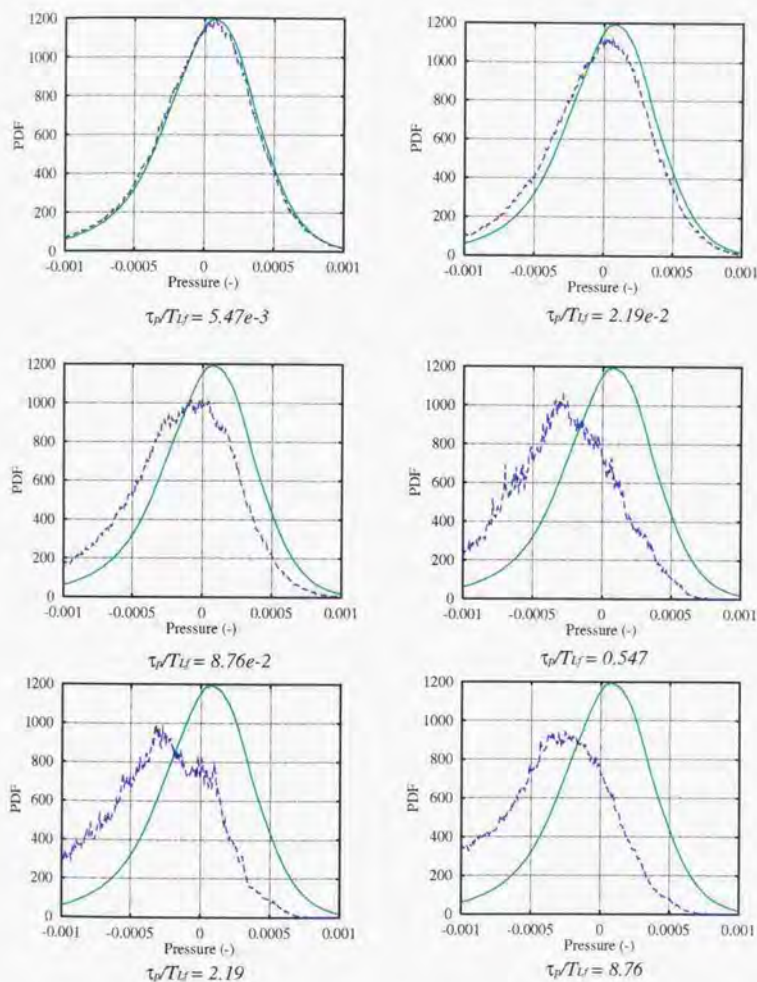


Fig. 2-17 Probability density function of pressure. (Green line: Single phase; Blue line: Bubble $\rho^* = 0$)

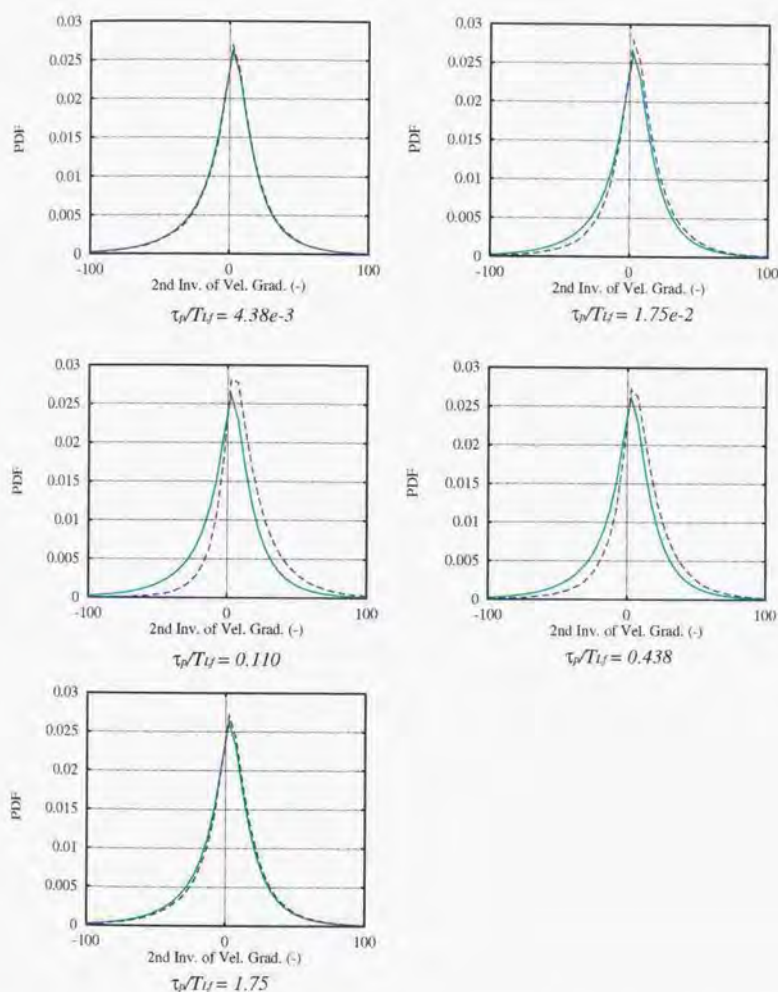


Fig. 2-18 Probability density function of 2nd invariant of velocity gradient tensor.
(Green line: Single phase; Blue line: Particle $\rho^* = 1000$)

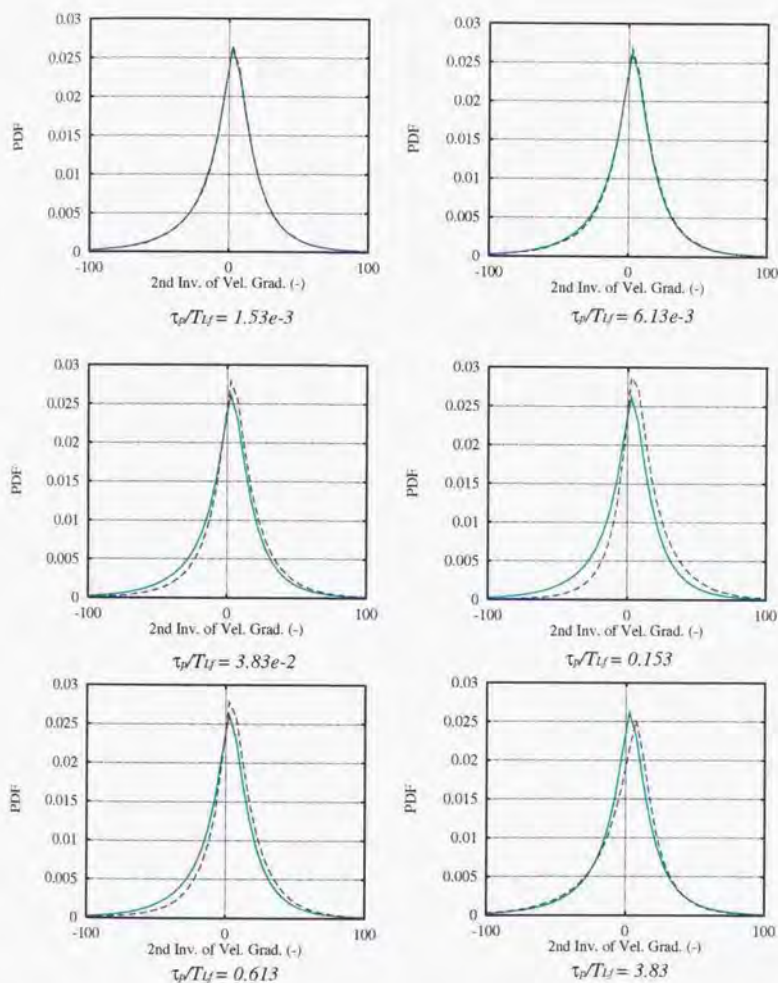


Fig. 2-19 Probability density function of 2nd invariant of velocity gradient tensor. (Green line: Single phase; Blue line: Particle $\rho^* = 3$)

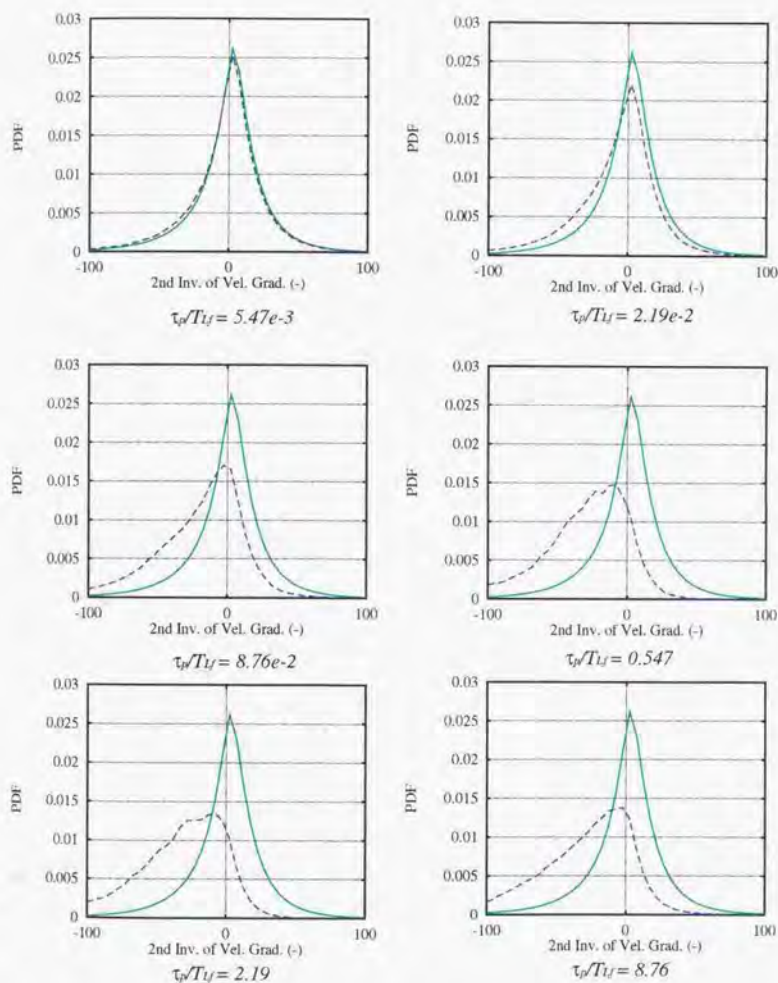


Fig. 2-20 Probability density function of 2nd invariant of velocity gradient tensor. (Green line: Single phase; Blue line: Bubble $\rho^* = 0$)

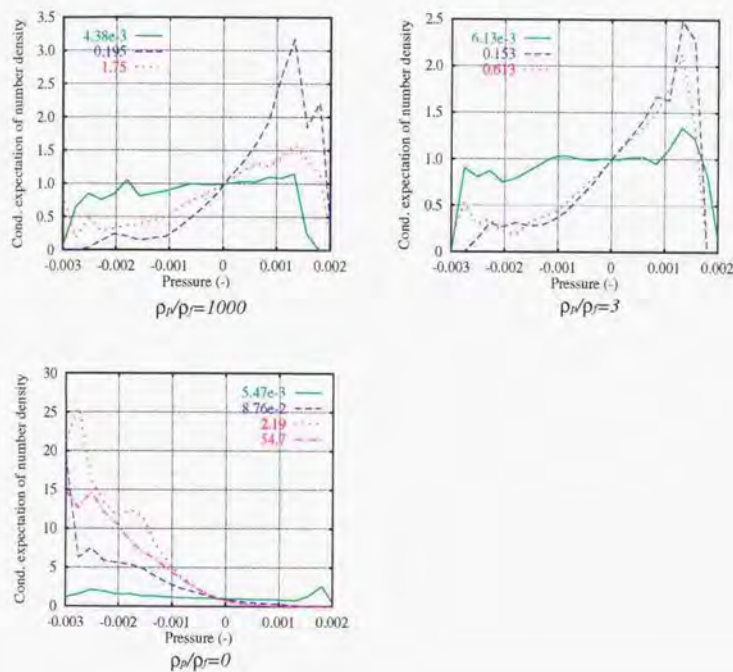


Fig. 2-21 Conditional expectation of particle number density versus pressure for various particle relaxation times ratio τ_p/T_{Lf} conditions.

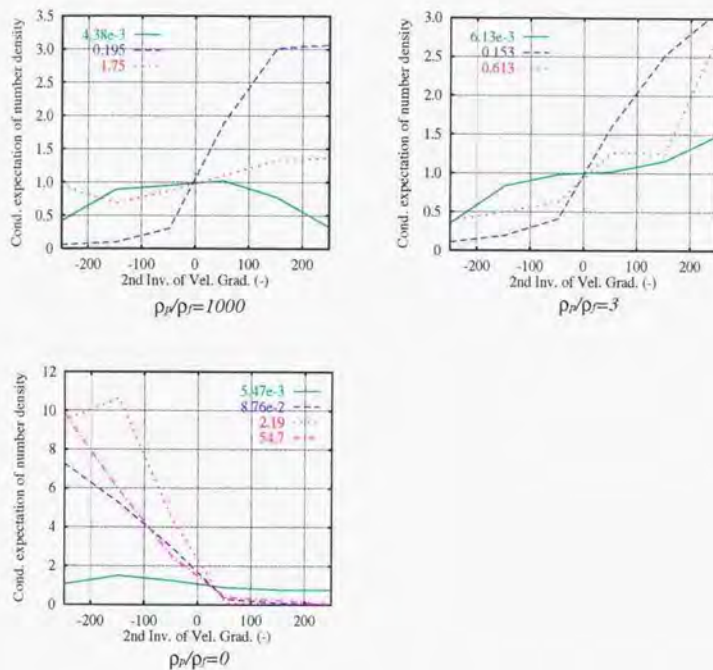


Fig. 2-22 Conditional expectation of particle number density versus 2nd invariant of velocity gradient tensor. for various particle relaxation times ratio τ_p/T_{LJ} conditions. ($\rho^* = 1000, 3, 0$)

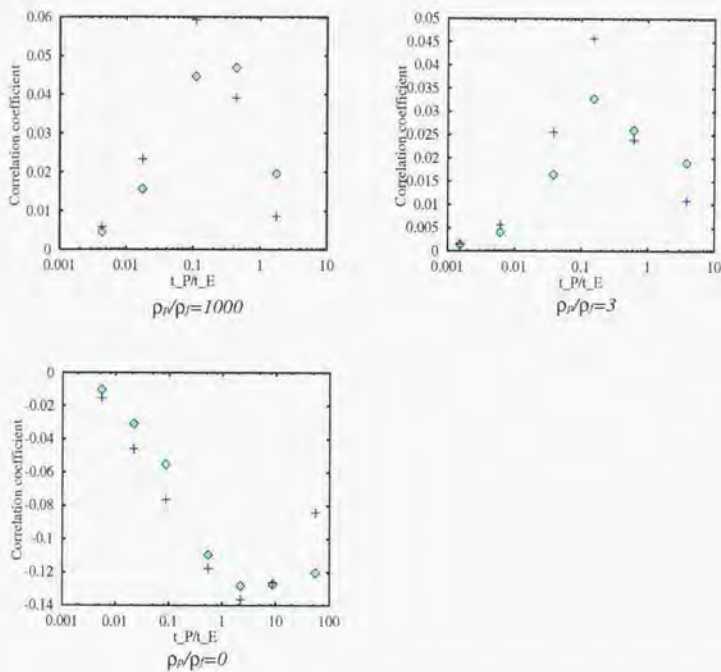


Fig. 2-23 Correlation coefficients of particle number density for pressure (\diamond) and 2nd invariant of velocity gradient tensor ($+$) versus particle relaxation time ratio τ_p/T_{LJ} . ($\rho^* = 1000, 3, 0$)

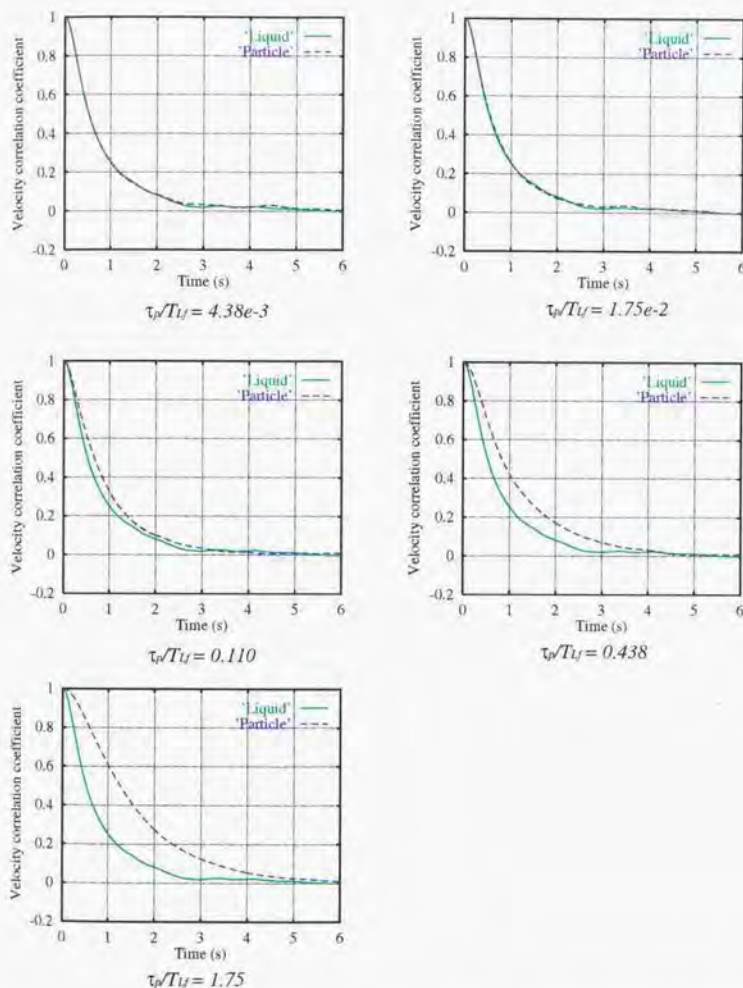


Fig. 2-24 Time evolution of Lagrangian autocorrelation coefficients of velocity for various particle relaxation time ratio τ_p/T_{Lf} conditions. (Green line: Single phase; Blue line: Particle $\rho^* = 1000$)

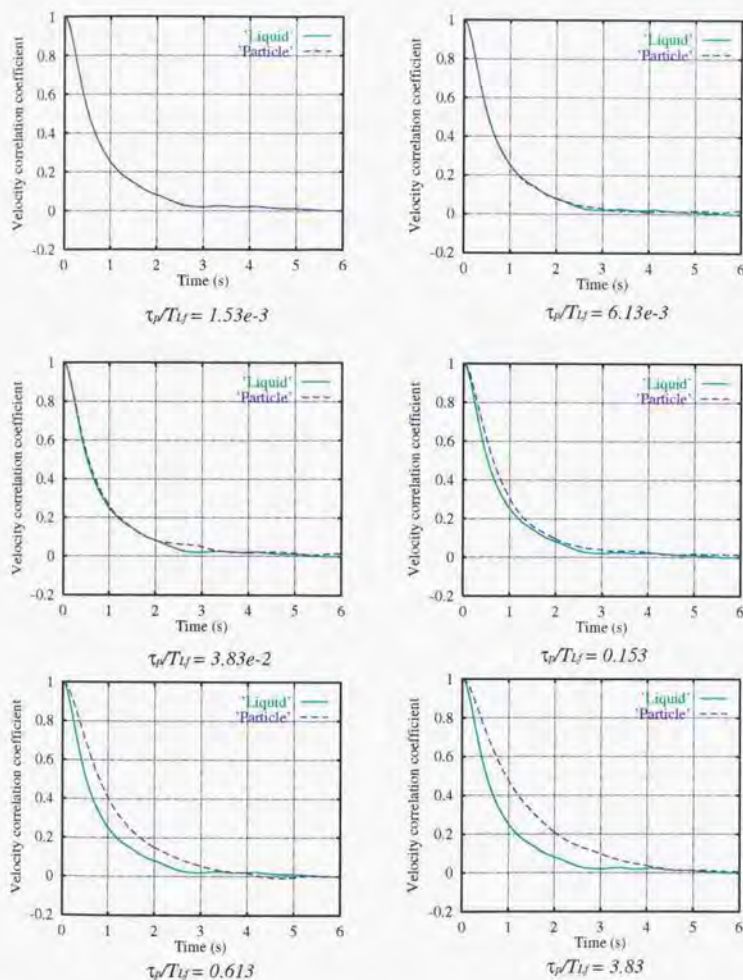


Fig. 2-25 Time evolution of Lagrangian autocorrelation coefficients of velocity for various particle relaxation time ratio τ_p/T_L conditions. (Green line: Single phase; Blue line: Particle $\rho^* = 3$)

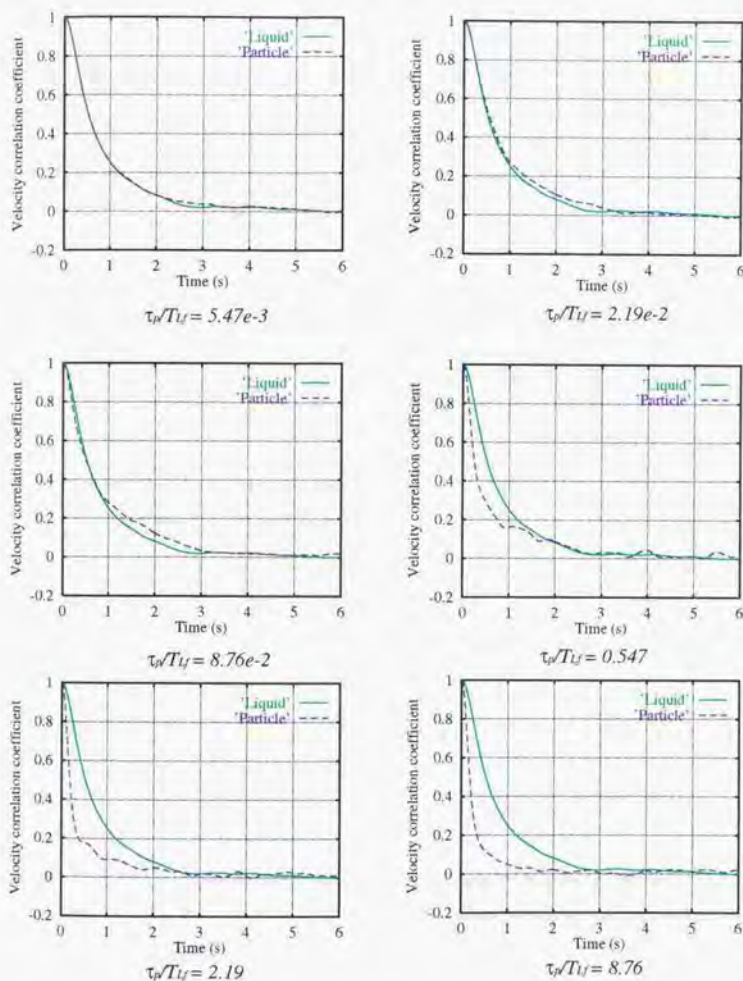


Fig. 2-26 Time evolution of Lagrangian autocorrelation coefficients of velocity for various particle relaxation time ratio τ_p/T_{Lf} conditions. (Green line: Single phase; Blue line: Bubble $\rho^* = 0$)

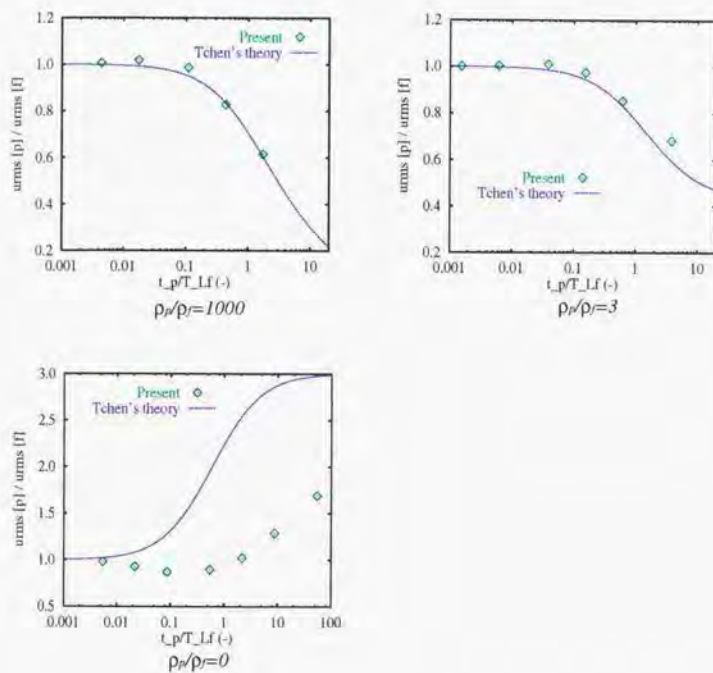


Fig. 2-27 Relative particle rms velocity with fluid one in a homogeneous turbulence versus particle relaxation time ratio τ_p/T_{Lf} , ($\rho^* = 1000, 3, 0$) (Symbols: Present ; Blue line: Tchen's theory (Hinze, 1975))

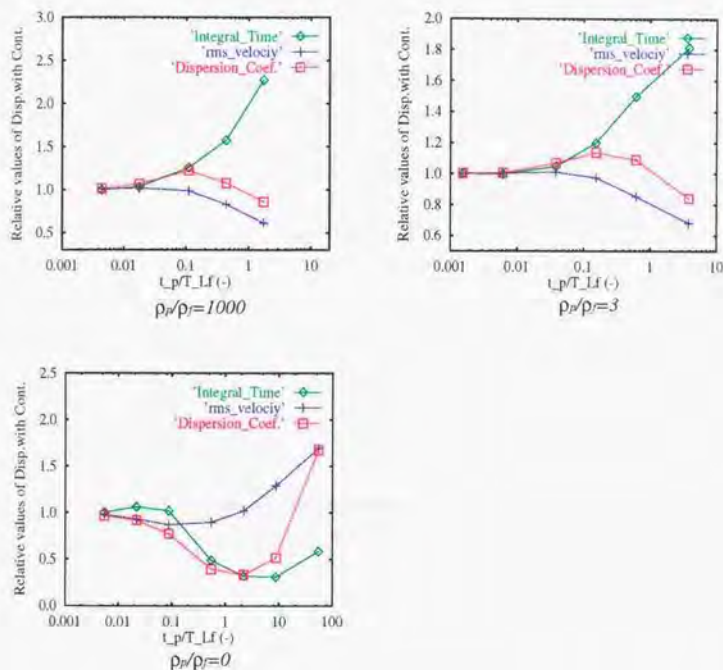


Fig. 2-28 Relative value of integral time, rms velocity and dispersion coefficient of particle with those of fluid versus particle relaxation time ratio τ_p/T_{Lf} . ($\rho^* = 1000, 3, 0$)

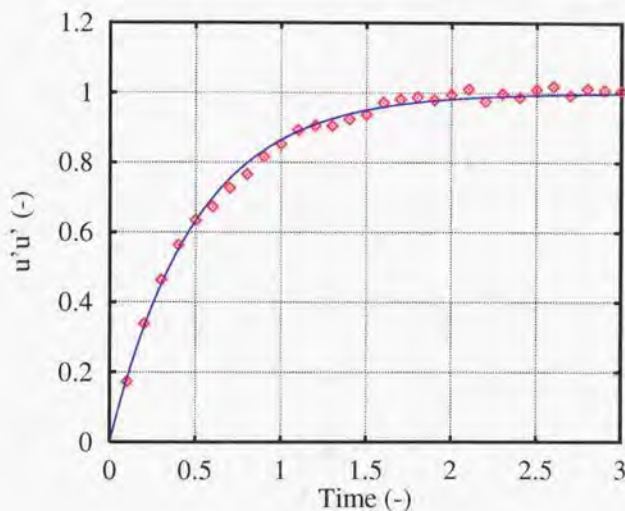


Fig. 2-29 Time evolution of velocity $\overline{u'u'}(t/T_I)/\overline{u'u'}^{(\infty)}$. (Diffusion coefficient $D = \overline{u'u'}^{(\infty)}/T_I$, $\overline{u'u'}^{(\infty)}$ is fluctuation magnitude and T_I is integral time given by $\int_0^\infty d\tau \overline{u'(0)u'(\tau)}/\overline{u'u'}^{(\infty)}$, $u'(t)|_{t=0} = 0$) (\diamond : Discrete Langevin equation model coupling with white noise. Number of sampling particle is 1000. $-$: Analytical solution ($\overline{u'u'}(t)/\overline{u'u'}^{(\infty)} = 1 - \exp(-2t/T_I)$))

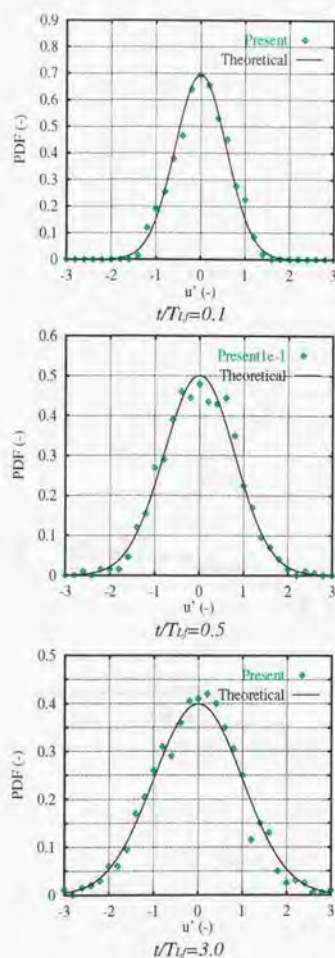


Fig. 2-30 Time (t/T_I) dependencies of probability density function of $u'(t)/\sqrt{\overline{u'u'}^{(\infty)}}$ given by the dispersion equation. (Diffusion coefficient $D = \overline{u'u'}^{(\infty)}T_I$. $\overline{u'u'}^{(\infty)}$ is fluctuation magnitude and T_I is integral time given by $\int_0^\infty d\tau \overline{u'(0)u'(\tau)}$. $u'(t)|_{t=0} = 0$) (\diamond : Discrete Langevin equation model coupling with white noise. Number of sampling particle is 1000. $-$: Analytical solution)

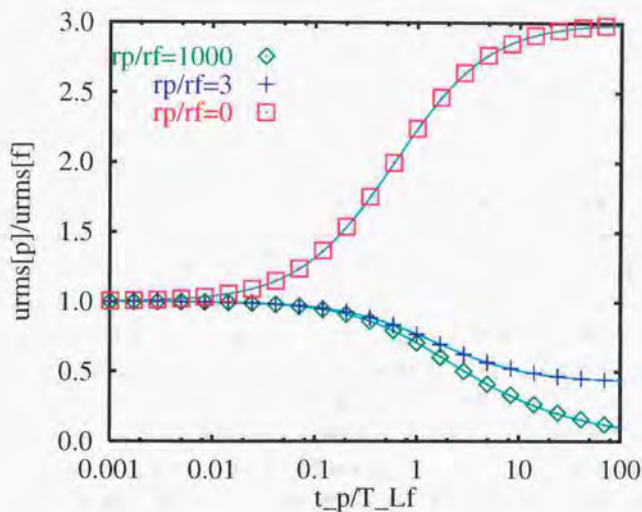


Fig. 2-31 Relative particle rms velocity with fluid one in a homogeneous turbulence versus particle relaxation time ratio τ_p/T_{Lf} . ($\rho^* = 1000, 3, 0$) (Symbols: Discrete Langevin equation model coupling with white noise; —: Tchen's theory (Hinze, 1975))

Chapter 3

気泡群の直接シミュレーション

はじめに

水中の微小な気泡群を含む系では、気泡群が浮力によって上昇する際に、物質輸送過程に対して強い拡散効果もたらす。この拡散現象は、特に低エネルギーで高効率な液相化学反応器（バイオリアクターや化学プラントなど）への応用に期待されており、数値シミュレーションを用いた合理的な予測が要求されている。

気泡流に代表される多相系の流れ場では、体積力、密度、粘性等の非一様性、時間・空間の特性スケールの多様性、渦と気泡との非線形な相互作用などによって非常に複雑な流れ場が作り出されることが知られている。混相流の統計的な流動特性に対し信頼性の高い予測を行うには、これら様々な要因を正しく定式化し、解析することが必要である。

本研究では、多数の気泡を含む流れに対する解析モデルの高度化やその物理現象解明のために、気泡間の流体力学的相互作用を受けた気泡群の運動特性や気泡運動と媒質の流動との干渉機構に対する知見を得ることを目的とする。特に、気泡間距離を代表スケールとして持つ「気泡流のメソスケール」の現象を解明することに着目し、直接計算シミュレーションを用いた解析を行う。本章では、まず、計算手法を開発し、その妥当性について検討を行う。次に、静止液体中において微小な球形気泡が多数分散している系を対象として数値計算を行い、抗力係数のボイド率依存性や気泡群の相互干渉によってもたらされる自己拡散などの統計量について示す。また、従来の平均化方程式を用いた気泡流解析モデルでは考慮されていなかった、気泡流のSGS (Sub-Grid Scale) 応力モデル構築を目指し、直接数値シミュレーション結果にフィルタ操作を施すことによって算出されるSGS応力と、各種SGSモデルによって得られる値を比較・検討する。

平均化方程式を用いた気泡流解析の問題点について

実機を想定した膨大な数の気泡が含まれる流れに対して直接数値シミュレーションを行うことは莫大な計算資源を必要とし、現実的でない。例えば、長さ、奥行き、高さがすべて50cmの水槽に径が1mmの気泡群によって循環される流れを対象とした直接計算には $O(10^{11})$ 個程度の格子が必要であり、TFlopsのマシンを使ったとしても、有用な結果を得るには数カ月～数年もの時間を要する。従って、気泡流を数値予測するには、直接数値シミュレーションでなく、計算負荷の低減がはかられた解析手法を用いることが工学的に有効である。幾つかある既存の気泡流数値解析方法の中で、流体の支配方程式を平均化して、両相を連続体として扱う「平均化方程式」(Drew, 1983)を用いる手法は、流体の質量・運動量の保存則から直接導出されており、最も有力なものである。しかしながら、平均化方程式を用いた気泡流数値解析では、方程式を閉じた形にするための構成方程式を必要とし、現状での構成方程式には未解決の問題点が多く残っている。問題点を列挙すると、以下のように示される。

- 流体から気泡への作用

- 物理的な意味が不明瞭な構成方程式がしばしば用いられる。

- 気泡から流体への作用

- 質点モデルが用いられ、気泡運動によって形成される境界層や後流の影響については無視されている。

- Reynolds stress 項 (乱れ、気泡運動に伴う擬似的な乱れ)

- 全く考慮されていない、もしくは、単相流の乱流モデルがそのまま使われている。

以上の問題点を踏まえ、本研究では気相体積率や重力をパラメタとした直接数値シミュレーションを行い、抗力係数や乱れエネルギー等について調べる。また、気泡から流体への作用のモデル化に関して、気泡によって誘起される速度分布を少ない情報でデータベース化するための方法を提案する。そして、平均化方程式を使う気泡流の予測法に適した、より信頼性の高いモデルの確立をはかる。

3.1 矩形格子を用いた計算方法の構築

3.1.1 仮定

本研究では、気泡が不純な液体中に存在し、気泡体積が十分に小さく、気泡周囲の圧力変動が絶対圧力に対して十分に小さい状況を想定して解析を行う。水中を上昇する径が 1mm 以下の気泡は、変形が小さくほぼ球形を保つことが知られている。また、極微量の不純物の存在によって、気泡の上昇速度は剛体球のものに近くなることが知られている。従って、以下に示される仮定の下、支配方程式の定式化を行う。

- 気相の圧縮性は考慮しない。
- 気泡は球形を保つ。
- 気泡表面での境界条件は速度滑りが零。

3.1.2 支配方程式

本研究では非圧縮性流体の支配方程式である、Navier-Stokes 方程式を直接解く。また、気泡の運動は、抗力・揚力などを記述する実験式を使わずに、ニュートン則に基づき、気泡界面上の応力を表面積分した値や重力との釣り合いから求める。

◦ 質量保存式:

$$\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1)$$

◦ 運動量保存式:

$$\frac{\partial \rho_k u_{ki}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u_{ki} u_{kj}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -\delta_{ij} p + \mu_k \left(\frac{\partial u_{kj}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{ji}}{\partial x_i} \right) \right\} + (\rho_k - \rho_f) g_i, \quad (3.2)$$

◦ 気泡の並進運動方程式:

$$\frac{4\pi r_p^3 \rho_p}{3} \frac{du_{pi}}{dt} = \int_{r=a} dS \left\{ -\delta_{ij} p + \mu \left(\frac{\partial u_{ji}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_i} \right) \right\} n_j + \frac{4\pi r_p^3}{3} (\rho_p - \rho_f) g_i. \quad (3.3)$$

◦ 気泡の角運動量方程式:

$$\frac{8\pi r_p^5 \rho_p}{15} \frac{d\omega_{pi}}{dt} = \int_{r=a} dS \epsilon_{ijk} r_j \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_{fk}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{lk}}{\partial x_k} \right) \right\} n_l \quad (3.4)$$

3.1.3 気泡表面上での境界条件の設定方法

気泡表面上での滑りなし条件について

本研究では、矩形格子を用いて連続相の数値解析を行う。また、気泡の界面では、境界適合した格子を用いていないので、気泡の界面で滑りなし条件を満たすような工夫を必要とする。特に、気泡運動を正しく計算するためには、気泡の界面での境界条件が重要となる。まず、本研究と同様に、多数の剛体粒子の運動を扱った従来の計算における境界条件の設定方法について説明する。

Pan & Banerjee (1997) は、粒子境界面での滑りなし条件を陽に用いずに、運動量の輸送方程式中の対流項を修正することによって、粒子表面の粒子・流体間の相対速度が相殺されるような定式化を行っている。この方法では、各時間ステップで反復計算が行われ、粘性項の影響によって粒子境界面での相対速度が 0 に近づくことが利用されている。

滝口ら (1998) は、粒子内部にある格子点上の速度を粒子速度としている。大局的には 4 次精度の差分法が用いられており、粒子近傍の流体の運動量輸送を解く際には、粒子内部に差分格子のステンシルが掛らないように CIP 法が用いられている。

本研究では、差分の精度を全空間で一様とし、物体壁面上での滑りなし条件を運動量の生成項としてではなく、瞬時の速度場の解を利用するものとする。これによって、精度を保証しつつ、計算の軽減がはかられる。本研究では、気泡表面上の滑りなし条件と質量保存式 (式 (3.1)) が満たされるように、気泡内部にある格子点上の速度を気泡外部の速度からの外挿によって決定する。境界条件の設定法は図 3-1 の模式図に示される。ここで、速度の定義点にある気泡内部点を $x_i^{(i)}$ (気泡中心点からの位置ベクトル) とすると、対応する、外部の点 $(x_i^{(o)})$ は以下のように書き表される。

$$x_i^{(o)} = \frac{(2a - r^{(i)})x_i^{(i)}}{a}, \quad (3.5)$$

ここで a は球の半径、 r は $(x_i x_i)^{1/2}$ である。また、気泡表面から、外部、内部の点への距離 (ϵ) は以下のように書き表される。

$$\epsilon = r^{(o)} - a = a - r^{(i)} = \frac{r^{(o)} - r^{(i)}}{2}.$$

外向単位法線ベクトル n_i を

$$n_i = x_i^{(i)} / r^{(i)} = x_i^{(o)} / r^{(i)},$$

とすると、気泡の移動速度に対する $x_i^{(o)}$ の相対速度について、 n_i 方向の成分とそれに直交する成分をそれぞれ $u_n(\epsilon)$, $u_t(\epsilon)$ とすると、質量保存式 (式 (3.1)) と気泡表面上での気

泡と周囲流体との相対速度が0の条件になる条件より以下の関係が成り立つ,

$$u_l(\epsilon) = 0 + \epsilon \times u_{l1} + o(\epsilon), \quad (3.6)$$

$$u_n(\epsilon) = 0 + \epsilon \times 0 + \epsilon^2 \times u_{n2} + o(\epsilon^2), \quad (3.7)$$

ここで, $x_i^{(i)}$, $x_i^{(o)}$ に対応する速度をそれぞれ $u_{fi}^{(i)}$, $u_{fi}^{(o)}$ とすると, 気泡内部の速度は, 以下のように近似される (図 3-1) .

$$u_{fi}^{(i)} = -u_{fi}^{(o)} + 2n_i n_j (u_{fj}^{(o)} - u_{pj}) + 2u_{pi}, \quad (3.8)$$

気泡内部の点の $x_i^{(i)}$ は速度が定義されている格子点上であるが, $x_i^{(i)}$ に対応する外部点 $x_i^{(o)}$ は必ずしも格子点上にあるわけではないので, 補間によって $x_i^{(o)}$ の速度 ($u_{fi}^{(o)}$) を算出する必要がある. 気泡表面上での境界条件の設定の補間精度について, 3-2 節において, 幾つかの手法を用いて議論されるが, 2 次精度以上の補間法では, 内挿に必要な格子のステンシルが気泡の内部にかかることから, 本研究では $u_{fi}^{(o)}$ を線形補間によって求めている.

圧力のポアソン方程式に対する気泡内部の予測速度の発散について

本研究では, 後述するように非圧縮性流体の解析である MAC 系の解法を用いる. このとき, 運動量方程式の予測段階で, 予測速度の発散をとり, 速度のソレノイダル条件が満たされるように圧力ポアソン方程式が解かれる.

気泡間の衝突について

気泡間の衝突を妨げる物理的な要因には, 接近した気泡間の流体を介して反発力が働く, 潤滑効果が知られているが, 慣性の影響が強い場合には衝突が起こり得る. 気泡間の衝突前後の過程は, 流体力学的な作用だけで記述することができないために, 何らかの仮定を必要とする. 本研究では, 気泡の衝突を完全弾性衝突として扱う. 従って, 衝突前後の気泡の運動量が保存性と, 気泡間の反発係数を 1 とする条件によって衝突の計算を行う. 本研究では, 数値的な安定性をはかるために, 時間刻み (Δt) あたりの気泡重心点の移動距離がメッシュ長さ (Δx) より小さいといった条件 (気泡の移動に伴うクーラン条件) を課している. 従って, 気泡径に比べて Δt 間の気泡移動距離は十分に小さいので, 衝突時刻・位置は一意に決まる.

3.1.4 計算手法

本研究での主な解析手順は, 龍口ら (1998) の手法に準じている. 本研究で解かれる偏微分方程式は有限差分法 (Finite Difference Method, FDM) によって近似している. また,

数値的な圧力振動を防ぐためにスタッガード格子を用いており、圧力、速度をそれぞれセル中心、セル境界面上で定義する。

方程式を差分化する際の精度について、連続相の空間微分を4次精度の中心差分によって近似している。対流項には森西 (1996) のエネルギー保存型の方法を用いている。また、流体側の時間積分を4階4次精度のRunge-Kutta法によって行っている。解析スキームにはProjection MAC法を用いている。圧力のポアソン方程式については、多重対角行列の前処理付解法であるIncomplete Cholesky preconditioned Conjugate Gradient (ICCG) 法 (渡部ら, 1989; Ferziger & Peric, 1996) によって解いている。

連続相から分散相への補間法については、次節で詳細に述べる。分散相の時間積分に関して、気泡位置算出は、Crank-Nicholson法で行っている。気泡速度の時間積分は、気相の密度が液相よりも小さいために、安定性の観点から工夫を行う必要がある。その方法を以下に説明する。

気泡の並進運動方程式の安定化

本研究では、気泡の密度が流体に比べて十分に小さいので、一見、式(3.3)の左辺(気泡の慣性項)を0とおいて計算を行うことが有効であるように考えられる。しかしながら、本研究では、非圧縮性流体の解析手法を適用しており、圧力はソレノイダル条件を満足するために導入される変数でありことから、式(3.3)の右辺における圧力と粘性応力の時間ステップが異なる。従って、式(3.3)の右辺を零として扱うためには、異なる時間ステップの圧力と粘性応力の影響がキャンセルし合うように、気泡を追跡する必要があり、数値計算上、困難である。

流体に比べて十分に小さな密度を有する粒子に対し、式(3.3)を陽的に数値積分すると、数値不安定がもたらされる。表面応力の表面積分値と体積力が非平衡状態にある場合、式(3.3)の右辺と左辺との釣り合いにより、軽い密度を有する粒子の場合は、左辺の密度が周囲の流体に比べて小さいために、粒子周囲の流体の加速(右辺)よりも、大きな加速度で変動する。特に、気泡のように密度比がほぼ零である場合には、数値的に過剰な気泡加速が計算され、計算が発散する。この不安定は流体の速度・圧力と気泡運動の算出を完全陰的に扱うことによって回避されることが考えられる。しかしながら、完全陰解法では圧力を反復法で求める各イタレーションで気泡に働く応力を計算する必要があり、計算時間が莫大となる。また、圧力と粒子速度を反復法によって陰的に解く場合、密度が0の条件では、疑似時間進行の過程で不安化する。

本研究では、慣性緩和法の概念に基づき、気泡が加速する際にポテンシャルの影響によってもたらされる「付加慣性力」を利用することで安定化をはかる。ポテンシャル流では、気泡が加速するときには、気泡によって排除された流体体積分の慣性力が働き、気泡体積の1/2倍に相当する付加慣性力が働くことが知られているが、レイノルズ数が0の

極限であるストークス流の場合でも付加質量係数は同じ値 (1/2) である。また、高木・松本 (1996) が行った単一球形気泡の運動の直接数値シミュレーションによると、中間レイノルズ数でも付加質量係数を 1/2 とすることが妥当である。従って、付加質量係数はレイノルズ数に対する依存性が小さいと考えられる。以上の観点から、本研究では、以下に示されるように、付加質量係数を常に 1/2 として、気泡の運動に擬似的な付加慣性力を用いることによって、安定化をはかる。

(1) 予測ステップ:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\rho_p}{\rho_f}\right) \frac{u_p^* - u_p^N}{\Delta t} = \frac{3}{2}(\text{Viscous})^N - \frac{1}{2}(\text{Viscous})^{N-1} + (\text{Gravity}). \quad (3.9)$$

(2) 修正ステップ:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\rho_p}{\rho_f}\right) \frac{u_p^{N+1} - u_p^*}{\Delta t} = (\text{Pressure})^{N+1} + \frac{1}{2} \frac{u_p^N - u_p^{N-1}}{\Delta t}. \quad (3.10)$$

ここで、肩の添字 $N, N+1$ はそれぞれ計算のステップ数が $N, N+1$ のときの時刻、* はその中間段階の時刻を表す。また、(Viscous), (Gravity), (Pressure), はそれぞれ、粘性応力の表面積分、気泡にかかる体積力、圧力の表面積分を表す。式 (3.9), (3.10) で、平衡状態、

$$u_p^N - u_p^{N-1} = 0,$$

にある場合には、気泡速度の時間微分項が 0 であり応力による力と体積力が釣り合う。また、粘性応力や圧力がステップ状に急激に変化するとき、応答する気泡の見掛け上の密度は以下のように書き表され、付加慣性力が働くことに相当する。

$$\rho_f/2 + \rho_p,$$

また、式 (3.9), (3.10) を足すことによって、気泡速度の方程式は以下のような時間の 1 次の誤差を持つ式で近似される。

$$\begin{aligned} \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{u_p^{N+1} - u_p^N}{\Delta t} &= (\text{Pressure})^{N+1} + \frac{3}{2}(\text{Viscous})^N - \frac{1}{2}(\text{Viscous})^{N-1} \\ &\quad + (\text{Gravity}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 u_p^N}{\partial t^2} + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

上記の式より、付加慣性力はリーディングオーダーで 0 である。また、付加慣性力を用いた慣性緩和法によって安定化がはかられている項以外の誤差について、2 次精度の時間精度を有する。

気泡の角運動量方程式の扱いについて

本研究では気泡形状を球形としているため、式(3.4)の角運動方程式には圧力が含まれていない。上述した、気泡の並進運動方程式(式(3.3))の安定化操作の必要性は、圧力と粘性応力との時間ステップが異なることに起因していた。従って、角運動方程式(式(3.4))では、安定化操作が不必要である。本研究では、気泡の密度が流体に比べて十分に小さいことから、式(3.4)の左辺を0とみなして計算を進める。

式(3.4)は、気泡の密度を無視すると、以下のように書き表される。

$$0 = \int_{r=0} dS \epsilon_{ijk} n_j n_l S_{kl} \quad (3.12)$$

ここで、 S_{kl} ひずみ速度であり、次節で示されるように、高次精度の内挿法によって気泡界面上に内挿される。

さて、 S_{kl} について気泡の回転がないときの値を S_{kl}^0 と書き表す。また、気泡の角速度 ω_{pi} と書き表すと、気泡内部の角速度によってもたらされる速度は、 $\epsilon_{ijk} x_j \omega_{pk}$ である。例えば、 $\omega_{pz} = 1$ のおいたときに、高次精度の内挿法によって算出される S_{kl} は、気泡の回転を無視したときの値 S_{kl}^0 とは異なる。ここで、 $(\omega_{px}, \omega_{py}, \omega_{pz}) = (1, 0, 0)$; $(\omega_{px}, \omega_{py}, \omega_{pz}) = (0, 1, 0)$; $(\omega_{px}, \omega_{py}, \omega_{pz}) = (0, 0, 1)$ と仮に設定したときに算出される S_{kl} をそれぞれ、 S_{klx}^p , S_{kly}^p , S_{klz}^p と書き表す。式(3.12)の S_{kl} に対する線形性により、実際の角速度 ω_{pi} を用いると、以下に示される関係式が成り立つ。

$$\int_{r=0} dS \epsilon_{ijk} n_j n_l (S_{kl}^0 + S_{klx}^p \omega_{px} + S_{kly}^p \omega_{py} + S_{klz}^p \omega_{pz}) = 0, \quad (3.13)$$

ここで、以下のように書き表される T_i を導入する。

$$T_i^0 = \int_{r=0} dS \epsilon_{ijk} n_j n_l S_{kl}^0, \quad (3.14)$$

$$T_{im}^p = \int_{r=0} dS \epsilon_{ijk} n_j n_l S_{klm}^p, \quad (3.15)$$

式(3.13), (3.14)より、気泡の角速度 ω_{pz} と T_i^0 の関係について、以下のように行列形式で書き表される。

$$T_i^0 = -T_{im}^p \omega_{pm}. \quad (3.16)$$

従って、気泡の角速度ベクトル ω_{pi} は式(3.16)を解けば得られる。

以上の関係をまとめると、気泡の角速度ベクトル ω_{pi} は以下の手順で計算される。

1. 気泡内部の角速度を0として、ひずみ速度テンソル S_{kl}^0 を計算し、式(3.14)の T_i^0 を得る。
2. 気泡内部の角速度成分をそれぞれ1とおいたときのひずみ速度テンソル S_{klm}^p を計算し、式(3.15)の T_{im}^p を得る。
3. 式(3.16)の関係から、 T_{im}^p の逆行列を求め、気泡の角速度ベクトル ω_{pi} を得る。

連続相から気泡表面上への補間法について

本研究では気泡表面上での応力の表面積分を直接行う。従って、気泡表面上の応力は補間によって決定する必要がある。本研究では気泡境界面の、各方向 (x, y, z) に対して 5 次のラグランジュ補間 (6 点内挿) を適用し、圧力と速度勾配の内挿を行う。以下に 1 次元で簡略化して記述する。 $\tilde{x} = 2x/(\Delta x)$ の 5 次の多項式で内挿される変数を近似すると、以下のように表される。

$$f(\tilde{x}) = a_5 \tilde{x}^5 + a_4 \tilde{x}^4 + a_3 \tilde{x}^3 + a_2 \tilde{x}^2 + a_1 \tilde{x} + a_0. \quad (3.17)$$

図 3-2 のような位置関係にあるときには、

$$f(-5) = f_1, \quad f(-3) = f_2, \quad f(-1) = f_3, \quad f(1) = f_4, \quad f(3) = f_5, \quad f(5) = f_6, \quad (3.18)$$

の関係が成り立つので、式 (3.17) より、次式のような行列表現で、 f_i は記述される。

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 25 & -125 & 625 & -3125 \\ 1 & -3 & 9 & -27 & 81 & -243 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

この逆行列を計算して、 a_n は以下のように求められる。

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/256 & -25/256 & 150/256 & 150/256 & -25/256 & 3/256 \\ -9/3840 & 125/3840 & -2250/3840 & 2250/3840 & -125/3840 & 9/3840 \\ -5/384 & 39/384 & -34/384 & -34/384 & 39/384 & -5/384 \\ 1/384 & -13/384 & 34/384 & -34/384 & 13/384 & -1/384 \\ 1/768 & -3/768 & 2/768 & 2/768 & -3/768 & 1/768 \\ -1/3840 & 5/3840 & -10/3840 & 10/3840 & -5/3840 & 1/3840 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

変数 f の空間微分は、式 (3.20) で得られた a_n を用いて、

$$\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x} = \frac{2}{\Delta x} (5a_5 \tilde{x}^4 + 4a_4 \tilde{x}^3 + 3a_3 \tilde{x}^2 + 2a_2 \tilde{x}^1 + a_1), \quad (3.21)$$

と書き表される。

3.2 計算手法の検証

3.2.1 円柱周りに働く抗力係数

本節では、矩形格子を用いて円柱周りの流れの計算を行い、粒子界面上での境界条件の設定方法について議論する。計算結果の妥当性は抗力係数によって評価する。本節では、粒子位置が固定されている系を計算対象とし、流入速度、円柱径、動粘性係数で決まるレイノルズ数をパラメータにした2次元計算を行う。

計算手法

計算の空間精度は、エネルギー保存型の4次精度中心差分法(森西, 1996)を適用する。また、時間微分項については、4段階4次精度のRunge-Kutta法を適用する。境界条件については、以下の3通りの手法を用いて比較検討する。

手法 I.

物体内部の点について速度 0.

手法 II. (3.1.3 節で述べた手法)

図 3-1 に示されたように、 $\langle o \rangle$ の速度を線形内挿で与え、粒子内部の点 $\langle i \rangle$ の速度を外挿する。

手法 III.

式 (3.7) より、壁面近くでの相対速度の法線成分は摂動パラメータを ϵ (壁面近傍における壁面からの距離) とすると、

$$u_n(\epsilon) = \epsilon^2 u_{n2} + o(\epsilon^2),$$

と評価される。従って、 ϵ に対する2次の関数になり、手法 II のように、1次精度の線形補間を行うことは精度が悪いと考えられる。ここで、連続の式と滑りなし条件より、壁面近傍の相対速度について接線方向成分の接線方向微分値は以下のように書き表される。

$$\frac{\partial u_t(\epsilon)}{\partial \theta} = -\epsilon(3\epsilon + 2a)u_{n2} + o(\epsilon^1). \quad (3.22)$$

従って、式 (3.7), (3.22) より、相対速度の法線方向成分は以下のように近似される。

$$u_n(\epsilon) \sim -\frac{\epsilon}{3\epsilon + 2a} \frac{\partial u_t(\epsilon)}{\partial \theta}. \quad (3.23)$$

境界条件の設定の手順について、図 3-1 における、点 (o) の $\partial u_t / \partial \theta$ を 3 次精度の内挿法で算出し、式 (3.23) から、 u_n を求める。 u_t については線形内挿で求める。そして、粒子内部の点 (i) の速度を外挿する。

以上より、手法 I では実際の気泡径よりも過小評価されること、手法 III では、 u_n の補間が手法 II よりも高次精度として記述されるが、内挿に用いられている格子ステンスルが大きくなることがわかる。

計算条件

計算条件について、 Re は円柱周り流れ場の 3 次元性が強く現れてくる 200 以下として 4, 10, 20, 40, 100, 200 と設定する。円柱に働く力の算出は、円柱表面上に 360 点のサンプル点を配し、5 次精度の内挿法でおおのこの点上の応力を評価し表面積分で行う。計算時間については、無次元時間 $tU_0/(2a)$ で、渦放出がない場合 ($Re = 4, 10, 20, 40$) については 100 まで、渦放出がある場合 ($Re = 100, 200$) については 400 までとする。流入側では速度一定の条件、流出側では自由流出条件、流れに垂直方向については周期境界条件が課されている。計算条件は以下のように示される。

Table 3-1 計算条件 (円柱周りの流れ)

	格子点数	計算領域
case1	128×32	$48a \times 12a$
case2	256×64	$48a \times 12a$
case3	256×64	$96a \times 24a$
case4	512×128	$96a \times 24a$

格子幅 (Δx) に対する円柱径 ($2a$) について、case1, 3 では $2a/(\Delta x) = 5.33$, case2, 4 では $2a/(\Delta x) = 10.67$ となる。なお、滝口ら (1997) の CIP を併用した方法では、 $2a/(\Delta x) = 8$ 以上であれば、妥当な抗力係数が得られるとされている。

結果と考察

図 3-3 にそれぞれの計算手法に対する、抗力係数分布の結果を、Tritton (1959) の測定結果 (Re は約 100 まで) とともに示す。この図より、計算結果と実験値とが概ね良好に一致していることが示されている。このことから、計算手法が妥当であることが示される。

次に、境界条件の設定方法について検討するために、計算された抗力の誤差評価を行う。最も解析領域が広く、格子密度の高い case4 の条件の下で計算された抗力係数について、Tritton (1959) の実験値に対する相対誤算を表 3-2 に示す。

Table 3-2 抗力係数の誤差 (%).

Re	手法 I	手法 II	手法 III
4	-15.1	+7.6	+17.1
10	-19.1	+1.0	+4.3
20	-11.0	+6.0	+8.0
40	-9.7	+3.9	+2.6
100	-17.2	+2.3	+3.9

表 3-2 より, 手法 II の場合が最も一致している. 円柱の「内部点」の速度を 0 としている手法 I では, 実質的な円柱半径が小さく評価され, その結果, 表 3-2 で示されるように, すべてのレイノルズ数において抗力係数が小さく計算される. また, 図 3-3 の case4 より, 特に低レイノルズ数での算出される抗力係数の低下が顕著であることがわかる. これは, 応力についての補間法が高次 (5 次) であるため, 円柱の「内部」の速度を 0 とした場合は, 粒子境界面で評価される速度勾配が実際よりも小さく見積もられ, 実際の粘性応力が過小評価されるからである. また, 図 3-3 に示されるように, レイノルズ数が 20 以下では, 格子の大きさが等しい case1 と case3, case2 と case4 の関係より, 領域の狭い, case1 と case2 での抗力係数が大きく現れている. この理由は, 高粘性の場合は粒子運動の影響領域が広く, 計算領域が狭い場合に抗力が過大評価されやすくなるためである.

手法 III は, 壁面近傍での壁面垂直速度が壁面からの距離の 2 乗で変化することを考慮して, 速度の接線成分を用いることによって, 内部点に速度を補間する方法によって, 補間の精度が手法 II よりも高次であると記述されているが, 手法 II に比べると, 算出される抗力係数の精度が悪いことがわかる. これは, 手法 III では手法 II に比べて内挿の格子のステンシルの長いためであると考えられる. 手法 III の手法は密な格子の場合に摂動パラメタ (ϵ) が十分に小さければ効果的であると考えられる. しかしながら, 現状の格子精度では手法 II の結果の方が実験とよく一致している. 従って, 以降の計算では, 粒子表面上での境界条件には手法 II を採用する.

3.2.2 球周りに働く抗力係数 (定常計算)

計算手法

本節では, 矩形格子を用いて単一球形粒子周りの流れの定常計算を行い, 抗力係数について議論する. 粒子表面上での境界条件の設定方法は, 前節の「手法 II」を採用する.

粒子に働く力の算出は, 粒子の中心から見た球極座標系で表面積分を行う. 粒子表面上のサンプル点数は錐角方向 (θ 方向) に $36 \times$ 方位角方向 (ϕ 方向) に 72 とり, 計 2592 点を用いる. 応力のサンプル点への補間は, 5 次精度の内挿法を用いる. また, ここでは, 定常解を求め, 計算収束の高速化のため粘性項を陰的に扱っている.

計算条件

前節と同様に粒子位置が拘束され固定されている系を計算対象とし、流入速度、粒子径、動粘性係数で決まるレイノルズ数をパラメタにした計算を行い、式(3)の右辺における応力の表面積分が正しく行われるかを調べる。 Re は、0.1, 0.5, 2, 10, 50, 200 と設定し3次元計算によって球形粒子周りの流れ場の計算を行う。また、格子点数は、主流方向(x 方向)とそれに垂直な y, z 方向に対して $128 \times 64 \times 64$ とする。また、解析領域の大きさについて、 x, y, z 方向の長さを粒子半径 a に対して、 $32a \times 16a \times 16a$ とする。格子幅(Δx)に対し粒子直径($2a$)は8.0となる。なお、粒子の設置位置について、上流から $4a$ 離れた点を粒子の重心位置とする。境界条件は以下に示されるように2通り設定している。

- (a) 境界流入側では速度一定の条件で、流出側では自由流出条件、流れに垂直方向はスリッ壁。
- (b) 流れ方向に周期境界条件を課し、垂直方向はスリッ壁。

結果と考察

図3-4(a)は(a)の条件の下で計算された抗力係数とレイノルズ数の関係であり、点が計算結果、線がMei(1993)の式を示す。この図より、計算結果とMei(1993)の式が概ね良好に一致することがわかる。誤差について、低レイノルズ数域($Re < 1$)での球に働く抗力は、Appendix Cで示されるように、計算領域の広さに強く依存し、狭い場合には抗力係数が過大評価となるために、約10%程度過大評価である。それ以外の場合($Re \geq 2$)の誤差は6%以下である。

(b)の条件で計算された抗力係数とレイノルズ数の関係 w_0 、図3-4(b)に示す。この図より、高いレイノルズ数域では(a)の場合(図3-3(a))と異なり、Mei(1993)の式と比べて、抗力係数の過小評価の傾向が顕著であるが、これは、周期境界条件を課していることに起因する。高レイノルズ数では、粒子の後流の影響が遠方にまで伸びるが、周期境界条件が課されている場合、その領域長さが十分に長くなければ、自分自身が誘起した後流の中に吸い込まれる。いわゆる、スリッストリームに位置することによって、抗力係数が低下する。

3.2.3 単一球形気泡・粒子の上昇速度(非定常計算)

本節では、粒子の移動(式(3.3), (3.9), (3.10))が正しく行われるかを調べるために、高木・松本(1996)が行った単一上昇球形気泡のDNSの条件で計算を行い、速度の時間発展について比較する。高木・松本(1996)の計算では境界適合格子が用いられており、粒子

近傍の格子密度が密になるようにグリッドが配置されている。高木・松本 (1996) によると、計算結果は、中間レイノルズ数域での履歴の影響を考慮した Mei (1993) の式と極めて良く一致することが報告されている。ここでは、上昇速度の時間発展について議論する。

計算手法

本節では、矩形格子を用いて単一球粒子周りの流れの非定常計算を行い、粒子・気泡に働く力を算出し追跡する。粒子表面上での境界条件の設定方法は、前節の「手法 II」を採用する。粒子に働く力の算出は、粒子の中心から見た球極座標系で表面積分を行う。粒子表面上のサンプル点数は錐角方向 (θ 方向) に $36 \times$ 方位角方向 (ϕ 方向) に 72 とり、計 2592 点を用いる。応力のサンプル点への補間は、5 次精度の内挿法を用いる。流体の時間積分は 4 段階 4 次精度の Runge-Kutta 法を適用している。また、粒子の運動方程式は 3.1.3 節で述べた安定化法を適用し、慣性項中の粒子密度は流体の 0.05 倍としている。大局的な粒子の運動方程式の時間精度は、粒子速度の算出には、2 次精度の Adams-Bashforth 法、粒子位置の算出には、2 次精度の Crank-Nicolson 法を適用している。

計算条件

計算条件について、図 3-5 に示す。格子点数は $128 \times 64 \times 64$ 、解析領域は粒子半径 a に対し $24a \times 12a \times 12a$ である。この条件の下では、粒子直径の長さに対するメッシュ数は 10.67 である。解析領域下部は自由流出条件、上部はスリップ条件、それ以外は周期境界条件を課す。時間刻みは、対流項と粘性項とで決まるそれぞれの安定条件より、クーラン数を 0.5 として決める。計算条件については高木・松本 (1996) の DNS を参照しあり、その値について表 3-3 に示す。

Table 3-3 計算条件 (球形粒子周りの流れ)

	μ_f	g
case1	0.04	0.25
case2	0.01	0.083

また、粒子半径は 1、流体の密度は 1 である。

結果と考察

図 3-6 に無次元時間で 20 までの気泡の上昇速度に関して、本計算結果と高木・松本 (1996) の結果を示す。本計算手法では、式 (3.9), (3.10), (3.11) で示したように、計算の安定化のために擬似的な付加慣性力を用いており、粒子速度算出の時間精度が低いことが計算結果に悪影響を与えることが懸念される。特に、擬似的な付加質量項は周囲流体の加速や体積力が急激に変化するときに大きく影響を受ける。したがって、時刻 0 で重力の

値が 0 からある値にステップ状に変化するときに、最も擬似的な付加質量項の影響が強くなる。従って、計算開始の段階での気泡の上昇速度が正しく計算されるかが問題となるが、図 3-6 に示されるように、本計算結果における初期の気泡上昇速度の勾配は高木・松本(1996)の結果と比較すると、良く一致していることがわかる。図 3-7 には、粒子の密度 $\rho_p/\rho_f = 2.0$ としたときの無次元時間で 20 までの粒子の沈降速度について、本手法を用いた計算結果と、以下のように書き表される Mei(1993) の式を数値積分したものを示す。

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\rho_p}{\rho_f}\right) \frac{dU_p}{dt} = g - \frac{3C_D}{8r_p} U_p + F_H \quad (3.24)$$

$$F_H = -\frac{9}{2r_p^2} \mu \int_{-\infty}^t d\tau K(t-\tau) \frac{dU_p}{d\tau} \quad (3.25)$$

$$K(\xi) = \left[\left(\frac{\pi \xi \nu}{r_p^2} \right) + \left(\frac{\pi U_p^3 \xi^2}{2r_p \nu (0.75 + 0.105 Re)} \right)^{1/2} \right]^{-2} \quad (3.26)$$

なお、抗力係数は以下のように書き表される。

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) \quad (Re < 0.01)$$

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + 0.1315 Re^{0.82-0.05 \log_{10} Re} \right) \quad (0.01 \leq Re < 20)$$

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + 0.1935 Re^{0.6305} \right) \quad (20 \leq Re < 260) \quad (3.27)$$

式(3.26)における積分核 $K(\xi)$ は中間レイノルズ数域での履歴力の影響を数値計算によってモデル化されたものである。粘性係数と重力の条件は、表 3-3 と同じとした。図 3-7 より、計算された粒子の沈降速度の時間変化が、Mei(1993) の式を数値積分した結果とよく合っていることがわかる。履歴力は粒子の表面で生成された渦度が、時間とともに移流・拡散していく影響と関連があることから、本計算手法は粒子周りの渦度場の時間発展を的確に再現すると言える。

3.3 2 気泡の相互作用

3.3.1 はじめに

本節では、気泡流における気泡間の相互作用に対する知見を得るために、2つの上昇気泡に対する数値シミュレーションを3次元的に行い、その挙動について考察する。

気泡の初期配置は図3-8に示される。気泡の重心間の距離は、気泡径 a でスケールリングすると、鉛直方向に対して $4.0a$ 、水平方向に対して $1.6a$ である。気泡界面上での境界条件の扱いは、気泡が不純液体中にあるとして、固着条件を課す。初期気泡速度は0とし、時刻0で重力加速度 g が加わり、気泡が浮力によって上昇する。2気泡の上昇過程では、気泡間の相互作用力が働くことによって気泡間の相対位置が時間とともに変化するが、その位置関係について調べる。

3.3.2 計算条件

パラメタは、動粘性係数と ν と重力加速度 g として、表1に示される3条件に対して計算を行う。2気泡の粒子レイノルズ数は2気泡間の相互作用によって、上昇速度が単一粒子の場合と違ってくるので、異なる。従って、単一粒子に対する抗力係数の式をそのまま適用して粒子レイノルズ数を算出することはできない。ただし、単一粒子の場合に評価されるレイノルズ数は現象を説明する上で重要な指標あると考えられる。そこで、表1には、それぞれの ν と g の条件に対する、無限静止流体中の単一粒子に対する粒子レイノルズ数 Re を固体粒子に働く抗力係数の式 (Mei, 1993) によって計算されたものについて示されている。

Table 3-4 Simulation conditions

	$\nu(aU_0)$	$g(U_0^2/a)$	(Re)
Case1	0.20	0.910	(6.5)
Case2	0.04	0.250	(27.3)
Case3	0.01	0.083	(86.7)

このとき、Case1, 2, 3に対する無限静止流体中の終端速度は、代表速度 U_0 でスケールリングすると、それぞれ、 $0.650U_0$, $0.546U_0$, $0.434U_0$ である。

計算領域は全方向に対して周期境界を課し、一辺の長さが $16a$ の立方体とする。格子点数は 64^3 であり、1気泡径は8メッシュに相当する。計算時間について、気泡径 a と代表速度 U_0 でスケールリングしたときに、Case1, Case2 に対しては $60a/U_0$ まで、Case3, に対しては $120a/U_0$ まで行う。計算手法や精度については、前節で述べたものと同じである。

3.3.3 結果と考察

図 3-9 には上昇する 2 気泡の位置関係の時間履歴が示される。ここで、同じ色を有する 2 気泡は同じ時刻にあり、 $10a/U_0$ 毎に表示されている。また、図 3-9 に示される正方形の枠は、計算領域の大きさを表している。なお、水平方向、鉛直方向以外の、もう一つの方向について、気泡の位置変化が十分に小さいことを確認しており、ここでは、考察の対象としない。図 3-10 には、図 3-9 で示された結果をもとに、気泡間の相対位置の変化について示されている。図 3-9 の初期状態における気泡の相対位置は気泡半径 a でスケールリングすると、 $(1.6a, 4.0a)$ であり、時間の経過とともにその位置関係が変化していく。また、図 3-10 中の太線は中心が $(0, 0)$ 、半径が球形気泡の半径の 2 倍である 2 の円である。2 気泡の相対位置がこの円上にあれば、2 気泡が接触していることを意味する。

初期段階における 2 気泡の相対位置の変化について、図 3-10 に示されるように、鉛直方向と水平方向の両方が減少していることが示される。このことから、初期段階での後方の気泡は、前方の気泡との間に流体力学的な吸引力が働きことによって、接近していくことを表している。初期段階における相対位置変化の方向について、Case 3, Case2, Case1 の順番で、すなわち、単一粒子で評価されるレイノルズ数が高いほど鉛直方向に対する水平方向移動量が大きいことが図 3-10 によって示されている。このことから、高レイノルズ数ほど、初期段階における 2 気泡の吸引力は、鉛直方向よりも水平方向の方が強いと言える。

図 3-9, 3-10 に示された時間経過に伴う粒子の相対位置変化について、レイノルズ数が低い Case1, 2 の場合における 2 粒子の運動の挙動は、レイノルズ数が高い Case3 の場合と傾向が異なっていることがわかる。レイノルズ数が低い Case1, Case2 の場合は、初めのうち 2 気泡が鉛直方向に対して接近し、その後、水平方向に反発し合って離れていく様子が示される。すなわち、いわゆる、「Drafting-Kissing-Tumbling」(例えば、Feng *et al.*, 1994) が再現されている。この場合、図 3-10 より 2 気泡は接触していない。

レイノルズ数が高い場合 (Case3)、図 3-9, 3-10 で示されるように、ごく初期段階では、反発力が働き、2 気泡間の相対距離が時間とともに若干増大している。やや時間が経過すると、図 3-9, 3-10 で示されるように、レイノルズ数の低い Case1, Case2 と異なり、後方の気泡は前方の気泡の真下に向かってほぼ水平方向に移動していることから、鉛直方向よりも、水平方向に対する気泡間相互作用が卓越していることがわかる。さらに時間が経過し、気泡の水平方向の距離が縮まると、後方の気泡は前方の気泡の後流に吸い込まれるように移動し、気泡の上昇とともに 2 気泡は接近する。Case1, 2 と Case3 で見られる現象の違いに関して、その理由の 1 つには、レイノルズ数が高い場合は、気泡の誘起する境界層が薄くなることが挙げられる。すなわち、高レイノルズ数では、前方の気泡運動によって影響を受ける速度場が狭いことから、2 気泡が相互作用する領域は限定されてしま

う。その原因によって、Case3の初期段階では、鉛直方向の気泡間に働く力が弱いのだと考えられる。なお、粘性の影響が支配的な微小レイノルズ数 ($0 < Re \ll 1$) の状況下では、粒子間には鉛直方向には吸引力、水平方向には反発力が働くことが理論的に導かれる (Legendre & Magnaudet, 1998) が、Case1, 2の2気泡の相対距離変化は、同じ傾向にあり、同様な機構がもたらされている。このことから、慣性に対する粘性の影響が弱い高レイノルズ数下では、2気泡の鉛直方向の相互作用が弱いことが示唆される。また、もう1つの理由として、レイノルズ数が高い場合、気泡後方での流れの剥離領域が気泡の真下に対してのみ指向性を持つことが、挙げられる。すなわち、初期段階において、Case3での後方の気泡は、低圧となっている前方気泡の剥離領域に対して影響を受け、前方気泡の真下へと水平移動すると考えられる。

慣性の影響について、気泡の密度が流体に比べると十分に小さく、気泡自身が有する慣性力は弱い。しかし、気泡は運動する際に周囲の流体を連行し、その質量分に相当する無視できない付加慣性力がもたらされる。従って、そのような慣性力が原因と考えられる現象が観測されている。例えば、Case1, 2とCase3の気泡の位置関係について、それぞれ、鉛直方向と水平方向に対し、十分な時間が経過すると逆転していることが示されている。また、Case3での最終段階では2気泡が接触していることが示されている。ただし、本計算において、このような気泡の接触は2気泡の界面間距離が1メッシュ以下になると、気泡間に働く相互作用を直接扱うことができないので、2気泡が接触すると計算される直前における物理については、厳密に計算されていない。本計算では1気泡径が8メッシュに相当することから、気泡の重心間距離が $2.25a$ 以下である場合には、2気泡間の相互作用については、直接扱われていない。しかしながら、慣性の影響が2気泡間に働く流体力よりも卓越していればこの問題は些細なものであると考えられる。2気泡間の相互作用が厳密に扱われる、気泡の重心間距離が $2.25a$ となる直前までは、図3-10より、流体力学的な吸引力によって接近し続けており、慣性の影響は十分大きいと考えられる。

図3-11, 3-12は、それぞれ鉛直方向、垂直方向に対する粒子間の相対距離の時間変化を表す。レイノルズ数が低いCase1, Case2の場合における鉛直方向の相対距離に関して、図3-11より、図3-9, 3-10と同様、始めに2気泡が上昇する際に、後方に存在する気泡は前方の気泡に近付いていくことが示されている。この傾向は、レイノルズ数が低いCase1が最も早い時刻に現れており、粘性の影響が大きいことが示される。時間が経過すると、前述した付加慣性の影響によって時刻が約 $50a/U_0$ で粒子の鉛直方向の位置関係が逆転することが示されている。その後、Case1での計算終了時刻付近 ($60a/U_0$) では、鉛直方向相対位置の時間変化は小さくなっており、位置関係が逆転した後の新たな相互作用が起き始めていることが図3-11から示唆されている。

Case3の場合、初期段階ではごく微小な反発力が鉛直方向に対して働いていることが図3-11からわかる。これは、加速時にポテンシャル流としての性質が強いことが考えら

れる。ポテンシャル流での粒子間の相互作用は微小レイノルズ数 ($0 < Re \ll 1$) の場合と全く逆の傾向であり、鉛直方向に反発力、水平方向に吸引力が働く。また、Case3の場合、時刻が $60a/U_0$ 以降では、2気泡の水平方向相対位置は近くなり (図 3-12)、前方気泡の後流の影響を強く受け、後方の気泡は接近し続ける。図 3-12 に示されたレイノルズ数が低い Case1、Case2 の2気泡の水平方向位置関係より、時間が経過すると反発力が働き、2気泡が離れていくことがわかる。この傾向は、レイノルズ数が低い Case1 の方が早い時刻に現れており、粘性の影響が大きいことが示される。初期の段階でのレイノルズ数が高い Case3 の場合について、図 3-12 より、水平方向に対して、後方の粒子は前方の粒子の後流に引き込まれていくことが示される。この現象は、Case2 の初期段階でも見受けられ、図 3-12 より上昇時の過渡的な段階では、水平方向の粒子間距離が時間とともに短くなっていることがわかる。これに対して、レイノルズ数の低い Case1 では、このような傾向は見られない。この理由は、レイノルズ数が低い場合、速度場の鉛直方向の対称性が強く、後流の影響が粘性によって減衰し、残留しないことが考えられる。また、気泡の後流では循環渦を中心として低圧領域が形成し、後方の気泡は低圧領域に向かって移動し、結果的に水平方向の吸引力がもたらされる。

以上、2気泡間に働く流体力学的相互干渉について、直接数値シミュレーションを行い、そのレイノルズ数依存性について物理的な考察に基づいた説明が可能であることを示した。特に、2気泡の運動は単一気泡の場合とは異なり、初期条件依存性、非定常性、非等方性が非常に強いことを示した。しかしながら、気泡間相互作用に対する現象の理解を行うには、何らかの統計量を抽出することが重要であり、2気泡の運動は非常に多くのパラメタによって支配されるため、2気泡の運動解析によって系統的なモデリングを行うことは適切でないと考えられる。統計的に気泡間相互作用を理解するには、一様な場を対象として、気相体積率 (ボイド率) で現象を整理することが有効であると考えられる。従って、次節以降では、空間的に一様とみなせる多数の気泡を含む系に対して、ボイド率をパラメタとして直接数値シミュレーションを行い、系統的な考察を行う。

3.4 球形気泡群の直接数値シミュレーション

3.4.1 はじめに

既存の平均化方程式を用いた気泡流予測モデルでは、構成方程式に、気泡に働く力の釣り合いを考慮した並進運動方程式が用いられている。気泡に働く力のモデルには単一気泡の抗力・揚力の経験式が用いられる。気泡同士の相互作用を周囲の流体を介して考慮した、数値計算結果によると、予測された気泡流のマクロスケールの過渡的な流動構造は実験と概ねよく合い、モデルが有効なものであることが示されている(村井, 1996)。しかしながら、従来のモデルでは、気泡同士の相互作用によってもたらされる、気泡上昇速度の気相体積率依存性や、気泡径程度のスケールの渦と気泡との相互作用については直接考慮されていない。本節では、気泡間スケールでの現象を明らかにするため、気泡群としての抗力係数を気相体積率と重力をパラメタとして調べ、既存の理論、実験との比較を行う。また、気泡の自己拡散係数を計算し、気泡流における拡散現象について議論する。さらに、今後の気泡流モデルに気泡伴流の影響を導入することを踏まえ、数少ない情報量で気泡周囲の速度場を記述するために気泡によって誘起された平均速度を直交関数で展開する手法を考える。また、従来の平均化方程式を用いた気泡流の数値シミュレーションにおいて無視されてきた Sub-Grid Scale (SGS) 応力を DNS 結果から求め、様々な SGS モデルに対して相関係数を用いて比較する、いわゆる「*a priori* study」を行う。

3.4.2 計算条件

計算対象は図 3-13 に示されるような上昇する多数の気泡運動である。計算領域の全周に対して周期境界条件を課している。また、全領域で平均化された速度は 0 に拘束している。気泡の直径は $0.5(\text{mm})$ としている。また、液体の動粘性係数は $1.0 \times 10^{-6}(\text{m}^2/\text{s})$ としている。本研究では、気泡数 (N_p) と重力 (g) をパラメタとしている。計算条件は表 3-5 のように示され、3 通りの計算領域に対して数値シミュレーションを行う。ボイド率 (f_p) は、Case1 で $N_p = 96$ のとき、Case2, Case3 で $N_p = 768$ のときに 10.0% に相当する。気泡速度は式 (3.3), (3.9), (3.10) を用いて、応力の表面積分と重力と慣性力を考慮して算出している。時間刻みは、対流項と粘性項の安定条件から求まる最大クーラン数を 0.5 と設定して、毎時刻更新している。また、計算の安定化の観点より、気泡の慣性項中の擬似的な気泡密度を 0.05 としている。なお、気泡同士の流体を介した相互作用は、気泡間の格子を介して直接計算されている。

Table 3-5 Simulation conditions of multi-bubble system

Case1	
Domain size	$4.0^3(\text{mm}^3)$
Number of grid	64^3
Number of particle(N_p)	8, 16, 32, 64, 96
Gravity (g)	4, 10, 20, 40, 100 (m/s^2)

Case2	
Domain size	$8.0^3(\text{mm}^3)$
Number of grid	128^3
Number of particle(N_p)	64, 256, 768
Gravity (g)	10 (m/s^2)

Case3	
Domain size	$32.0 \times 4.0 \times 4.0(\text{mm}^3)$
Number of grid	$512 \times 64 \times 64$
Number of particle(N_p)	64, 256, 768
Gravity (g)	10 (m/s^2)

3.4.3 瞬時の気泡と流れ場の構造

圧力と気泡分布

図 3-14, 図 3-15 は $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$, f_p が 0.833, 3.33, 10.0(%) の条件における瞬時の気泡の位置と、圧力分布を示したものである。図 3-14 は case1 と case2, 図 3-15 は case3 に相当する。これらの図より、気泡の混入量が多いほど、圧力の分布が横方向にゆがんでおり、横方向に働く気泡間の相互作用が強くなることがわかる。

2点速度相関係数

単相乱流の数値解析では、2点相関係数 $R_{ii}(x_j)$ が計算領域の大きさを設定するための指針として用いられる。ここでは、計算領域の大きさについて検討するために2点相関係数を調べる。2点速度相関係数は以下のように書き表される。

$$R_{ii}(x_j) = \frac{\langle u'_i(\xi_j) u'_i(\xi_j + x_j) \rangle}{\sqrt{\langle u'_i(\xi_j)^2 \rangle \langle u'_i(\xi_j + x_j)^2 \rangle}} \quad (\text{no summation on } i). \quad (3.28)$$

ここで、 $\langle \rangle$ は、場全体に対する平均操作を表している。また、 u'_i は、 i 方向速度の変動成分を表している。単相乱流の数値解析では、 j 方向に対して、 $R_{ii}(x_j)$ が十分に0に収束する x_j に対して、2倍の長さの計算領域が必要とされている添字 1, 2 を、それぞれ鉛直方向、水平方向と記述し、 $R_{11}(x_1)$ と $R_{22}(x_2)$ について調べる。

図 3-16 は $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$, f_p が 0.833, 3.33, 10.0(%) の条件における鉛直方向に対する2点速度相関係数分布 $R_{11}(x_1)$ を表している。この図より、ボイド率が低い場合 ($f_p = 0.833(\%)$) には、距離 x_1 の増大に伴う $R_{11}(x_1)$ の分布の減衰が緩やかであることがわかる。これは、気泡の数密度が低い場合、個々の気泡が誘起する速度の鉛直方向に対する影響領域が広いことを表している。また、ボイド率が高くなるに従い、距離 x_1 の増大に伴う、 $R_{11}(x_1)$ の分布が速く減衰することがわかる。これは、気泡の数密度が高い場合、気泡が誘起する速度の影響領域に別の気泡存在する頻度が高くなり、その別の気泡が速度場を攪乱するために引き起こされると考えられる。

表 3-5 から、Case1, 2, 3 の鉛直方向の計算領域の長さは、それぞれ、4.0, 8.0, 32.0 (mm) である。もし、乱流の数値解析と同じ考え方をするならば、 $R_{11}(x_1)$ が0に減衰している距離の2倍が鉛直方向に対して必要な計算領域の長さに相当し、 $f_p = 0.833(\%)$ では 32.0 (mm) 程度以上、 $f_p = 10.0(\%)$ では 8.0 (mm) 程度以上と見積もられる。従って、case1, 2 では、鉛直方向に対する計算領域の長さが不十分であり、速度分布の構造が case3 と異なることが懸念される。乱流の場合、2点相関係数を積分した長さは大規模渦の長さスケールを表す「積分長さ」に相当する。従って、計算領域が十分に大きくない場合には、大きな乱れエネルギーを有する大規模渦が存在できないために、統計量が大きく変わるものと考

えられる。それに対して、図 3-16 で示された気泡上昇レイノルズ数は 20~30 であり、気泡が誘起している速度場は層流状態と考えられる。従って、計算領域の大きさに対する各種統計量の振舞いに対して、乱流の場合と全く同じようには議論できないと考えられる。そこで、次節では波数に対する乱れエネルギースペクトル分布を調べ、計算領域の大きさに対する依存性について検討する。

図 3-17 は図 3-16 と同じ条件における水平方向に対する 2 点速度相関係数分布 $R_{22}(x_2)$ を表している。この図から、 $R_{22}(x_2)$ はボイド率に対する依存性は、 $R_{11}(x_1)$ に比べて弱いことがわかる。Case1, 2, 3 の水平方向の計算領域の長さは、それぞれ、4.0, 8.0, 4.0 (mm) である。図 3-17 から $R_{22}(x_2)$ は、いずれの場合もほぼ 0 に減衰しているおり、乱流の数値解析と同じ考え方をすれば、水平方向の計算領域の長さは十分であるといえる。

エネルギースペクトル

気泡流では気相体積率の高いときは、分散体の移動に伴い、分散体周りの速度が変動することが知られている (例えば, Serizawa *et al.*, 1975; Lance & Bataille, 1991)。これは、単相流での乱れとは区別して、「疑似乱れ」と呼ばれるものである。ここでは、気泡の誘起する疑似乱れの気相体積率依存性について調べる。図 3-18 は、図 3-14 と同条件での上昇気泡群によって誘起される 1 次元縦エネルギースペクトルであり、case1, case2 に対して示されている。図 3-18 には、 $E_{11}(k_1)$ (鉛直方向成分) と $E_{22}(k_2)$ (水平方向成分) が示されている。この図から、エネルギースペクトルの分布が波数の増大に対して滑らかに減衰していることがわかる。このことから、近い波数間の乱れの間には相関があると考えられる。また、図 3-18 に示されるように、それぞれの case1 (シンボル) と case2 (線) の結果がよく一致している。すなわち、計算領域の大きさの違いに対し、エネルギースペクトル分布の違いは十分に小さいことがわかる。また、図 3-19 には、図 3-18 と同じ計算条件での 1 次元縦エネルギースペクトルが示されている。図中のシンボルと線はそれぞれ case3 (シンボル) と case2 (線) の結果に相当する。この図から、case3 と case2 の結果がよく一致していることが示される。この場合もまた、計算領域の大きさの違いに対し、エネルギースペクトル分布の違いは十分に小さいことがわかる。図 3-16 で示された 2 点相関係数分布によると、特にボイド率が低い場合において鉛直方向の領域の大きさに強く依存することが示されていた。しかしながら、図 3-18, 3-19 に示された鉛直方向の 1 次元縦エネルギースペクトル $E_{11}(k_1)$ に計算領域の異なる case1, 2, 3 に対して大きな違いが見られないことから、case1, 2, 3 を用いて算出される統計量が、計算領域の大きさの違いによって、劇的に変化するとは考えられない。

図 3-18, 図 3-19 より、ボイド率が高いほど、低波数域におけるエネルギースペクトルの値が大きく、気泡の誘起する乱れが強いことがわかる。また、全てのボイド率に対し、低波数域でのエネルギースペクトルの値が重力と垂直の方向成分に比べて重力方向 (気泡の進

行方向)成分の方よりも卓越して大きく、気泡の誘起する乱れの非等方性が強いことがわかる。Appendix Fにおいて粒子が誘起する乱れの非等方性を見積もりによると、粒子進行方向に垂直な方向の乱れに対する粒子進行方向の乱れは、ポテンシャル流の場合、同じ程度であるのに対し、粒子表面上で速度滑べりが無い固体粒子の場合には異なるオーダーで高くなることが予測されている。これは、図 3-18, 3-19 の結果と定性的に一致している。また、粒子径程度のスケール (図 3-18, 3-19 中での $k = 8 \sim 16$ 程度) において、エネルギースペクトル分布に特徴的な構造が見受けられる。また、それよりも大きな波数では、気泡スケールよりも小さなスケールの渦へのカスケードが促進されていることがわかる。

3.4.4 上昇気泡群の抗力係数のボイド率依存性

図 3-20 は f_p と y をパラメタとして、抗力係数 (C_D)、レイノルズ数 (Re) の関係を示した図である。ここで抗力係数 C_D とレイノルズ数 Re は以下のように求めている。

$$C_D = \frac{8ag}{3V^2}, \quad (3.29)$$

$$Re = \frac{2aV}{\nu}, \quad (3.30)$$

ここで、 V は代表速度であり、気泡の平均上昇速度と均一流体全体の平均速度の差によって算出している。図 3-20 のシンボルは case1 による本計算結果である。また、図中の線 (Exp.(S.N.)) は、Schiller & Naumann (1933) の実験式であり、以下のように書き表される。

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.15Re^{0.687}), \quad (3.31)$$

これは $f_p=0$ のときの C_D に相当する。ボイド率が低い場合には、図 3-14, 3-15 から気泡間の相互作用が小さく、抗力係数は単一粒子の実験式に近いと考えられる。ボイド率が最も低い $f_p=0.833\%$ ($N_p=8$) の場合、図 3-20 で計算された抗力係数と実験式は概ね良好に一致しており、計算手法が妥当であるといえる。また、図 3-20 から、ボイド率の増大に伴い抗力係数が増加していることがわかる。このような傾向は、従来の実験や低レイノルズ数の理論でも知られており、比較を行う。

図 3-21 には f_p が 3.33, 10.0 (%) における抗力係数とレイノルズ数との関係を示す。図中のシンボルは本計算結果であり図 3-20 に示された値と同一である。また、比較のために、単一粒子の抗力係数に関する Schiller & Naumann (1933) の実験式が示されている。図中の青線はとストークス流れの場合の理論式 (Sangani *et al.*, 1991)、である。Sangani *et al.* (1991) はストークス方程式を用いて、no-slip bubbles に働く抗力係数の気相体積率依存性を、多重極展開法によって調べ、気相体積率が低いときの抗力係数が、気相体積率が 0 における抗力係数に対して $(1+2f_p)(1-f_p)^{-3}$ 倍であることを示している。理論的な観点によると、抗力係数に関する本計算結果と理論結果 (Sangani *et al.*, 1991) は、低い

レイノルズ域で一致することが期待される。図 3-21 に示されるように、低いレイノルズ数域では、良好な一致がみられている。さらに、理論と一致する必要がない中間においても、本計算結果と理論とは良好に一致しており、極めて興味深い。

図 3-21 には重い粒子に対する Zuber (1964) の実験式も示されている (青線)。Zuber (1964) は、従来行われていた粒子群の沈降速度と粒子体積率に関するデータをまとめ、レイノルズが 70 以下の中間レイノルズ域における粒子群の抗力係数が、単一粒子に対する抗力係数に対して $(1 - f_p)^{-4.5}$ 倍と粒子体積率のみで整理されることを示している。レイノルズ数から判断すると、粒子の後方の渦が放出せずに定在している状態にあると考えられる。本計算で扱っている気泡レイノルズ数は 200 以下であり、Zuber (1964) の場合と同様に後流の渦が定在している領域である。ただし、渦は放出していないものの、気泡間の相互作用によって、気泡群の相対位置や相対速度は時刻とともに変化し、非定常な運動が観測される。従って、気泡運動の非定常性より、抗力係数の増大率は慣性に依存する可能性がある。しかしながら、慣性の違いにも関わらず、図 3-21 から本計算結果と Zuber (1964) の実験式とは近いことが示されており、興味深い。

3.4.5 上昇気泡群の自己拡散

工業上で混合促進を目的として応用される気泡流では、特徴的な拡散現象が積極的に利用され、その現象解明が重要である。混相流での拡散現象をもたらす要因には、単相流乱流と同じような乱流中の大規模渦がもたらす混合の影響だけでなく、個々の気泡が乱れを誘起し、さらに、気泡同士が相互作用するといった影響が挙げられる。このような現象は、多重スケール構造を有する気泡流において、スケール間の相互干渉と密接な関係がある。従って、上昇気泡群の拡散現象を理解するには、気泡流の多重スケール性が直接考慮されている本計算手法を用いて、気泡間の相互作用を直接計算することが有効である。本節では気泡流の拡散現象について、以下のように書き表される自己拡散係数テンソル D_{ij} によって評価する。

$$\begin{aligned} D_{pij} &= \int_0^\infty d\tau \overline{u'_{pi}(t) u'_{pj}(t+\tau)} \\ &= \overline{u'_{pi} u'_{pj}} T_{Lij}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

ここで、 u'_{pi} は気泡の速度の変動成分、 T_{Lij} は ij に対する気泡速度のラグランジュ積分時間である。

図 3-22 に、気泡の自己拡散係数の水平方向成分 $1/2 \cdot (D_{22} + D_{33})$ とレイノルズ数の関係を示す。図中のシンボルは case1 で行った本計算結果である。また、図中の自己拡散係数が 1.0×10^{-6} の線は動粘性係数の値であり、分子粘性の強さを表す。 $f_p = 0.833(\%)$ の場

合、サンプルデータが少ないために自己拡散係数のばらつきが大きい、気泡の相互作用が極めて弱いために自己拡散係数が分子粘性に対し十分に小さいことは明らかに示されている。また、レイノルズ数が高いほど、速度変動スケールが大きくなるために、自己拡散係数が大きいことが示されている。また、気相体積率が高いほど気泡間の相互作用が強くなるために、非定常な速度変動がもたらされ、その結果自己拡散係数が大きいことが示されている。特に、 $f_B=10\%$ では、気泡間の相互作用によってもたらされる自己拡散が分子粘性よりも強くなることが図 3-22 からわかる。

図 3-23 に、気泡の自己拡散係数の鉛直方向成分 D_{11} とレイノルズ数の関係を示す。この図には、図 3-22 と同じように分子粘性の強さを表す動粘性係数が表示されている。図 3-23 から気泡の自己拡散係数の鉛直方向成分 D_{11} の値は、図 3-22 に示された水平方向の自己拡散係数に比べて高いことがわかる。これは、図 3-18, 3-19 で示されたように、水平方向よりも鉛直方向に対して強い乱れが誘起されるためである。また、図 3-22 に示された水平方向成分と同様に、レイノルズ数が高いほど、かつ、ボイド率が高いほど、鉛直方向の自己拡散係数 D_{11} が高い値であることがわかる。ただし、図 3-22 に示された水平方向の自己拡散係数は、低いボイド率 ($f_B=0.833(\%)$) の場合に分子粘性よりも十分に低い値であったのに対して、図 3-23 に示された鉛直方向の自己拡散係数 D_{11} は、低いボイド率でも分子粘性と同程度の値を示している。これは、低いボイド率の場合には、気泡の自己拡散をもたらし気泡間の相互作用の強さが水平方向よりも鉛直方向の方が卓越していることを表している。また、図 3-22 に示された水平方向の自己拡散係数は、ボイド率の違いによってオーダーが顕著に変化しているのに対して、図 3-23 に示された鉛直方向の自己拡散係数は、ボイド率に対する変化がそれほど大きくはないことがわかる。

3.4.6 球面調和関数を用いた気泡群周りの速度場の抽出

気泡群の周りの速度分布は、気泡の生成する乱れを評価する上で興味深い。本計算では非定常な数多くの気泡運動を直接計算によって解いており、膨大なデータが生成されるが、本節では球面調和関数を用いて気泡群周りの速度分布を抽出する。パラメタは気相体積率と重力として、時間平均量を求める。

ところで、大規模な気泡流のシミュレーションを行うには、平均化方程式 (Drew, 1983) を用いた方法が現実的である。平均化方程式は流体の保存方程式を相・体積平均することによって導出されるが、各相の質量・運動量の輸送方程式には、相間の相互作用の影響に起因する項が必要となる。このような解析では、気泡から連続相への作用を定式化することが必要であり、現状では運動量や質量のポイントソースとして扱われている (この妥当性については第4章参照)。気泡周りの速度場に関して、気泡レイノルズ数が高いほど境界層の厚さが薄くなり、後流の影響が遠方にまで及ぶことが知られているが、気泡をポイントソースとして扱う場合、このような影響は反映されない。従って、気泡流の平均化方程式を用いた解析に、気泡が誘起する速度の分布の影響を反映させるには、まず、気泡が誘起する速度場を様々なパラメタに対し関数化することが必要である。さらに、実用解析を考えると、より少ないパラメタで速度場を記述することが望ましい。直交関数を用いて速度場を記述することは、情報量の低減をはかる上でも有効であると考えられる。

非圧縮性流体の速度ベクトルは、連続の式より、ソレノイダル条件を満たす。一般的なソレノイダル条件を満たすベクトル場は以下に示されるトロイダルベクトル場 T_i とポロイダルベクトル場 S_i で記述されることが知られている (Chandrasekhar, 1961; Prosperetti, 1977)。

$$T_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\Psi}{r} x_k \right), \quad (3.33)$$

$$S_i = \epsilon_{ijk} \ell_{klm} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\Phi}{r} x_m \right). \quad (3.34)$$

ここで、 Ψ と Φ は位置に関する任意のスカラー関数である。平均的な速度分布が軸対象だと仮定すると、ポロイダル場だけで速度が記述でき、任意のスカラー関数 $S_n(r)$ を用いると、

$$u_r(r, \theta) = \sum_n \frac{n(n+1)}{r^2} S_n(r) Y_n(\theta) \quad (3.35)$$

$$u_\theta(r, \theta) = \sum_n \frac{1}{r} \frac{S_n(r)}{dr} \frac{dY_n(\theta)}{d\theta} \quad (3.36)$$

と記述される。ここで、 $Y_n(\theta)$ は n 次の球面調和関数であり、以下のように書き表される。

$$Y_n(\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos \theta). \quad (3.37)$$

また, $P_n(x)$ はルジャンドル多項式であり,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.38)$$

として書き表される。さらに, u_r , u_θ は,

$$u_r(r, \theta) = \sum_n u_n^{(r)}(r) Y_n(\theta), \quad u_\theta(r, \theta) = \sum_n u_n^{(\theta)}(r) Y_n^1(\theta), \quad (3.39)$$

と展開され, 以下の関係式が成り立つ。

$$u_n^{(\theta)}(r) = -\frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 u_n^{(r)}(r) \right). \quad (3.40)$$

ただし,

$$Y_n^1(\theta) = \sqrt{\frac{(2n+1)}{2\pi n(n+1)}} P_n^1(\cos \theta) \quad (3.41)$$

$$P_n^1(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{dP_n(x)}{dx}, \quad (3.42)$$

である。式 (3.40) の関係は, $u_n^{(\theta)}(r)$ が $u_n^{(r)}(r)$ に従属していることを表している。式 (3.39) のような表記を使う利点として, 気泡の誘起する平均的な運動量は, 気泡の進行方向成分に一致する球面調和関数の最小次の展開係数 $u_1^{(r)}(r)$ のみに関連すること, また, 気泡の誘起する疑似乱れについては, 球面調和関数展開係数の自乗和 $\sum_n \{u_n^{(r)}(r)\}^2$ で記述できることが挙げられる。

$u_n^{(r)}(r)$ の境界条件は, 気泡表面上での滑べりなし条件と連続の式より, 以下のように書き表される。

$$\left. \frac{\partial u_n^{(r)}}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (n \geq 1) \quad (3.43)$$

$$u_n^{(r)} = 0 \Big|_{r=a} \quad (n \geq 2) \quad (3.44)$$

また, 遠方では気泡の誘起する速度が 0 に近づくことから, $u_n^{(r)}(r)$ を, さらに r の負の次数の多項式で展開する。

$$u_n^{(r)}(r) = \sum_{m=1}^M b_{mn}^{(r)} r^{-m}. \quad (3.45)$$

$b_{mn}^{(r)}$ は最小二乗法で算出する。 $u_n^{(r)}(r)$ が $r = r_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) でサンプリングされ,

$$f_{jn} = u_n^{(r)}(r_j) \quad (3.46)$$

として与えられ場合, 評価関数 Φ_n を以下のように定義すると,

$$\Phi_n(b_1, b_2, \dots, b_M) = \sum_{j=1}^N \left\{ \left(\sum_{m=1}^M b_{mn}^{(r)} r_j^{-m} \right) - f_{jn} \right\}^2. \quad (3.47)$$

$b_{mn}^{(r)}$ についての停留条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_n}{\partial b_{kn}^{(r)}} &= 2 \sum_{j=1}^N \left\{ \left(\sum_{m=1}^M b_{mn}^{(r)} r_j^{-m} r_j^{-k} \right) - f_{jn} r_j^{-k} \right\} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.48)$$

から, $b_{mn}^{(r)}$ を含む式は以下のような関係式として与えられる.

$$\sum_{j=1}^M A_{ij} b_{jn}^{(r)} = c_{in}, \quad (3.49)$$

ここで,

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \left(r_k^{-i} r_k^{-j} \right), \quad (3.50)$$

$$c_{in} = \sum_{k=1}^N \left(f_{kn} r_k^{-i} \right), \quad (3.51)$$

である. 本研究では, 行列 A_{ij} を, 反復法で逆行列を算出し, $b_{jn}^{(r)}$ を求める. また

$$u_n^{(0)}(r) = \sum_{m=1}^M b_{mn}^{(0)} r^{-m}, \quad (3.52)$$

と記述すると,

$$b_{mn}^{(0)} = \frac{m-1}{\sqrt{2n(n+1)}} b_{mn}^{(r)}, \quad (3.53)$$

との関係が成り立つ. なお, 数値計算で計算された展開係数の平均値について, u_r のルジャンドル陪多項式で記述される非軸対象の成分は十分に小さいことを確認している. 本研究では最小二乗法でフィッティングする多項式の次数は -1 から -7 次としている. 多項式の係数の個数は 7 つに対し, 式 (3.43), (3.44) の境界条件から, 1 つの球面調和関数のモードに対して独立なものは 5, 6 個である. また, 球面調和関数のモードは 1 から 6 次で展開した. 本研究では, r については気泡の半径から, 半径の 5.2 倍程度までの領域でフィッティングを行っている. なお, それぞれの球面調和関数のモード n に対し, 遠方 ($r \rightarrow \infty$) では減衰過程が r の -1 乗に比例する展開係数 b_{in} の含む項がリーディングオーダーとなる. しかし, 本計算ではサンプリングを行った範囲が有限であるために粒子が誘起する速度の無限遠方での振舞いは表されていない. つまり, ある有限な領域までに限っての粒子近傍場での値は妥当な結果と考えられるが, 粒子遠方場で r の何乗で減衰するのかについては正しく算出されない. しかしながら, 粒子が流体にもたらす乱れが粒子遠方では粒子近傍に比べて十分に小さいこと, また, 本手法では遠方での速度場が十分に減衰するように定式化されていることから, 粒子の遠方速度場の距離に対する挙動が正しく得られなくとも問題はないと考えられる.

展開係数の $u_n^{(r)}(r)$ の算出には、球面調和関数の直交条件を用いてより、以下のように行っている。

$$u_n^{(r)}(r_j) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta u_r(r_j, \theta, \phi) Y_n(\theta), \quad (3.54)$$

本研究では、 θ, ϕ 方向に対して、それぞれ 36, 72 に分割し、式 (3.54) の数値積分を行っている。また、 r 方向のフィッティングには、半径の点から半径の 5.2 倍までの距離に対して、10 点のサンプリング点を用いて行っている。

図 3-24 は、気泡半径が $2.5 \times 10^{-4}(\text{m})$ 、 f_p が最も低い 0.833% のときの $u_n^{(r)}$ ($n=1, 2, 3$) の分布である。 g は 4.0, 20.0, 100.0 (m/s^2) であり、対応するレイノルズ数はそれぞれ、13.3, 47.3, 136.5 である。ここでは、 $u_1^{(r)}(r=a)$ が 1 となるように、スケールリングされている。この図より、 $u_n^{(r)}$ の次数 n が大きいほど、値が小さいことがわかる。また、レイノルズ数が高くなるほど、 $u_2^{(r)}$ 、 $u_3^{(r)}$ の最大値が大きくなるのがわかる。図 3-25 は、図 3-24 と同じ条件の下で、計算された $u_n^{(r)}$ ($n=1 \sim 6$) から、算出された流線である。この図より、レイノルズ数が高いほど気泡後方に形成される定在渦の大きさが大きくなり、渦中心の位置が後ろ側に寄るといった、良く知られた傾向を再現していることがわかる。

流線が速度の球面調和関数展開係数 $u_n^{(r)}$ の次数 n に対してどの程度の影響があるかを調べるために、図 3-26 にレイノルズ数が 136.5 の場合の単一粒子周りの流線を示す。ここで、単一粒子周りの流れ場は、境界適合格子を用いた DNS によって得ている。計算手法は Appendix B で用いたものと同じである。この図から、粒子後方に形成される剥離渦の再循環領域は n の最大次数が大きいほど、後方まで伸びていることがわかる。 n の最大次数を 6 とした場合の剥離渦の再循環領域は、全ての n を考慮した場合に比べ、若干狭いものの、ほぼ一致していることがわかる。従来の平均化方程式を用いた気泡流解析では、気泡から連続相への作用として $n=1$ のような対称な流線のみしか考慮されておらず、しかも、半径方向の速度分布については無視されている。従って、 $n=6$ 程度までの球面調和関数展開係数 $u_n^{(r)}$ を平均化方程式を用いた気泡流解析手法に導入することによって、気泡の後流の影響が反映された、より物理現象に忠実な計算が期待できる。また、図 3-26 には、図 3-25 で示された本計算結果として $Re = 136.5$ ($f_p = 0.833(\%)$, $g = 100 (\text{m/s}^2)$) の条件における、 $n=6$ まで考慮した流線が示されている。境界適合格子を用いて計算された流線における剥離渦の再循環領域を比較すると n の最大次数を 6 とした場合の結果に最も近いことがわかる。

図 3-27, 3-28 は、それぞれ、気泡半径 $r_p = 2.5 \times 10^{-4}(\text{m})$ 、重力 $g=100.0 (\text{m/s}^2)$ における $u_n^{(r)}$ ($n=1, 2, 3$) の分布と、その場合における球面調和関数モードから再構築された流線である。 f_p は 0.833, 3.33, 10.0 (%) であり、対応するレイノルズ数は、それぞれ、136.5, 117.1, 88.4 である。図 3-28 の流線について、気相体積率が高いほど、レイノルズ数が低くなるために、気泡後方に形成される定在渦の大きさが小さくなり、渦中心の位置が気泡側に寄っていることがわかる。図 3-27 では、図 3-24 と同様に、 $u_1^{(r)}(r=a)$ が 1 とな

るように、スケーリングされている。 $u_i^{(r)}$ については、速度の気泡進行方向成分を表す。壁面からの距離に対しての $u_i^{(r)}$ の減衰は、平均的な境界層厚さを表している。この図より、高い気相体積率ほど速く減衰すること、すなわち、境界層の厚さが薄くなっていることがわかる。単一気泡の場合には、レイノルズ数が低いほど、境界層の厚さは厚くなることが知られており、高い気相体積率ほど低レイノルズ数化することと矛盾するような結果であるが、これは、高い気相体積率では粒子間距離が短くなり、気泡間の相互作用によって境界層がブロックされることによって、境界層の厚さが薄くなると考えられる。

なお、境界適合した格子によって気泡周りの速度場を表現するには、2000 の程度の自由度を必要とするのに対して、本手法での自由度はその約 1/50 に相当する 35 個であり、極めて少ない情報量で記述することが可能である。このことから、今後の平均化方程式を用いた気泡流解析への適用を考えると、本節で示した手法は負荷が小さいことから、有効な手段であると考えられる。

3.4.7 気泡流の Sub-Grid Scale 応力と各種 SGS モデルとの比較・検討

はじめに

多くの気泡流モデルでは、局所的に体積平均操作された方程式が用いられるが、その多くでは、非線形項の平均操作によって派生する SGS 応力項が無視されており、詳細な解析に適しているとはいいがたい。本節では、気泡流の SGS 応力モデルの構築を目指すための第一段階として、気泡流の DNS の結果に対してグリッドフィルタ操作を施して SGS 応力を算出し、様々な SGS モデルによって与えられる値との相関を調べる。

気泡流の Sub-Grid Scale 応力の定義

気泡流の運動量方程式において液相体積流束の対流項に現れる非線形相関項は以下のように書き表される。

$$f_L(\overline{u_L u_L}) - \bar{u}_L \bar{u}_L = -f_L \tau_{ij} \quad (3.55)$$

と書き表す。ここで、 τ_{ij} は単相流の LES における、SGS 応力に相当する。局所体積平均操作 (グリッドフィルタ操作。グリッドサイズは Δ) を $\langle \rangle$ 、液相で 1、気相で 0 の値をとるインディケータ関数を X_L と書き表すと、 $-\tau_{ij}$ は以下のように書き表される。

$$-\tau_{ij} = \frac{\langle X_L u_i u_j \rangle}{\langle X_L \rangle} - \frac{\langle X_L u_i \rangle \langle X_L u_j \rangle}{\langle X_L \rangle^2} \quad (3.56)$$

非等方成分を表す添字を * と書き表すと、任意の 2 階のテンソル ϕ_{ij} の非等方成分 ϕ_{ij}^* は以下のように書き表される。

$$\phi_{ij}^* = \phi_{ij} - \frac{1}{3} \phi_{kk} \delta_{ij} \quad (3.57)$$

本節では DNS の結果によって得られる $-\tau_{ij}^*$ と、従来の LES の SGS 応力モデルと同じ手法や前節で示されたような手法によって気泡が誘起する速度場をデータベース化しそれを利用して SGS 応力を算出するモデルとの相関を調べる。

単相流の Large Eddy Simulation における一般的な SGS モデル

Model-A: 渦粘性型の SGS モデル, (Smagorinsky (1963) model)

$$-\tau_{ij}^{(A)*} = -2(C_s \Delta)^2 \sqrt{2\overline{S_{kl}S_{kl}}} \overline{S_{ij}} \quad (3.58)$$

Model-B: スケール相似則モデル (Bardina *et al.*, 1983)

$$-\tau_{ij}^{(B)*} = (\langle \overline{u_i} \overline{u_j} \rangle - \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle)^* \quad (3.59)$$

Model-C: 非線形モデル (例えば, Liu *et al.*, 1994)

$$-\tau_{ij}^{(C)*} = \left(\frac{\overline{\Delta^2}}{12} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \right)^* \quad (3.60)$$

以上の SGS モデル (Model-A, B, C) は, 単相乱流の LES において一般的に用いられる SGS モデルと同じであり, 場の GS 成分の速度や速度勾配によってモデル化されている. これらのモデルは, 単相乱流の場合と同じように, 十分に解像された速度場が与えられている場合に *a priori* test を行い, SGS 応力モデルとしての特性を評価することが可能である. しかしながら, これらのモデルは, 単相流の LES に対して有効であるが, 平均化方程式を用いた気泡流の LES に対して不適當であると考えられる. なぜならば, 気泡近傍の GS 速度は十分に解像されていないためである.

粒子周りの速度場のデータベースを用いた SGS 応力モデル

Model-D: (Present SGS model)

$$-\tau_{ij}^{(D)*} = \left(\frac{\Delta^2}{12} \left(\sum_{\text{All bubbles}} \frac{\partial u_i^{(PI)}}{\partial x_k} \right) \left(\sum_{\text{All bubbles}} \frac{\partial u_j^{(PI)}}{\partial x_k} \right) \right)^* \quad (3.61)$$

Model-D は, Model-A, B, C のような, グリッドフィルタ操作が施された場の物理量を用いて SGS モデルを構築する手法と異なり, 個々の気泡の速度から, 気泡近傍の速度分布を予測し, それぞれの気泡が誘起する速度勾配の重ね合わせた結果を利用しようというものである. 気泡近傍の速度分布の予測には, 気泡レイノルズ数をパラメタとした気泡周りの平均速度場のデータベースが用いられる. そのデータベースの構築には, 前節で示されたような気泡の誘起する平均速度場に軸対称性を仮定して, 球面調和で展開する手法を用いる. 速度の SGS 応力モデルとしては, Model-C と同様な非線形モデルを採用している.

式 (3.61) における, $u_i^{(PI)}$ は気泡の誘起する速度である. 式 (3.54) で示された, 半径方向速度の展開係数 $u_n^{(r)}(r)$ は, さらに, $r \rightarrow \infty$ で減衰する負次の r の多項式で展開され, 気泡が誘起する速度は以下のように書き表される.

$$u_r^{(PI)}(r, \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(i)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} Y_n(\theta), \quad (3.62)$$

$$u_\theta^{(PI)}(r, \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(i)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{m-2}{\sqrt{2n(n+1)}} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} Y_{n1}(\theta). \quad (3.63)$$

ここで, $|u_p^{(i)} - u_f^\infty|$ は粒子と周囲流体との相対速度である. また, $\tilde{u}_{nm}^{(r)}(Re)$ は, 球面調和関数/多項式展開係数であり, $u_i^{(r)}(a)$ でスケールリングされている. $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$ の r 方向の展開について, 有限区間に対して最小二乗法で決定する. Appendix G より, 速度の空間微分値は以下のように示される.

$$\frac{\partial u_r^{(PI)}(r, \theta, Re)}{\partial r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(i)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left(-m \tilde{u}_{nm}^{(r)}(Re) a^m r^{-m-1} Y_n(\theta) \right), \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial u_\theta^{(PI)}(r, \theta, Re)}{\partial r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(i)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left(-\frac{m(m-2)}{\sqrt{2n(n+1)}} \tilde{u}_{nm}^{(r)}(Re) a^m r^{-m-1} Y_{n1}(\theta) \right), \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial u_r^{(PI)}(r, \theta, Re)}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(i)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left(-\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \tilde{u}_{nm}^{(r)}(Re) a^m r^{-m} Y_{n1}(\theta) \right), \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial u_\theta^{(PI)}(r, \theta, Re)}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(i)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left(\frac{m-2}{\sqrt{2n(n+1)}} \tilde{u}_{nm}^{(r)}(Re) a^m r^{-m} \frac{\partial Y_{n1}(\theta)}{\partial \theta} \right). \quad (3.67)$$

以上の式 (3.64)~(3.67) から、速度勾配テンソルを算出し、カーテシアン座標系に座標変換を施し、式 (3.61) に代入して、 $\tau_{ij}^{(D)*}$ を求める。なお、座標変換法の詳細については、Appendix H に記述されている。

個々の気泡が誘起する速度の重ね合わせが、どの程度、DNS での速度場を再現するか調べるために、図 3-29、3-30 に DNS と式 (3.62)(3.63) を用いて得られた速度場から計算された 1 次元縦エネルギースペクトルを示す。球座標からカーテシアン座標への速度の座標変換は、Appendix H に従っている。図 3-29、3-30 はそれぞれ、鉛直方向成分、水平方向成分を表している。計算条件は、重力 $g = 10.100(\text{m/s}^2)$ 、ボイド率 $f_p = 0.833, 3.33, 10.0$ (%) である。図中の線は DNS の結果であり、シンボルは速度の重ね合わせから算出されたものである。図 3-29、3-30 より、ボイド率が高い場合 ($f_p = 10.0$ (%)) では、若干、式 (3.62)(3.63) を用いた値が DNS に比べて過小評価である。この違いは、図 3-22、3-23 で示されたように、ボイド率が高いほど気泡拡散が強いことから、気泡運動の非定常性に起因するものと考えられる。しかし、式 (3.62)(3.63) を用いて算出された低波数領域でのエネルギースペクトル分布は、重力、ボイド率、方向に対する依存性を考慮すると、DNS 結果とよく再現していることがわかる。

図 3-31、3-32、3-33 は、1 断面における DNS と式 (3.62)(3.63) で計算される速度分布の等高線を表している。重力 g は $10(\text{m/s}^2)$ であり、図 3-31、3-32、3-33 は、それぞれ、ボイド率 f_p が 0.833, 3.33, 10.0 (%) に相当する。それぞれの図において、 u は鉛直方向速度、 v は水平方向速度を表す。また、図中の白い領域は気泡に相当する。ボイド率が低い (図 3-31, $f_p = 0.833$ (%)) から、式 (3.62)(3.63) を用いて重ね合わせた速度場の鉛直方向成分 u は DNS 結果よりも若干水平方向に広く分布している。しかしながら、式 (3.62)(3.63) を用いて算出された気泡近傍の後流の構造は、DNS の結果を概ね再現していることがわかる。また、図 3-31 に示された水平方向速度分布に関して、DNS の結果には気泡が進行している前側で特徴的な構造が見られるが、式 (3.62)(3.63) を用いて得られた結果は、その構造を良好に再現していることがわかる。図 3-32、3-33 はよりボイド率が高い場合であり、速度の等高線が複雑となっているが、式 (3.62)(3.63) を用いて得られる速度分布は、特に気泡近傍において、DNS と近い分布を示している。

各種 SGS モデルの局所的な相関

DNS 結果によって算出される SGS 応力 (式 (3.53)) と各 SGS モデル (式 (3.55)(3.56)(3.57)) との相関係数の算出を case2 (表 3-5) に対して行う。グリッドフィルタサイズ Δ は気泡直径 $2a$ とし、1 つのグリッドフィルタ操作には 8^3 個のグリッドを用いる。添字 1 は重力方向成分、添字 2 をの垂直方向成分と書き表す。計算条件は、重力 g を $10(\text{m/s}^2)$ であり、ボイド率 f_b を 0.833, 3.33, 10.0 (%) と設定している。図 3-34～図 3-39 には、各計算条件に対し、1 断面における τ_{11}^* と τ_{12}^* の等高線を示す。また、図 3-34～図 3-39 には、グリッドフィルタ操作によって求められた液相体積率 $f_L (= \langle X_L \rangle)$ の分布が示されており、青い部分がボイド率の高い領域を表している。まず、図 3-34 で示された $f_b = 0.833(\%)$ での τ_{11}^* に関して、DNS 結果には気泡の近傍で特徴的な構造の存在が示されている。このような構造は、速度場の重ね合わせを利用した Model-D でも同様に見受られ、Model-D の結果は DNS の結果に似ている。このことから、気泡近傍の速度勾配が、気泡流の SGS 応力に重要な役割を果たすことが示唆される。また、図 3-34～図 3-39 で示された DNS の結果や各種 SGS モデルによると、 τ_{11}^* と τ_{12}^* はいずれも、気泡の近傍で特徴的な構造を有していることがわかる。

次に、DNS 結果から得られる実際の SGS 応力が、各種 SGS モデルによってどの程度再現されているのかを定量的に調べるため表 3-6 に、DNS と各 SGS モデルに対して算出された τ_{11}^* と τ_{12}^* の相関係数をボイド率 f_b をパラメータとして示す。表 3-6 より、渦粘性モデルである Model-A で得られる SGS 応力は、全ての場合に対して DNS との相関が低いことがわかる。この理由は、単相乱流場での DNS 結果を利用した「*a priori* study」でも指摘されているように、Smagorinsky モデルが GS 成分から SGS 成分へのエネルギー輸送について、統計的な物理量が合うようにモデリングされたものであり、局所・瞬時の SGS 応力の予測精度が低いためである。局所的、瞬時的な SGS 応力の算出精度が高いと言われるスケール相似則モデル (Model-B) や非線形モデル (Model-C) については、渦粘性モデル (Model-A) に比べると DNS に対する SGS 応力の相関が高いことが示される。単相流の場合、グリッドフィルタ操作を差分近似で行うと、スケール相似則モデルと非線形モデルで得られる SGS 応力のリディングオーダーは同じ記述で与えられる。しかしながら、表 3-6 に示された結果より、相関係数を比較すると、スケール相似則モデル (Model-B) に比べて非線形モデル (Model-C) の方が高い。この違いをもたらす理由について、気泡によって誘起される SGS 応力は相対運動によって誘起される速度勾配と関連があり、その強い領域が気泡表面近傍に局在化していることが考えられる。本研究での非線形モデル (Model-C) の応力の算出方法は、式 (3.60) に示されるように、DNS の空間精度の高い速度勾配を直接計算した後に、グリッドフィルタ操作を施すといったものである。従って、式 (3.60) によって評価される非線形モデル (Model-C) では、気泡近傍の局所的な速度勾配の影響が SGS モデルの中に反映されている。それに対して、式 (3.59) によって与えられ

るスケール相似則 (Model-B) の応力は、2重のフィルタ操作によって局所的な影響が鈍ってしまい、気泡近傍の局所的な速度勾配の影響が SGS モデルの中に反映されにくい。以上で示された理由により、Model-B と Model-C との相関係数の違いがもたらされると考えられる。

さて、気泡流の LES を考えると、単相流で用いられているような既存の SGS モデル (Model-A, B and C) は、気泡近傍の GS 成分の解像度が低いために、有効な方法ではないと考えられる。表 3-6 において、非線形モデル (Model-C) が既存の SGS モデルの中で、実際の SGS 応力に対して高い相関を有している理由は、Model-C で SGS 応力を評価する際に DNS の局所的な情報を直接用いているためである。しかしながら、既存の非線形モデル (Model-C) は、格子解像度に強く依存するために、粗い格子系を用いた気泡流の LES では不正確になると考えられる。本研究で新たに提案された Model-D は、非線形モデル (Model-C) と同じ考え方に基いているが、気泡近傍の速度勾配の解像度が格子密度の影響を受けないように定式化されている。表 3-6 に示されるように、Smagorinsky モデル (Model-A) やスケール相似則モデル (Model-B) では DNS の結果を直接用いて SGS 応力を評価しているにもかかわらず、本研究で新たに提案された非線形モデル (Model-D) の方が Model-A, B よりも高い相関係数を有していることがわかる。LES の場合には、Model-A, B の相関はさらに悪くなることを考えると、非線形モデルを用いて定式化した Model-D は明らかに優れていると言える。従って、Model-D のように、非線形モデルの考え方に基いた SGS モデルは、他の SGS モデルに比べて、気泡流の LES に対してより有効であると考えられる。

Table 3-6

 $(f_p=0.833\%, g=10, \bar{\Delta}=d_p)$

	A	B	C	D
τ_{11}	0.280	0.681	0.908	0.934
τ_{22}	0.150	0.692	0.905	0.936
τ_{12}	-0.085	0.055	0.533	0.448
τ_{23}	0.029	0.148	0.059	0.032

 $(f_p=3.33\%, g=10, \bar{\Delta}=d_p)$

	A	B	C	D
τ_{11}	0.124	0.366	0.879	0.721
τ_{22}	0.037	0.376	0.881	0.708
τ_{12}	-0.039	0.104	0.783	0.368
τ_{23}	0.047	0.390	0.448	0.191

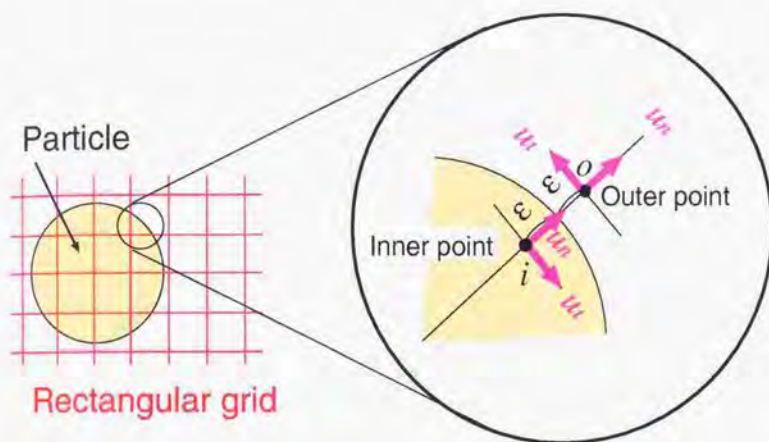
 $(f_p=10.0\%, g=10, \bar{\Delta}=d_p)$

	A	B	C	D
τ_{11}	0.152	0.206	0.799	0.442
τ_{22}	0.013	0.237	0.791	0.417
τ_{12}	-0.057	0.389	0.880	0.335
τ_{23}	-0.092	0.472	0.844	0.161

3.5 第3章のまとめ

本章は以下のようにまとめられる。

- 球形気泡を含む流れの直接数値シミュレーションに関し、定式化を行い、高精度で安定に計算する手法の開発を行った。
- 本研究で開発された計算コードを用いて円柱や球周りの流れ場を計算し、抗力係数を調べた。その結果、本計算によって得られた抗力係数は、実験結果と良好に合うことが示され、流体の解析手法と粒子に働く力の算出方法が正しく行われることが確認された。
- 静止流体中における単一球形粒子の速度の時間経過について、境界適合格子を用いたDNSや履歴力をモデル化した理論式とよく合うことが示され、粒子運動に関する計算方法が正しく行われることが確認された。
- 本計算手法を多数の粒子を含む流れに適用して、抗力係数とレイノルズ数の関係について、粒子体積率の影響を調べた。その結果、調べた範囲（粒子体積率が10%以下、 $Re_p < 200$ ）では計算で得られた抗力係数と実験値や理論解とが概ね良く合うことが示された。また、単一粒子（粒子体積率が0%）の抗力係数に相対的な抗力係数の増大率はレイノルズ数よりも、粒子体積率に依存することが示された。
- 球形粒子が誘起する平均的な速度場を、球面調和関数を用いて展開した。ボイド率が高い程、粒子間が狭くなって相互作用が強くなるために、形成される境界層の厚さが薄くなることが示された。また、数少ない情報量で再構築される流線のレイノルズ数依存性が物理的に妥当であることが示され、今後、平均化方程式を使った二相流計算の構成方程式に用いることで、二相流の解析手法の高度化がはかれるものと期待される。
- 粒子レイノルズ数や粒子体積率をパラメタとして気泡を含む乱流場の計算を行い、乱流変動に対する粒子の影響について、1次元縦エネルギースペクトルを使って議論した。



No-slip condition on a particle surface

Velocity = 0

Continuum equation

$$u_t(\epsilon) = \epsilon u_{t1} + o(\epsilon)$$

$$u_n(\epsilon) = \epsilon^2 u_{n2} + o(\epsilon^2)$$

Fig. 3-1 Schematic of present method to set no-slip boundary condition on bubble surface.

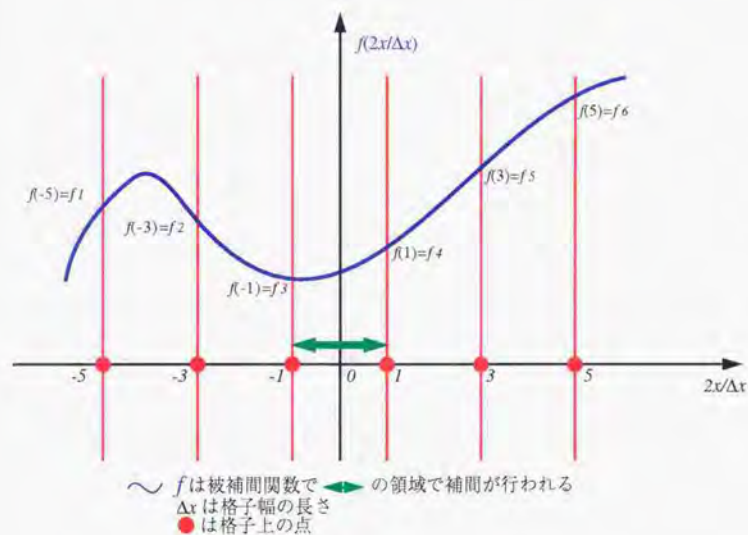


Fig. 3-2 Schematic of 5th order interpolation method.

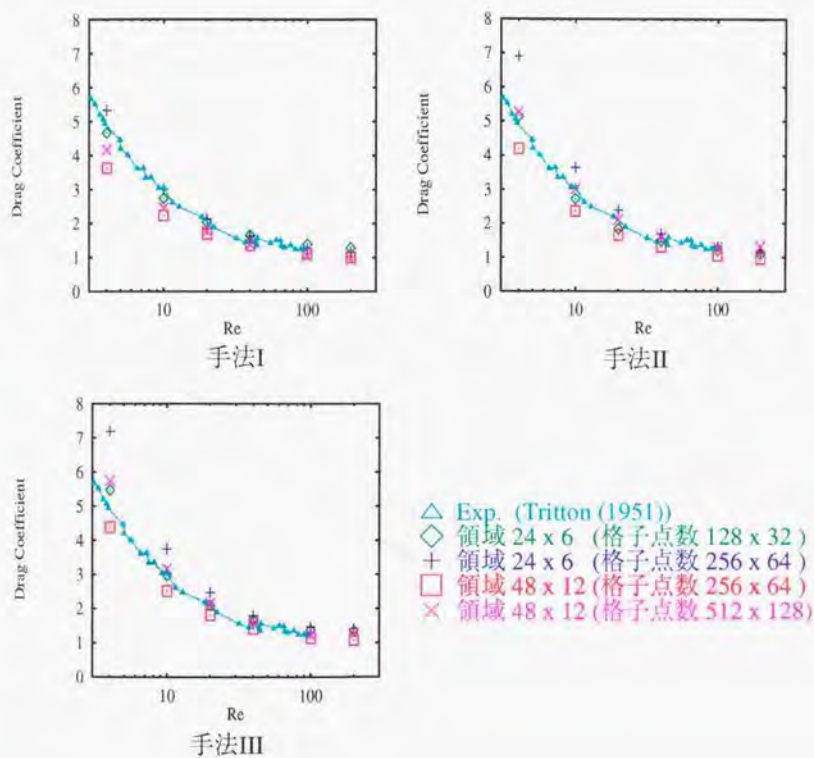
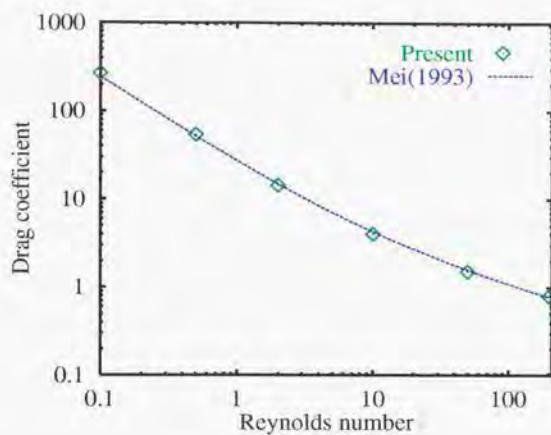
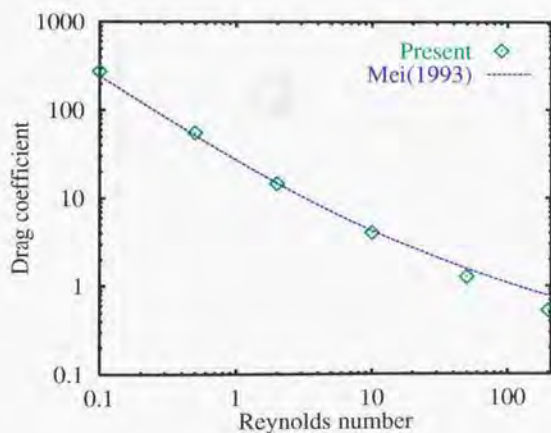


Fig. 3-3 Drag coefficients on a cylinder for various Reynolds number conditions.



(a)



(b)

Fig. 3-4 Drag coefficients on a spherical rigid particle for various Reynolds number conditions. (Line: Mei (1993) equation; (a): present (constant velocity at inlet and free stream condition at outlet); (b): present (periodic condition for stream-wise))

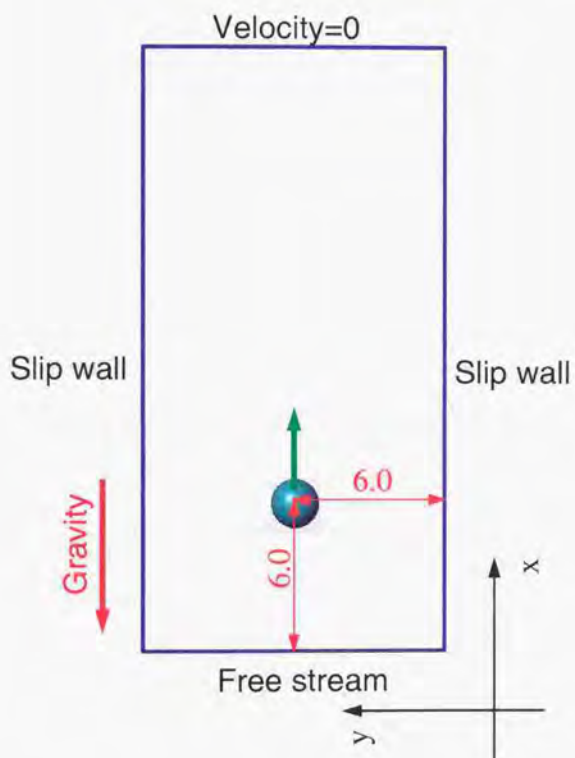


Fig. 3-5 Schematic of single bubble or particle simulation.

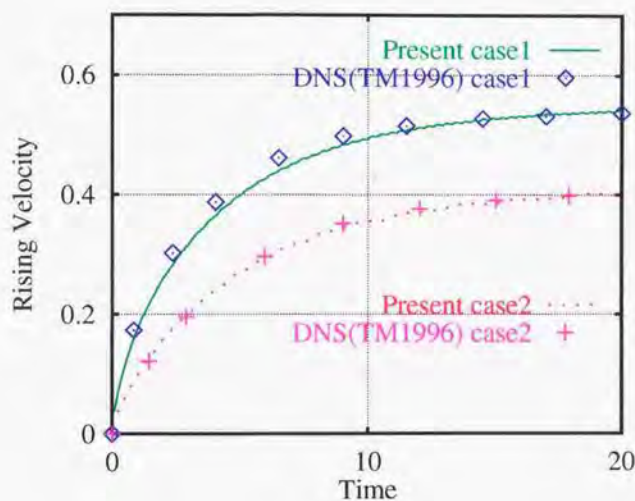


Fig. 3-6 Time evolution of rising velocities for a single bubble in contaminated liquid. (Lines: Present results ($\rho_p/\rho_f = 0.05$); Symbols (TM1996): Boundary-fitted DNS results (Takagi & Matsumoto, 1996))

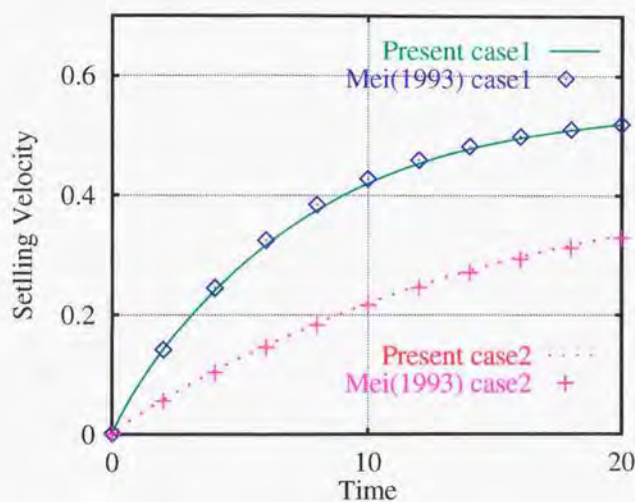


Fig. 3-7 Time evolution of settling velocities of a single particle, (Lines: Present results ($\rho_p/\rho_f = 2$); Symbols(Mei1993): Model equation (Mei, 1993))

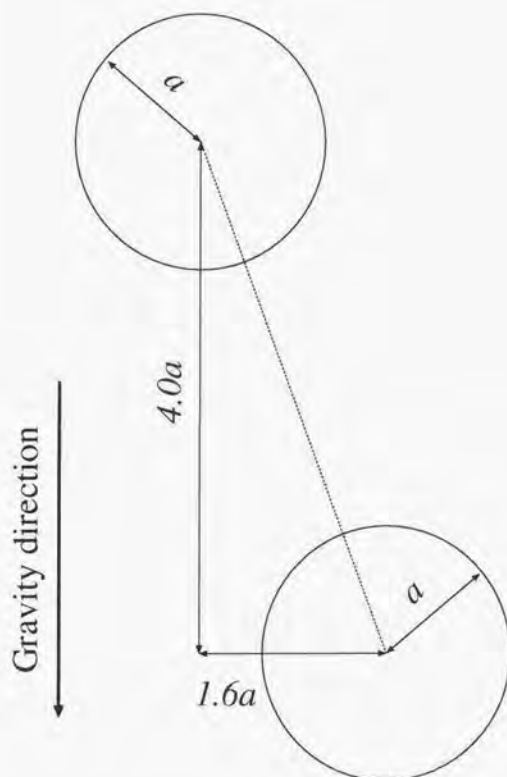


Fig. 3-8 Initial positions of 2 spherical bubbles' simulation.

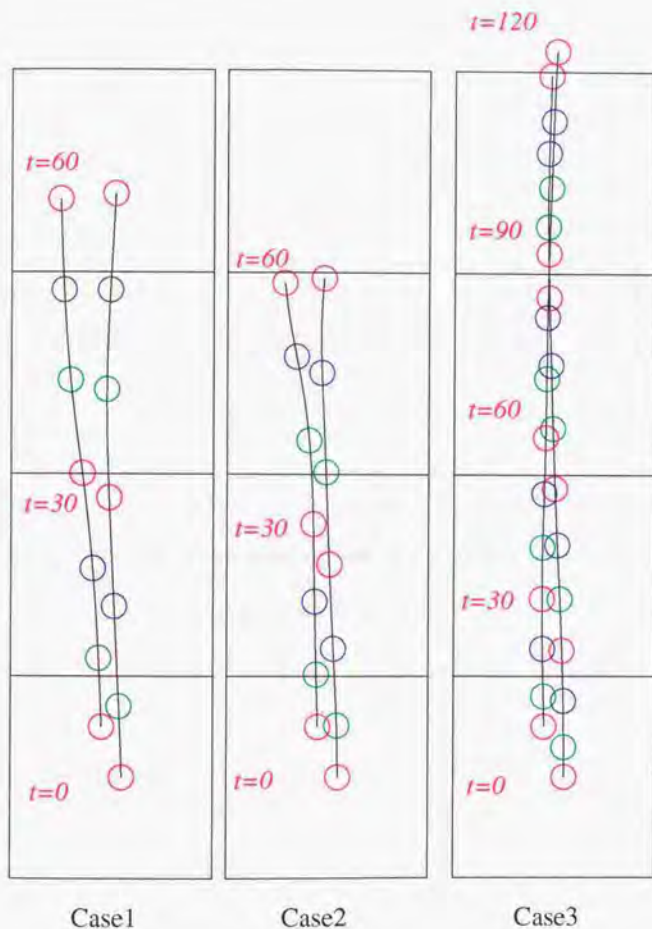


Fig. 3-9 Time evolution of 2 bubbles' position.

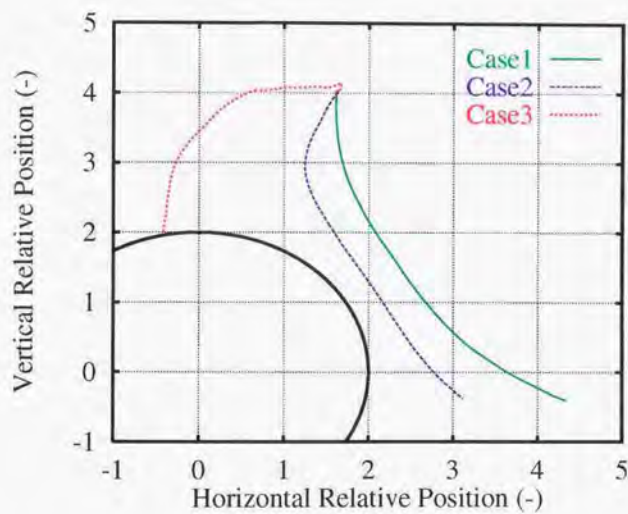


Fig. 3-10 Relative position of 2 bubbles.

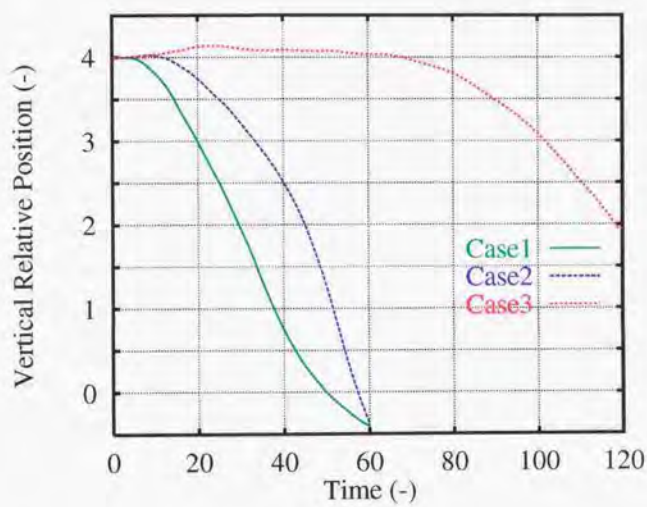


Fig. 3-11 Time evolution of vertical relative position of 2 bubbles.

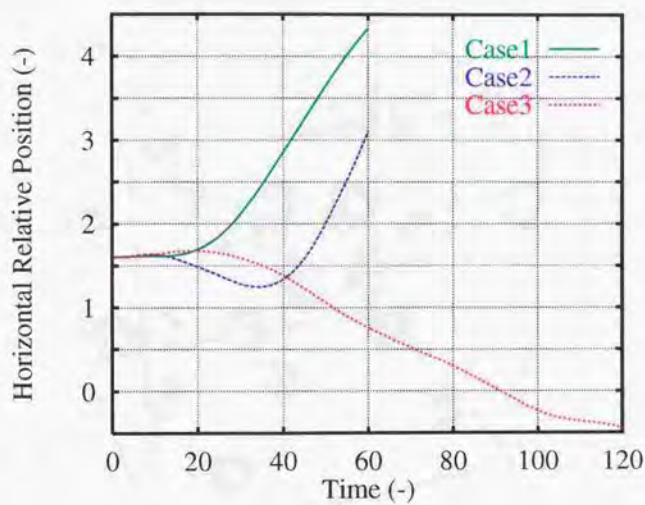


Fig. 3-12 Time evolution of horizontal relative position of 2 bubbles.

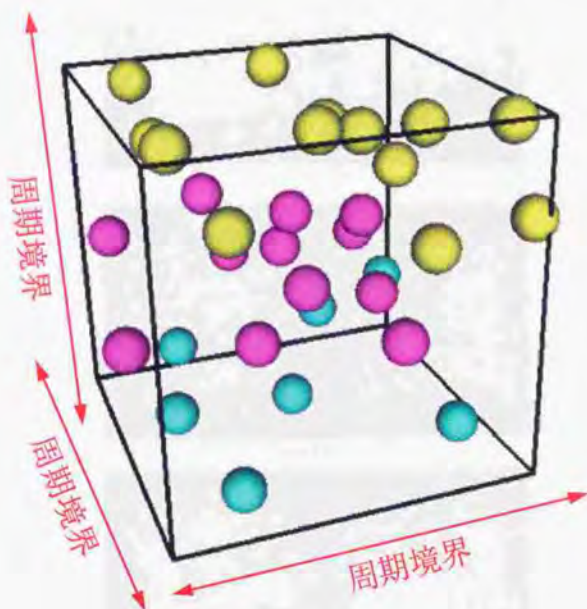


Fig. 3-13 Schematic of present simulation of multi-bubble system.

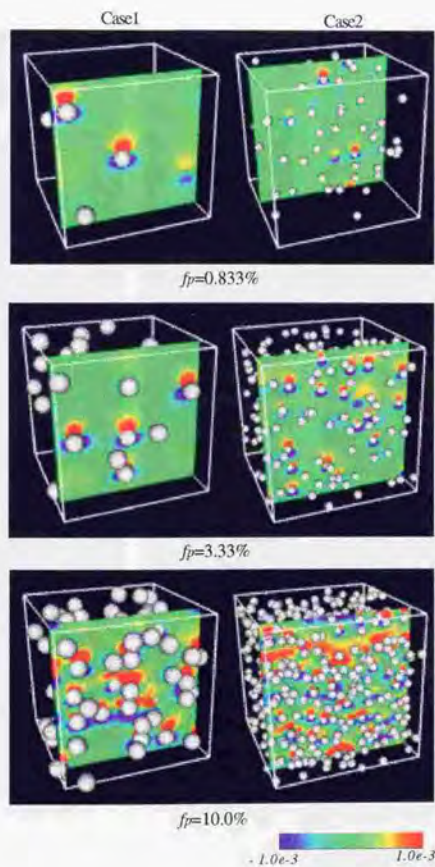


Fig. 3-14 Instantaneous bubbles and pressure distributions (Case1 and Case2) ($g = 10(\text{m/s}^2)$, $f_p = 0.833, 3.33, \text{ and } 10.0(\%)$)

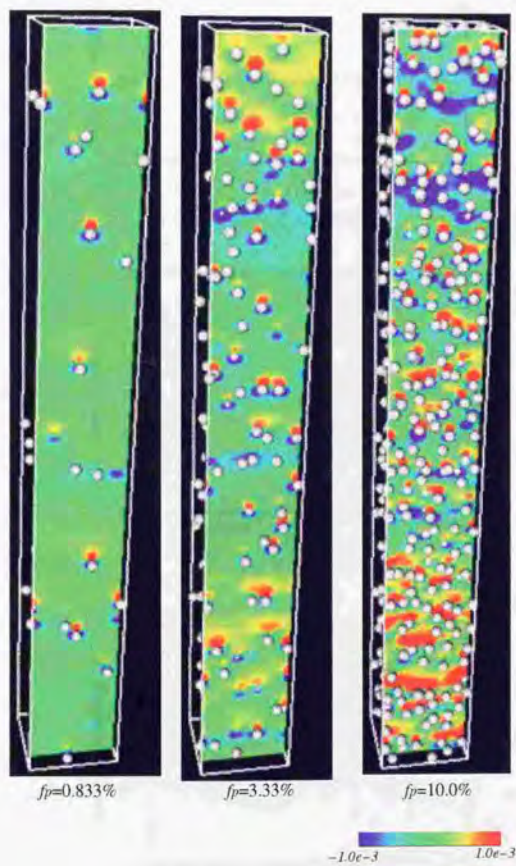


Fig. 3-15 Instantaneous bubbles and pressure distributions (Case3) ($g = 10(\text{m/s}^2)$, $f_p = 0.833, 3.33, \text{ and } 10.0(\%)$)

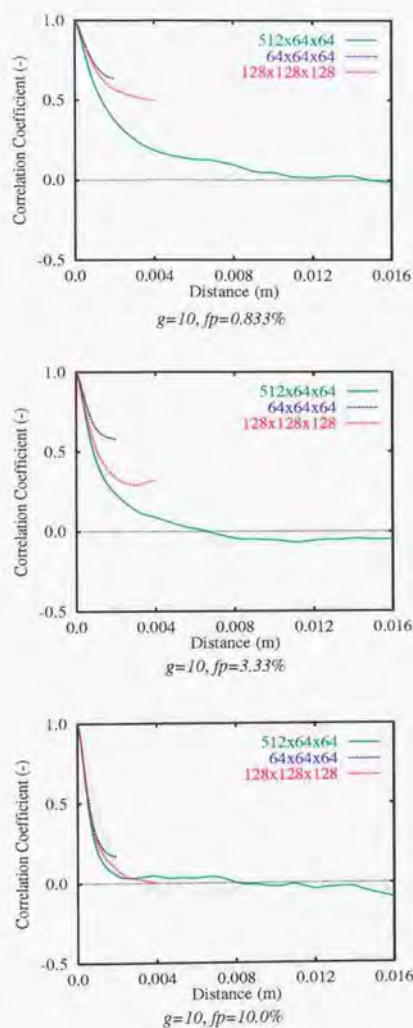


Fig. 3-16 Two-point correlations of vertical velocity fluctuations in vertical direction ($R_{11}(x_1)$).

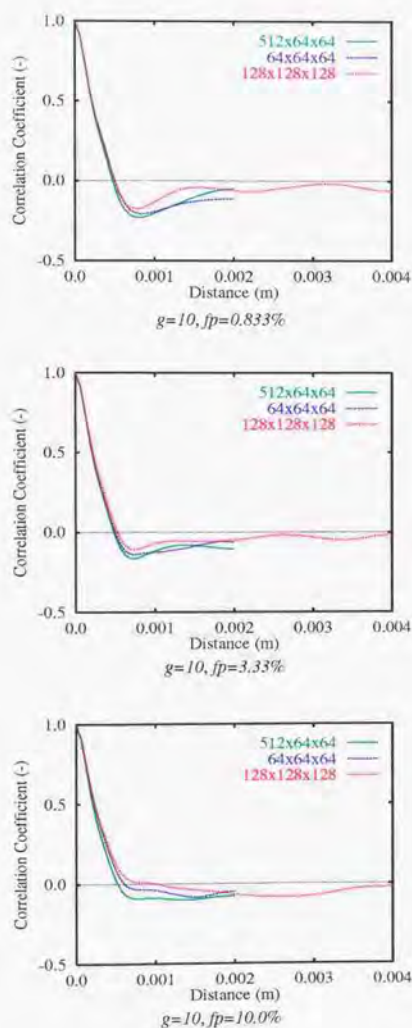


Fig. 3-17 Two-point correlations of horizontal velocity fluctuations in horizontal direction ($R_{22}(x_2)$).

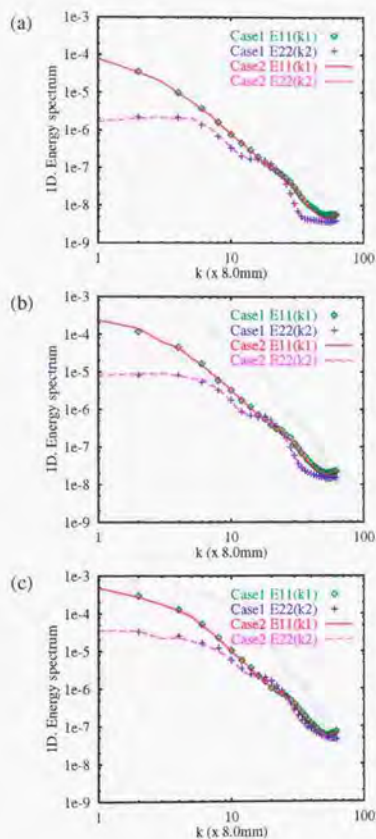


Fig. 3-18 One dimensional vertical energy spectrum distribution versus wave number.
(Case1 and Case2) ($g = 10(\text{m/s}^2)$), (a) $f_p = 0.833(\%)$; (b) $f_p = 3.33(\%)$; (c) $f_p = 10.0(\%)$)

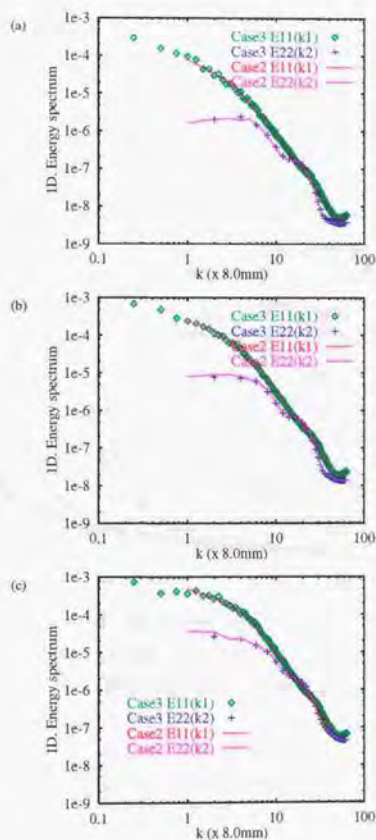


Fig. 3-19 One dimensional vertical energy spectrum distribution versus wave number.
 (Case2 and Case3) ($g = 10(\text{m/s}^2)$), (a) $f_p = 0.833(\%)$; (b) $f_p = 3.33(\%)$; (c) $f_p = 10.0(\%)$)

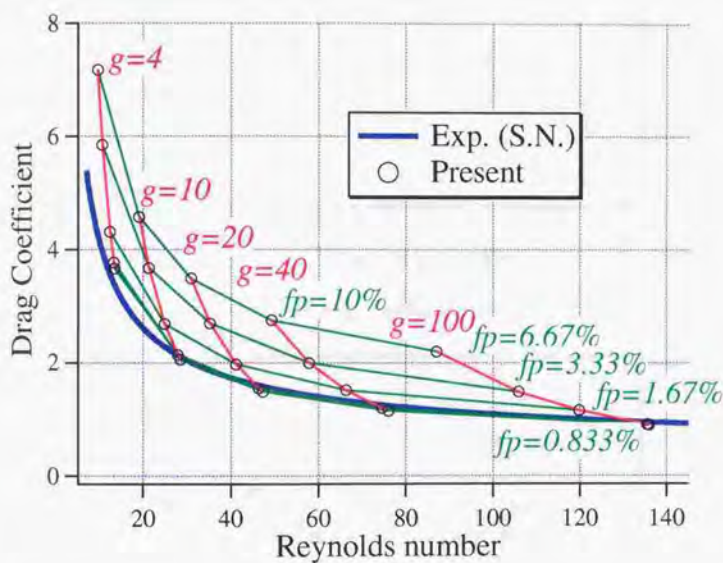


Fig. 3-20 Drag coefficient versus Reynolds number for various g and f_p conditions.

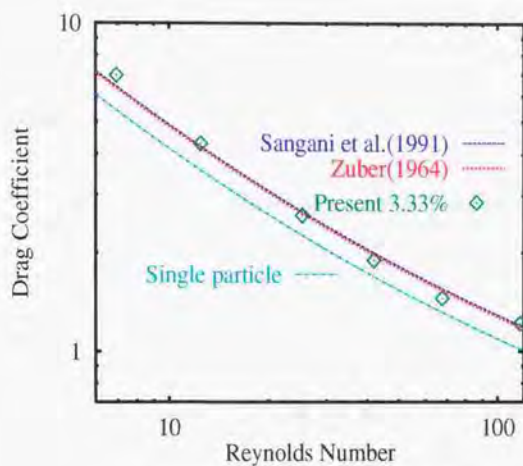
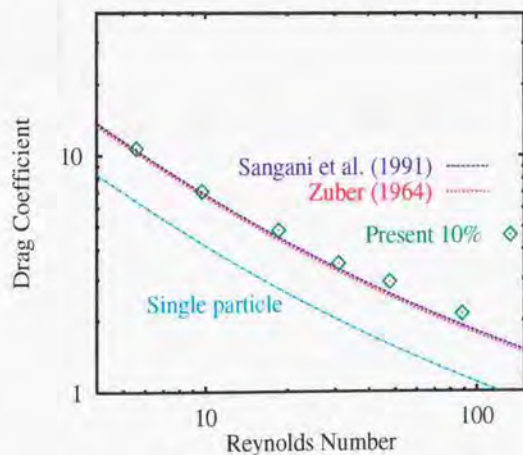
(a) Drag coefficient @ $f_p=3.33\%$ (b) Drag coefficient @ $f_p=10.0\%$

Fig. 3-21 Drag coefficient and Reynolds number compared with theoretical (Sangani *et al.*, 1991) and empirical (Zuber, 1964) formula. ($f_p=3.33$ and 10.0%)

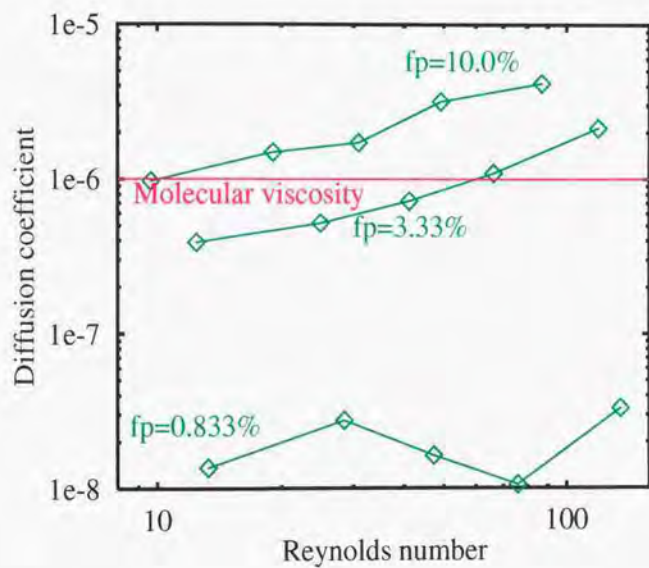


Fig. 3-22 Self-diffusion coefficient (horizontal component) ($f_p=0.833, 3.33$ and 10.0%)

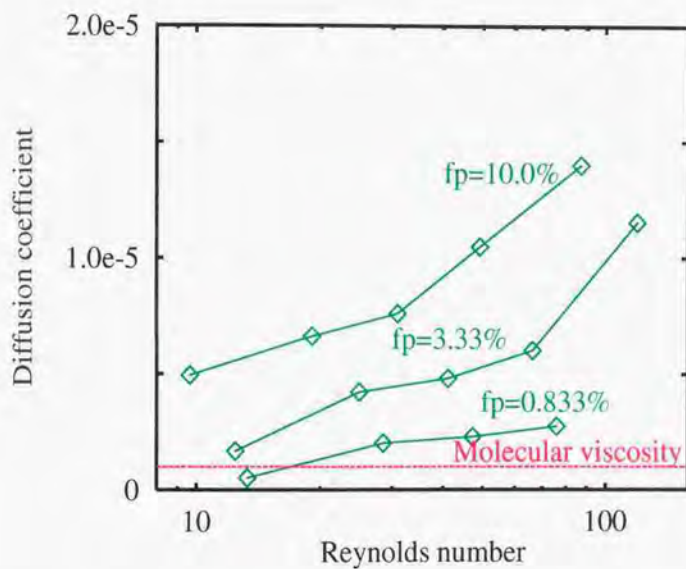


Fig. 3-23 Self-diffusion coefficient (vertical component) ($f_p=0.833, 3.33$ and 10.0%)

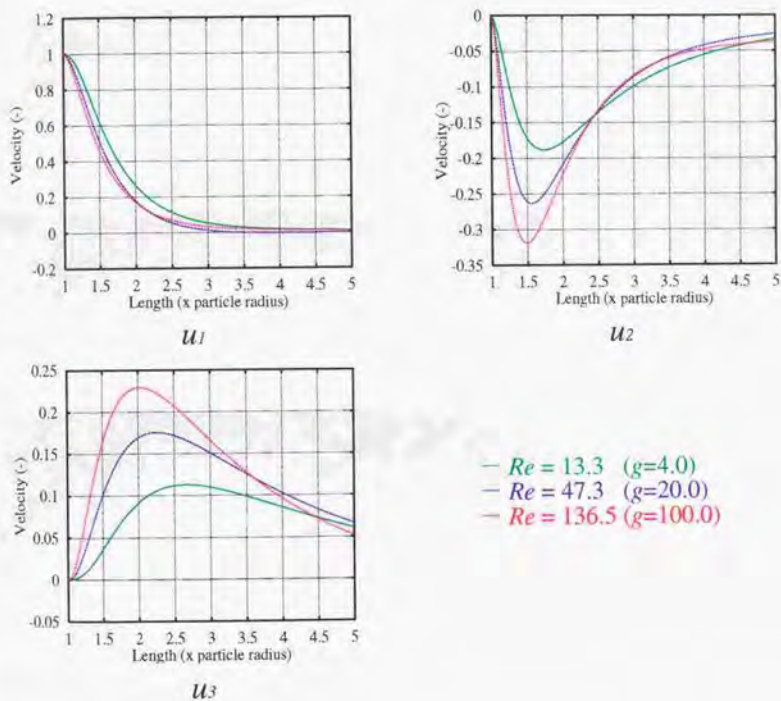


Fig. 3-24 $u_n^{(r)}$ ($n=1, 2, 3$) versus r/a . ($f_p=0.833\%$, $g=4.0, 20.0$ and 100.0 (m/s^2))

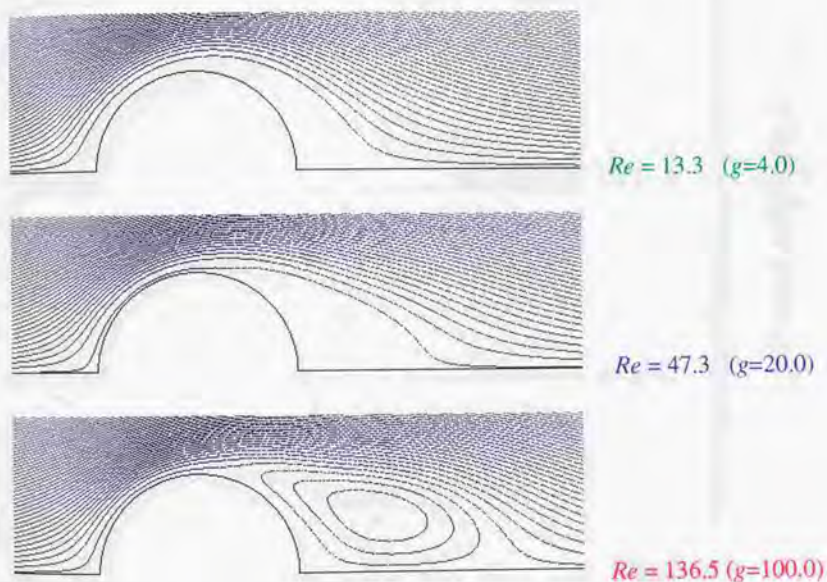


Fig. 3-25 Streamline re-constructed by velocity coefficients expanded by spherical harmonics. ($u_n^{(r)}$ ($n=1\sim 6$)). ($f_p=0.833\%$, $g=4.0, 20.0$ and 100.0 (m/s^2))

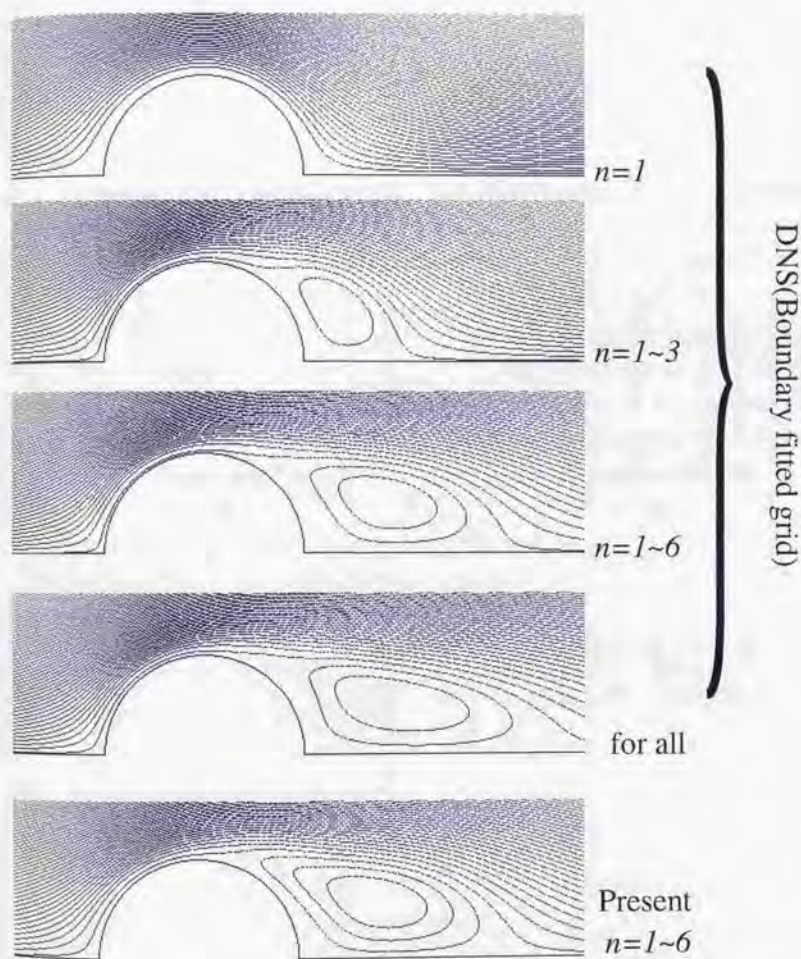


Fig. 3-26 Dependence on node number of spherical harmonics for streamline re-constructed by velocity coefficients. ($Re=136.5$, $f_p=0.833\%$, $g=100.0$ (m/s^2)) (Results of DNS used by boundary-fitted grid and present)

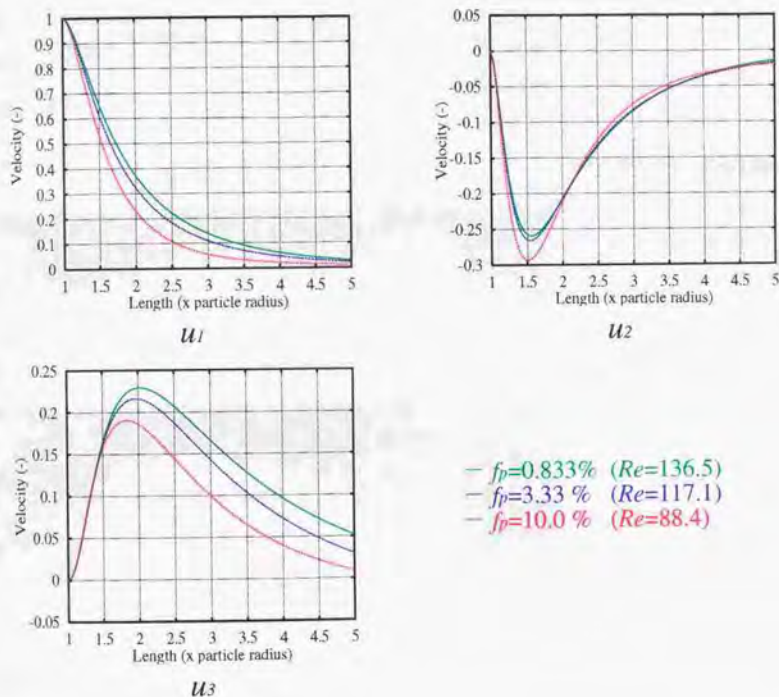


Fig. 3-27 $u_n^{(r)}$ ($n=1, 2, 3$) versus r/a . ($g=100(\text{m/s}^2)$, $f_p=0.833, 3.33$ and 10.0%)

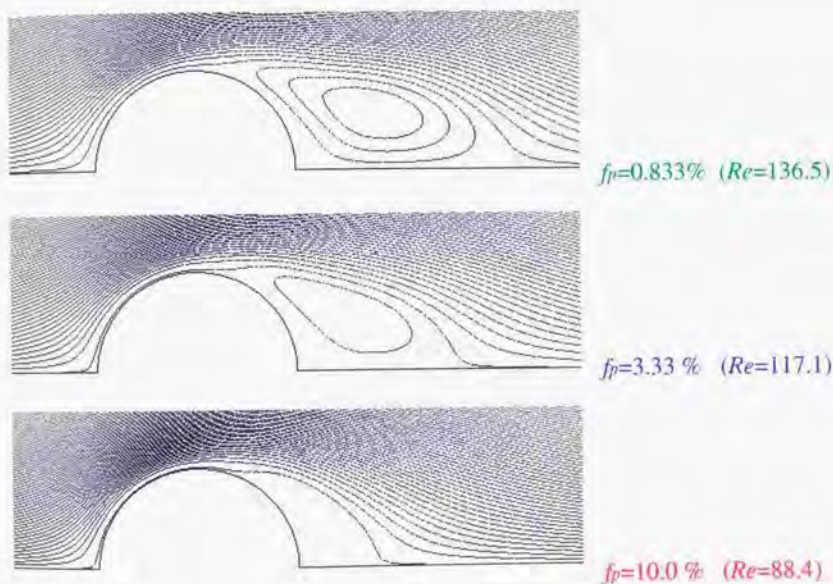


Fig. 3-28 Streamline re-constructed by velocity coefficients expanded by spherical harmonics ($u_n^{(r)}$ ($n=1\sim6$)). ($g=100(\text{m/s}^2)$, $f_p=0.833, 3.33$ and 10.0%)

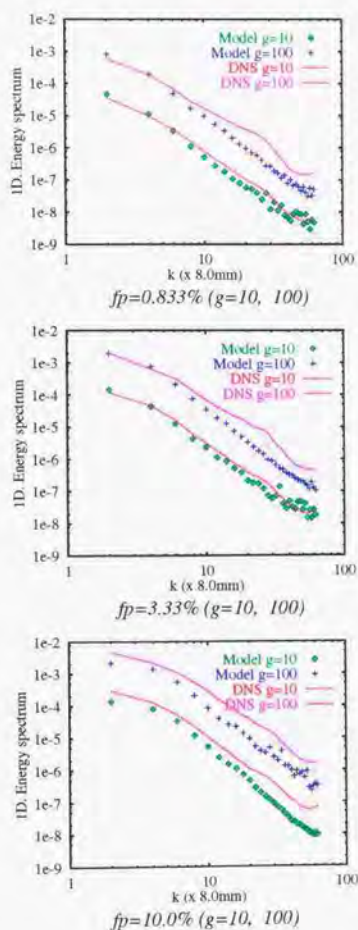


Fig. 3-29 One dimensional vertical energy spectrum distribution (stream-wise component) versus wave number. (Model: Superimposed velocity obtained by the instantaneous bubble rising velocity and the spherical harmonics/polynomials expansion coefficients; DNS: Present direct numerical simulation) ($g = 10, 100(\text{m/s}^2)$), (a) $f_g = 0.833(\%)$; (b) $f_p = 3.33(\%)$; (c) $f_p = 10.0(\%)$

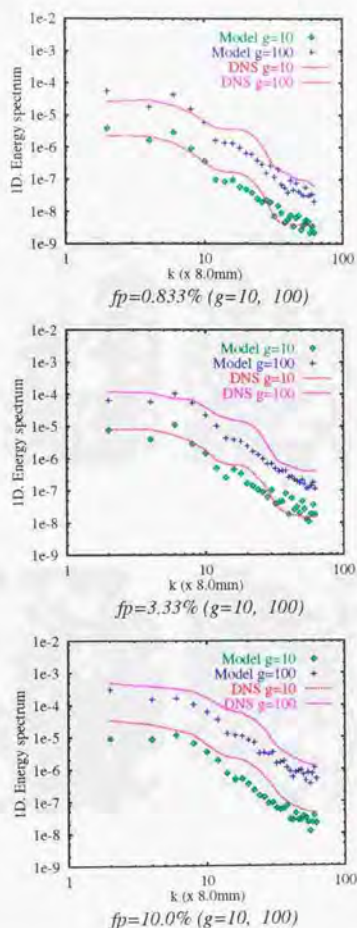


Fig. 3-30 One dimensional vertical energy spectrum distribution (horizontal component) versus wave number. (Model: Superimposed velocity obtained by the instantaneous bubble rising velocity and the spherical harmonics/polynomials expansion coefficients; DNS: Present direct numerical simulation) ($g = 10, 100(\text{m/s}^2)$), (a) $f_p = 0.833(\%)$; (b) $f_p = 3.33(\%)$; (c) $f_p = 10.0(\%)$)

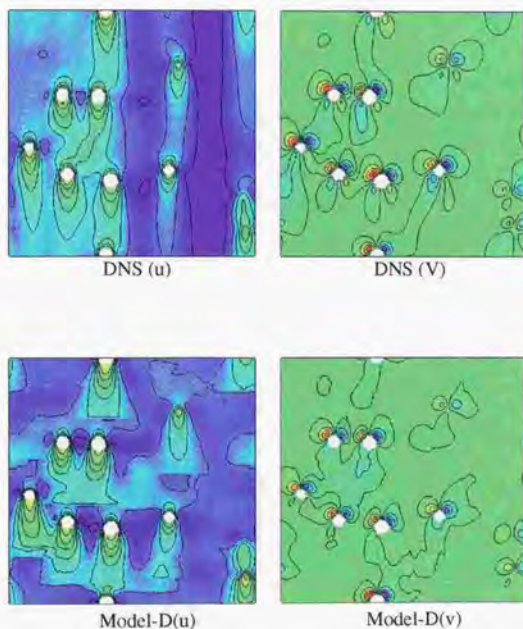


Fig. 3-31 Instantaneous velocity distribution of DNS results and superimposed velocity obtained by the instantaneous bubble rising velocity and the spherical harmonics/polynomials expansion coefficients. (u (stream-wise component), v (horizontal component)) ($f_p = 0.833\%$ and $g = 10(\text{m/s}^2)$)

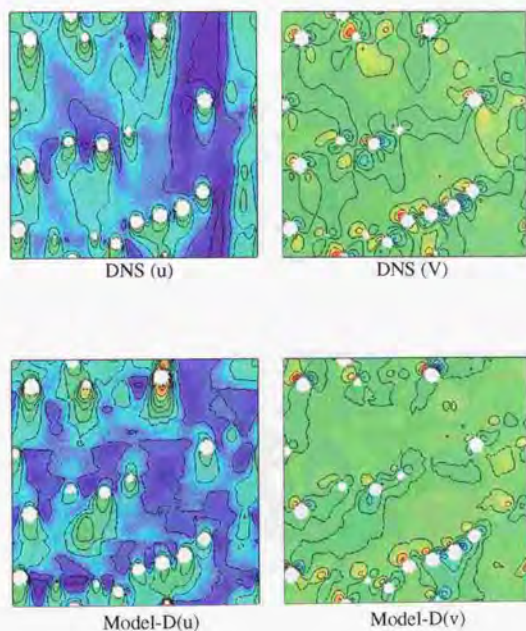


Fig. 3-32 Instantaneous velocity distribution of DNS results and superimposed velocity obtained by the instantaneous bubble rising velocity and the spherical harmonics/polynomials expansion coefficients. (u (stream-wise component), v (horizontal component)) ($f_p = 3.33\%$ and $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$)

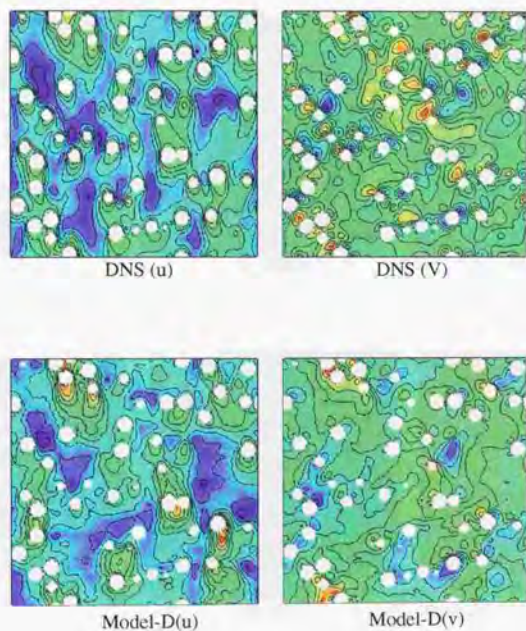


Fig. 3-33 Instantaneous velocity distribution of DNS results and superimposed velocity obtained by the instantaneous bubble rising velocity and the spherical harmonics/polynomials expansion coefficients. (u (stream-wise component), v (horizontal component)) ($f_p = 10.0\%$ and $g = 10(\text{m/s}^2)$)

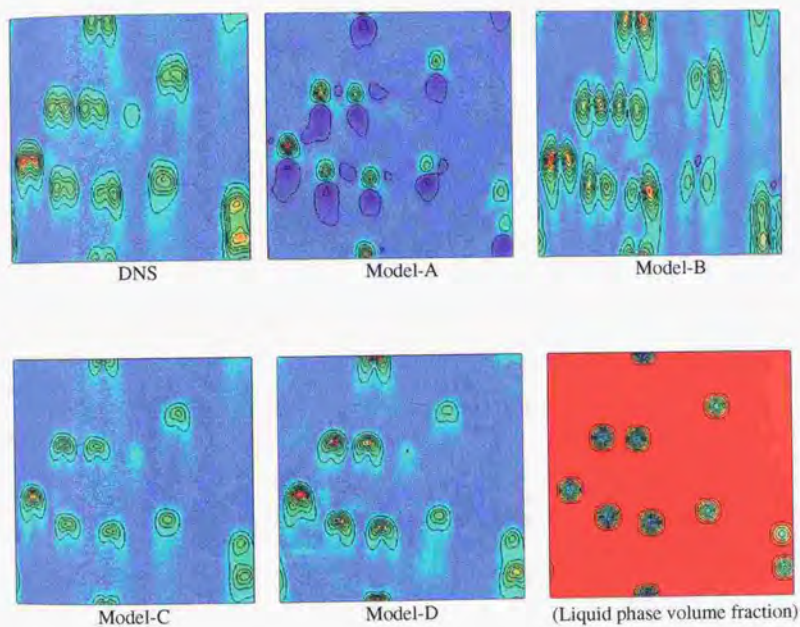


Fig. 3-34 Instantaneous sub-grid stress distributions (τ_{11}) of DNS and some SGS models and grid filtered liquid volume fraction distribution. ($f_p = 0.833\%$ and $g = 10(\text{m/s}^2)$)

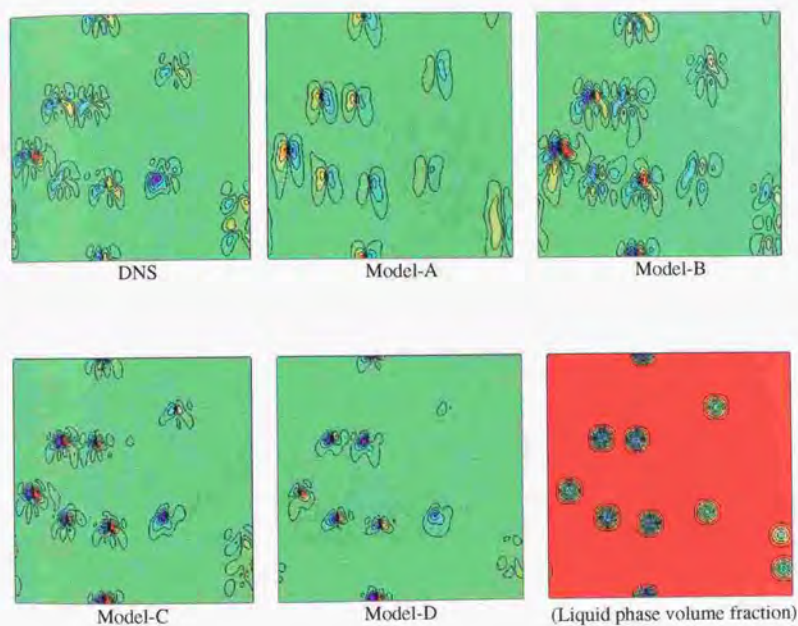


Fig. 3-35 Instantaneous sub-grid stress distributions (τ_{12}) of DNS and some SGS models and grid filtered liquid volume fraction distribution. ($f_p = 0.833\%$ and $g = 10(\text{m/s}^2)$)

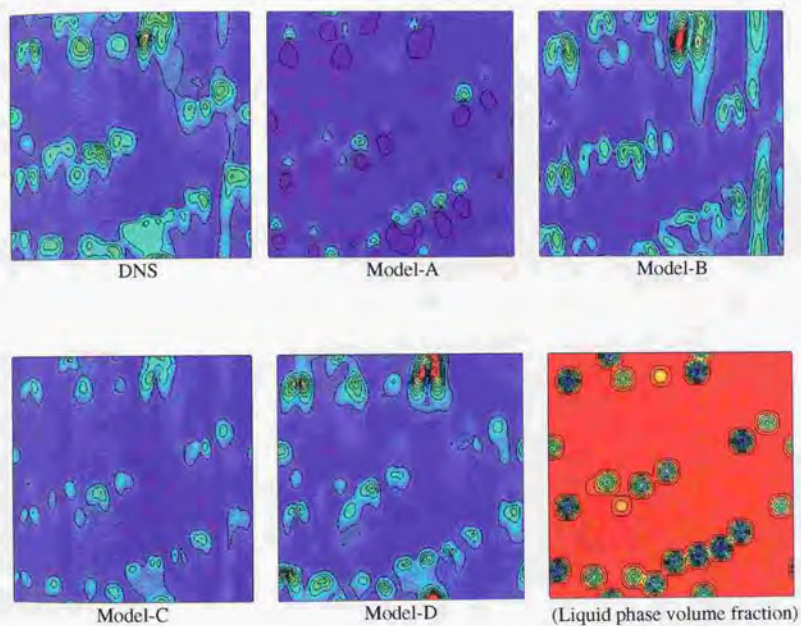


Fig. 3-36 Instantaneous sub-grid stress distributions (τ_{11}) of DNS and some SGS models and grid filtered liquid volume fraction distribution. ($f_p = 3.33\%$ and $g = 10(\text{m/s}^2)$)

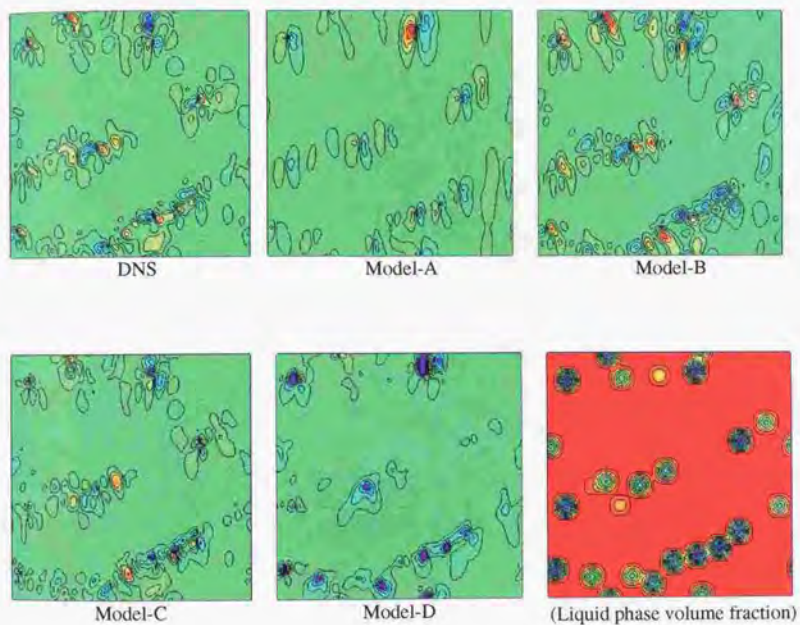


Fig. 3-37 Instantaneous sub-grid stress distributions (τ_{12}) of DNS and some SGS models and grid filtered liquid volume fraction distribution. ($f_p = 3.33\%$ and $g = 10(\text{m/s}^2)$)

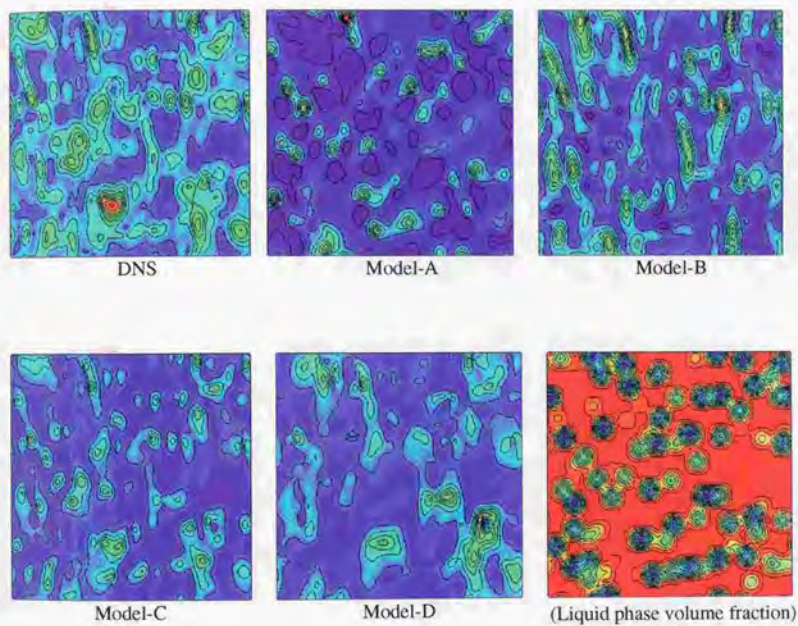


Fig. 3-38 Instantaneous sub-grid stress distributions (τ_{11}) of DNS and some SGS models and grid filtered liquid volume fraction distribution. ($f_p = 10.0\%$ and $g = 10(\text{m/s}^2)$)

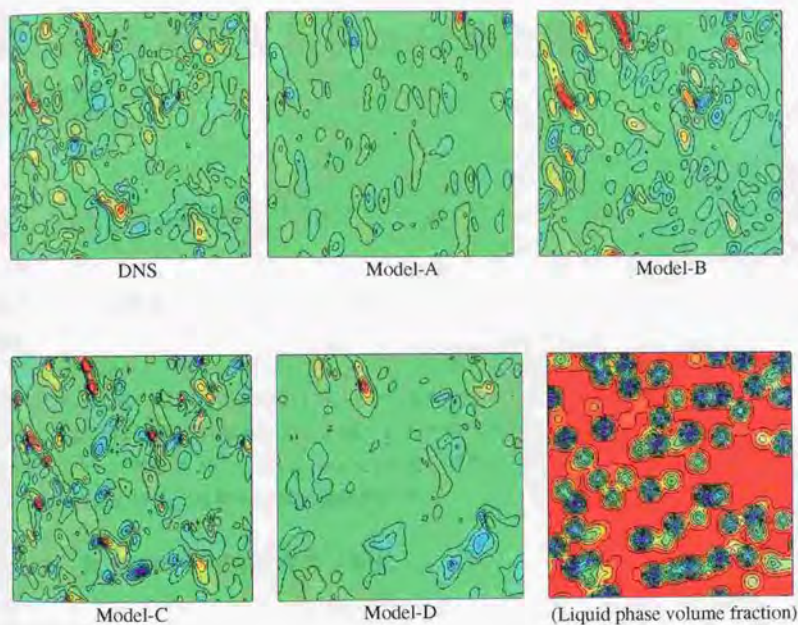


Fig. 3-39 Instantaneous sub-grid stress distributions (τ_{12}) of DNS and some SGS models and grid filtered liquid volume fraction distribution. ($f_p = 10.0\%$ and $g = 10(\text{m/s}^2)$)