

## Chapter 4

# 平均化方程式を用いた分散性混相流モデルの構築

### 4.1 気泡流の平均化方程式の定式化

#### 4.1.1 はじめに

多くの気泡流の数値シミュレーションでは、平均化方程式が用いられている。平均化方程式は、流体の保存方程式に対して平均化操作を施すことによって導出される。平均化操作の方法には任意性があるため、何通りもの方程式系がありうるが、本節では、村井(1996)によって構築された「Euler-Lagrange 法」で用いられている「均一モデル」に基づいた気泡流の平均化方程式の導出過程を示す。

#### 4.1.2 気泡流の保存方程式の平均化

質量保存式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (4.1)$$

運動量保存式:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (4.2)$$

ここで、 $T_{ij}$  は応力 (圧力・粘性応力) である。

局所体積平均操作 (例えば, Drew, 1983):

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{V} \int_V \phi dV \quad (4.3)$$

インディケータ関数:

$$X_k(x_i, t) = \begin{cases} 1 & \text{(if } (x_i, t) \text{ in phase } k) \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases} \quad (4.4)$$

局所的な相  $k$  の体積率 (例えばポイド率):

$$f_k = \langle X_k \rangle \quad (4.5)$$

相平均操作:

$$f_k \phi_k = \langle X_k \phi \rangle. \quad (4.6)$$

相平均化された相関量は, 一般的な平均操作された変数と同様, 以下のように書き表される.

$$\overline{fg} = \overline{f} \overline{g} + \overline{f'g'} \quad (4.7)$$

二相流の平均化方程式の一般形は以下のように書き表される.

$$\frac{\partial f_k \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial f_k \rho_k \bar{u}_{ki}}{\partial x_i} = \Gamma_k. \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (f_k \bar{\rho}_k \bar{u}_{ki}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_k \bar{\rho}_k \bar{u}_{ki} \bar{u}_{kj}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (f_k \bar{T}_{kij}) + M_{ki}. \quad (4.9)$$

ここで,  $\Gamma$  や  $M$  は, 気液の界面の存在に由来する生成項である.

式(4.8)(4.9)より, 気液二相流の保存方程式は以下のように書き表される.

液相質量保存式:

$$\frac{\partial f_L \rho_L}{\partial t} + \frac{\partial f_L \rho_L \overline{u_{Li}}}{\partial x_i} = \Gamma_L, \quad (4.10)$$

気相質量保存式:

$$\frac{\partial f_G \rho_G}{\partial t} + \frac{\partial f_G \rho_G \overline{u_{Gi}}}{\partial x_i} = \Gamma_G, \quad (4.11)$$

液相体積流束の保存方程式:

$$\frac{\partial f_L \rho_L \overline{u_{Li}}}{\partial t} + \frac{\partial f_L \rho_L \overline{u_{Li} u_{Lj}}}{\partial x_j} = F_{LL} + F_{LG}, \quad (4.12)$$

気相体積流束の保存方程式:

$$\frac{\partial f_G \rho_G \overline{u_{Gi}}}{\partial t} + \frac{\partial f_G \rho_G \overline{u_{Gi} u_{Gj}}}{\partial x_j} = F_{GG} + F_{GL}, \quad (4.13)$$

ここで,  $F$  は以下のように示される.

- $F_{LL}$  : 平均液相応力の勾配
- $F_{LG}$  : 気相から液相への力
- $F_{GG}$  : 平均気相応力の勾配
- $F_{GL}$  : 液相から気相への力

体積率の拘束条件:

$$f_G + f_L = 1. \quad (4.14)$$

相変化がない場合には, 以下の関係が満たされる.

$$\Gamma_G = \Gamma_L = 0. \quad (4.15)$$

液相と気相の圧縮性を無視すると, 液相, 気相体積率の保存方程式は以下のように書き表される.

$$\frac{\partial f_L}{\partial t} + \frac{\partial f_L \overline{u_{Li}}}{\partial x_i} = 0. \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial f_G}{\partial t} + \frac{\partial f_G \overline{u_{Gi}}}{\partial x_i} = 0. \quad (4.17)$$

混合物としての運動量保存方程式を考えると, 気液間の作用・反作用の関係により, 以下の関係が満たされる.

$$F_{LG} + F_{GL} = 0. \quad (4.18)$$

運動量保存式の生成項は以下のように書き表される。

$$F_{LL} + F_{GG} = -\frac{\partial f_L \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_G \bar{p}}{\partial x_i} - f_L \rho_L g_i - f_G \rho_G g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \frac{\partial \bar{u}_{Li}}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \mu \frac{\partial \bar{u}_{Lj}}{\partial x_j}. \quad (4.19)$$

Einstein の実効粘性係数 (Batchelor, 1963) を用いると, 形式的に粘性係数の分散体積率依存性は以下のように書き表される。

$$\mu = \left\{ 1 + f_G \left( \frac{\mu_L + 5/2 \mu_G}{\mu_L + \mu_G} \right) \right\} \mu_L. \quad (4.20)$$

気泡界面が固着条件で与えられる場合の実効粘性は以下のように書き表される。

$$\mu = (1 + 2.5 f_G) \mu_L. \quad (4.21)$$

以上の関係より, 均一流体としての運動量保存方程式は以下のように書き表される。

$$\frac{\partial f_L \bar{u}_{Li}}{\partial t} + \frac{\partial f_L \bar{u}_{Li} \bar{u}_{Lj}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_L g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \frac{\partial \bar{u}_{Li}}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \mu \frac{\partial \bar{u}_{Lj}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_L \tau_{ij}). \quad (4.22)$$

ここでは,  $\rho_G/\rho_L \ll 1$  の関係を用いて, 気相の運動量の慣性項を無視している。また,  $\tau_{ij}$  は二相流の Sub-Grid Scale (SGS) 応力であり以下のように書き表される。

$$\tau_{ij} = -(\bar{u}_{Li} \bar{u}_{Lj} - \bar{u}_{Li} \bar{u}_{Lj}). \quad (4.23)$$

従来, 二相流の数値シミュレーションの殆んどの場合, 乱れの影響を記述する変動項  $\tau_{ij}$  は, そのモデリングが不十分であるため, 0 として扱われてきている。

## 4.1.3 気泡の並進運動方程式

平均化方程式を用いて気泡流の数値解析を行うには、保存方程式(式(4.10)(4.11)(4.22))のみで閉じていないために、気泡の並進運動を記述する構成方程式が必要となる。気泡の並進運動方程式は、気泡に働く力の釣り合いによって記述される。気泡に働く力が分離できるものと仮定すると(慣性力、付加慣性力、揚力、周囲流体の加速による力(Pressure forceと呼ばれる)、定常抗力、履歴力)、形式的に、以下のように書き表される。

$$F_I + F_A + F_G + F_P + F_D + F_L + F_H = 0, \quad (4.24)$$

ここで、気泡はラグランジュ的に解くものとし、気相の変数の肩に(l)の添字をつける。

$$F_I^{(l)} = \frac{d\rho_G V_G^{(l)} u_{Gi}^{(l)}}{dt}, \quad (4.25)$$

$$F_A^{(l)} = \beta \left( \frac{d\rho_L V_G^{(l)} u_{Gi}^{(l)}}{dt} - \frac{D_L \rho_L V_G^{(l)} \bar{u}_{Li}}{Dt} \right), \quad (4.26)$$

ここで、付加質量係数は  $\beta = 0.5$  である。

$$F_G^{(l)} = -V_G^{(l)} g_i \rho_L, \quad (4.27)$$

$$F_P^{(l)} = -V_G^{(l)} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_L \left( \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \bar{u}_{Li} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \bar{u}_{Lj} \right) \right\}, \quad (4.28)$$

$$F_D^{(l)} = \frac{1}{2} \pi r_G^{(l)2} \rho_L C_D \sqrt{(u_{Gj}^{(l)} - \bar{u}_{Lj})(u_{Gj}^{(l)} - \bar{u}_{Lj})} (u_{Gi}^{(l)} - \bar{u}_{Li}), \quad (4.29)$$

$$F_{Li}^{(l)} = \frac{1}{2} \pi r_G^{(l)2} \rho_L C_L \sqrt{(u_{Gj}^{(l)} - \bar{u}_{Lj})(u_{Gj}^{(l)} - \bar{u}_{Lj})} \varepsilon_{ijk} \omega_{Lk} (u_{Gj}^{(l)} - \bar{u}_{Lj}) / |\omega_L|, \quad (4.30)$$

$$F_H^{(l)} = \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \frac{d(\mathbf{u}_G^{(l)}(\tau) - \mathbf{u}_L(\tau))}{d\tau} d\tau. \quad (4.31)$$

抗力係数  $C_D$  と揚力係数  $C_L$  には実験式が用いられる。例として、以下のものが挙げられる。

抗力係数の実験式 (Schiller & Naumann, 1933):

$$C_D = \frac{24}{Re_p^{(j)}} \left( 1 + 0.15 Re_p^{(j)0.687} \right). \quad (4.32)$$

力係数の実験式 (Sridhar & Katz, 1995):

$$C_L = 0.59 \left( |\nabla \times \mathbf{u}_L| a / |\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_G^{(j)}| \right)^{0.25}. \quad (4.33)$$

なお、履歴力は小さく、モデル化が困難であるために、無視されている。

#### 4.1.4 気泡流の圧力方程式 (非圧縮性気泡流)

二相流の発散  $D$  の定義:

$$D \equiv - \left( \frac{\partial f_L}{\partial t} + \frac{\partial f_G}{\partial t} \right). \quad (4.34)$$

$f_L + f_G = 1$  より  $D$  は常に 0 である。この関係を用いて、単相非圧縮性流体の数値シミュレーション手法である MAC 系の解法と同様に圧力が陰的に算出される。液相、気相の体積率の保存式 (式 (4.10)(4.11)) と式 (4.34) より、

$$D = \frac{\partial f_L \overline{u_{Lj}}}{\partial x_j} + \frac{\partial f_G \overline{u_{Gj}}}{\partial x_j}. \quad (4.35)$$

式 (4.35) を時間微分して、MAC 系解法での圧力修正を式 (4.22) のみに施すと、以下の圧力のポアソン方程式が得られる。

$$\frac{\delta D}{\delta t} = - \frac{1}{\rho_L} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} p$$

## 4.2 従来の混相流解析手法の問題点と解決手法

### 4.2.1 はじめに

本節では、既存のポイントフォースモデルや、平均化方程式を用いた二相流解析で用いられている数学的な致命的欠陥を式展開によって示すとともに、その解決方法について提案する。

まず、既存の二相流解析の問題点は、大きく分けて以下の2点挙げられる。

○分散相界面での境界条件が正しく扱われていない。

○非線形性相関項のモデルが不十分。

### 4.2.2 質点モデルの問題点

ストークス流の場合 ( $Re = 0$ )、ポイントソース法を用いることによって、粒子表面上の境界条件によらず、粒子から離れた速度場は正しく計算される。ストークス流れの方程式は、Appendix D の無次元化に従うと、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.36)$$

$$0 = \nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p). \quad (4.37)$$

ここで、 $\mathbf{f}_p$  は粒子に働く力、 $\delta(\mathbf{x})$  は、Dirac のデルタ関数を表す。ここで、無限静止流体中の単一粒子について考える。速度が遠方で0に減衰する条件 ( $u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ ) と式(4.36)(4.37)を満たす速度の解の1つは、 $O(r^{-1})$  で減衰するオゼーンテンソルで記述され、以下のよう書き表される。

$$u_i = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3} \right) f_{pj}. \quad (4.38)$$

また、式(4.36)(4.37)を満たす速度の同次解は境界条件の影響が反映されるように用いられ、以下のように調和関数で書き表される。

$$u_i^0 = \left( \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5} \right) f_{pj}. \quad (4.39)$$

この調和関数で記述される速度は、抗力に対して寄与しない。また、 $O(r^{-3})$  で減衰するために、遠方ではオゼーンテンソルで記述される速度 (式(4.38)) に比べて無視できる。従っ

て、無限静止流体中のストークス流では、粒子表面上での境界条件に関係なく、粒子に働く力  $\mathbf{f}_p$  と式 (4.38) で記述される速度場が 1 対 1 に対応する。

ストークス流における希薄な多粒子系の場合、同じように考えると、粒子に働く力がわかっているときには、式 (4.37) のポイントフォースとして導入することによって、各粒子の周りの遠方での速度場が境界条件に関係なく決定されるとともに、粒子間の相互作用も境界条件に関係なく決定される。従って、ストークス流の場合には、粒子に働く力の反力を流体側に与えることによって、遠方場 (Far Field) に対して妥当な流れ場の計算が可能である。この事実より、ポイントフォースを用いた計算は、粒子レイノルズ数が低い混相流の「two-way coupling」法に応用されている。その例には、Crowe *et al.* (1977) によって提案された、Particle-Source-In-Cell (PSIC) モデルが挙げられる。PSIC モデルは、粒子界面での境界条件は考慮しないで、ポイントフォースを導入することによって、流体=粒子間の相互作用を解くといった計算手法であり、概ね妥当な計算結果が得られることが知られている。なお、粒子近傍場 (Near Field) の影響を考慮して解析することも可能であり、Pan & Banerjee (1996) によってなされている。

さて、一般の分散性混相流の数値シミュレーションでは、粒子レイノルズ数が有限の場合に対しても、粒子表面上での境界条件の影響を考慮せずに、ポイントソースモデルが適用されていることが多い。以下に、その妥当性について検討する。

まず、ナビエ=ストークス方程式をレイノルズ数で摂動展開することが可能な  $0 < Re \ll 1$  の条件を考える。この場合、遠方場での速度の挙動は粒子表面での境界条件の影響を考慮せずとも、粒子に働く力のみによって記述できると考えられる。以下に、その理由を示す。

定常・非圧縮性流体を仮定すると、ナビエ=ストークス方程式は以下のように記述される。

$$Re \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p). \quad (4.40)$$

ここで、速度と圧力について、以下のように  $Re$  分解すると、以下のように書き表される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, Re) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r}) + Re \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{r}) + o(Re) \quad (4.41)$$

$$p(\mathbf{r}, Re) = p^{(0)}(\mathbf{r}) + Re p^{(1)}(\mathbf{r}) + o(Re) \quad (4.42)$$

ここで以下のように流体と粒子の粘性係数で記述される関数を考える。

$$\lambda = \frac{2\mu_f + 3\mu_p}{4\mu_f + 4\mu_p}, \quad (4.43)$$

無限静止流体での速度場に関して、 $O(Re^0)$ の解は、ストークス方程式の解に相当し、以下のように書き表される。

$$u_i^{(0)} = \left( \lambda a \left( \frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{x_i x_k}{r^3} \right) + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) a^3 \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right) \right) V_k. \quad (4.44)$$

ここで、 $V_k$ は粒子の並進速度、 $a$ は粒子半径を表す。式(4.44)中の $O(r^{-1})$ で減衰する右辺第1項はストークスレットの1乗に起因する抗力に寄与する項であるのに対して、 $O(r^{-3})$ で減衰する式(4.44)中の第2項は抗力に寄与しない項であり、ポイントフォースモデルでは境界条件に寄与する項に相当する。

次に $O(Re^1)$ の速度の解 $u_i^{(1)}$ を考える。 $O(Re^1)$ の方程式は以下のように書き表される。

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}) = \nabla p^{(1)} + \nabla^2 \mathbf{u}^{(1)}. \quad (4.45)$$

式(4.44)(4.45)より、 $u_i^{(1)}$ は以下のように記述される。

$$u_i^{(1)} = \lambda^2 A_i + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \lambda B_i + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right)^2 C_i \quad (4.46)$$

ここで、右辺第1項はストークスレットのみに寄与する項であり、右辺第2項、第3項はポイントフォースモデルで境界条件に寄与する項である。

球形粒子に働く抗力係数は、 $\lambda$ を用いて以下のように書き表されることが知られている。

$$C_D = \frac{32\lambda}{Re} + 8\lambda^2 \quad (4.47)$$

ここで、右辺第1項は $u_i^{(0)}$ の寄与であり、右辺第2項は $Re$ 摂動成分に対する補正項であり $u_i^{(1)}$ の寄与を表している。 $u_i^{(1)}$ の寄与は、 $\lambda^2$ に比例し、式(4.46)より、ストークスレットの大きさの2乗に起因することがわかる。また、 $C_D$ に対して、もしもポイントフォースモデルでの境界条件に寄与する影響が反映されているならば、式(4.46)より、 $(\lambda^2 - \lambda + 1/4)$ 、 $(\lambda^2 - 1/2 \cdot \lambda)$ に比例する係数が存在してはならない。従って、 $C_D$ は、ポイントフォースモデルで境界条件の影響とは関係なく算出される値である。また、速度場の遠方での振舞いは、抗力係数と同様、 $(4\lambda/Re + \lambda^2)$ に比例し、ポイントフォースモデルで境界条件の影響とは関係ない。以上をまとめると、 $0 < Re \ll 1$ の条件では粒子表面上での境界条件に関係なく、ポイントフォース $F_p$ が与えられていれば、速度の遠方での挙動が一意に決定される。つまり、遠方での速度場の挙動は粒子表面上での境界条件の影響を考慮せずとも、妥当な解が得られる。

次に中間レイノルズ数 ( $Re > O(1)$ ) の場合を考える。この場合、レイノルズ数が小さい ( $Re \ll 1$ ) 場合と異なり、粒子表面上での境界条件の影響を考慮せずに、粒子遠方場での速度を計算することは不可能である。つまり、従来のポイントソースモデル (式 (4.40)) は適さない。その理由は以下のように述べられる。

1. レイノルズ数を摂動パラメータとして、ストークスの解から NS 方程式を摂動展開することができない。

- 粒子周りの境界層厚さが、ストークスの解と大きく異なっている (Appendix G 参照)。
- 圧力の抗力への寄与は、後流の影響を受け、レイノルズ数に依存する。 ( $0 < Re \ll 1$  において、レイノルズ数展開したときの抗力に効く圧力の摂動成分は 0 である。)

2. 遠方場での速度・渦度分布が粒子表面上での境界条件に依存する。

- 粒子表面上での境界条件の違い (固着条件・自由滑り条件など) によって、粒子表面上での渦度の生成の大きさの違いをもたらす。遠方場における速度分布が異なってくる (Appendix G 参照)。従って粒子表面上での境界条件の影響を無視することは適当ではない。

一般的なポイントフォースモデルの形式である式 (4.40) には対流項の影響が導入されているものの、粒子表面上での境界条件が無視されている。従って、上記の 1., 2. の理由により、 $Re > O(1)$  の場合には遠方場での速度が正しく得られない。

さて、中間レイノルズ数での問題は、境界条件が正しく反映されていないことにあると述べた。ここで、式 (4.40) の形式に対して、粒子表面上での境界条件の影響を導入することの可能性について考える。粒子から流体へ及ぼす作用に関して、粒子周りの応力分布を球面調和関数で展開した場合、「抗力」は対称な 1 次の展開係数に相当する。この影響はポイントフォースモデルのようにデルタ関数的に記述することができる。それに対して、中間レイノルズ数域では、境界条件の影響に依存して、粒子前後の速度場に非対象性が現れ、高次の球面調和関数で展開される応力が発生する。この高次の球面調和関数で記述される影響は、方向によって異なるため、長さスケールが効いてくる。従って、中間レイノルズ数の場合、境界条件の影響をデルタ関数的に扱うことは困難であり、ポイントフォースモデルを適用することは適切でないと考えられる。

## 4.2.3 従来の平均化方程式の問題点

## 圧力に対する問題

本節では非圧縮性とみなされた気泡流について議論を行う。図 4-1 には実際の気泡流場における境界部 (図 左) と、平均化方程式を用いた解析で考慮されている境界部 (図 右) が示されている。図中の  $\Gamma$  は計算領域における境界部分、 $\Gamma_{Bl}$  は気泡  $l$  に対する界面 (境界) を表している。直接数値シミュレーションを考えると、流体の支配方程式 (質量・運動量保存式) は、図 4-1 に示された計算領域の境界  $\Gamma$  と気泡界面での境界  $\Gamma_{Bl}$  で、適切な境界条件が課せられることによって解かれる。一方、既存の平均化方程式を用いた二相流のシミュレーションでは、気泡の界面位置  $\Gamma_{Bl}$  における境界条件が陽に課されずに、二相流の支配方程式が解かれる。このような解析でも解が存在するのは、計算領域の境界  $\Gamma$  における境界条件が満たされていれば、境界値問題として運動量保存式が閉じているためである。しかしながら、気泡界面  $\Gamma_{Bl}$  の境界の影響は、気泡流の運動量保存式に導入しても、境界条件が冗長になるわけではなく、その影響が反映されている方が物理を正しく記述できる。

ここで、非圧縮性気液二相流を考えると、両相の体積率に関して以下に示される拘束条件が成り立つ。

$$f_G + f_L = 1, \quad (4.48)$$

非圧縮性より、各相の体積率の輸送方程式は、式 (4.10)(4.11) のように書き表される。式 (4.48) より、

$$\frac{\partial(f_G + f_L)}{\partial t} = 0, \quad (4.49)$$

であり、式 (4.49) に式 (4.10)(4.11) を代入すると、以下の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial(f_G \bar{u}_{G_i} + f_L \bar{u}_{L_i})}{\partial x_i} = 0. \quad (4.50)$$

この関係式は、両相の体積流束の和がソレノイダルであることを意味しており、非圧縮性単相流での速度のソレノイダル条件  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  に相当する。式 (4.50) より、両相の体積流束の和は Helmholtz 分解を行うことが可能であり、以下のように書き表される。

$$f_G \bar{u}_{G_i} + f_L \bar{u}_{L_i} = \nabla \phi + \nabla \times \Psi. \quad (4.51)$$

ここで、 $\phi$  は調和関数 ( $\nabla^2 \phi = 0$ )、 $\Psi$  は任意のベクトル関数である。非圧縮性気液二相流では、非圧縮性単相流と同様に、この関係を用いて圧力の算出が行われる。

各輸送方程式において、時間に対して離散化したときに、 $(N)$  番目と  $(N+1)$  番目との計算ステップの中間段階を \* と書き表す。  $(N+1)$  時刻における気相速度について、本

研究では気泡に働く力の方程式は陽的に解かれ、 $u_{Gi}^{(N+1)}$  は  $u_{Gi}^{(N)}$  から直接算出される。また、気相体積率  $f_G^{(N+1)}$  は  $(N+1)$  時刻における気泡位置  $x_{Gi}^{(N+1)}$  と気泡体積によって算出される。ここで、 $x_{Gi}^{(N+1)}$  は、 $\bar{u}_{Gi}^{(N)}$  と  $\bar{u}_{Gi}^{(N+1)}$  によって計算される。従って、 $(N+1)$  時刻における気相の体積流束  $(f_G \bar{u}_{Gi})^{(N+1)}$  は陽的に算出される。従って、気相に対しては、圧力方程式を解いた後に、体積流束の修正を行わない。

液相の運動量輸送方程式の時間進行を考えると、中間ステップにおける液相体積流束  $(f_L \bar{u}_{Li})^*$  は以下のように算出される。

$$(f_L \bar{u}_{Li})^* = (f_L \bar{u}_{Li})^{(N)} + \delta t (-(\text{Advection}) + (\text{Viscosity}) + (\text{Gravity})), \quad (4.52)$$

中間段階\*の時点では、一般に式(4.50)の関係が満たされない。そこで、非圧縮性流体と同様に、 $(N+1)$  時刻での両相の体積流束和のソレノイダル条件が満たされるように、以下に示される圧力のポアソン方程式が解かれる。

$$\frac{1}{\delta t} \frac{\partial((f_G \bar{u}_{Gi})^{(N+1)} + (f_L \bar{u}_{Li})^*)}{\partial x_i} = \nabla^2 p \quad (4.53)$$

体積率の輸送方程式(式(4.10)(4.11))が陰的に計算される場合、両相の体積率は、以下のよう書き表される。

$$f_G^{(N+1)} = f_G^{(N)} - \delta t \frac{\partial(f_G \bar{u}_{Gi})^*}{\partial x_i} = 0, \quad (4.54)$$

$$f_L^* = f_L^{(N)} - \delta t \frac{\partial(f_L \bar{u}_{Li})^*}{\partial x_i} = 0, \quad (4.55)$$

式(4.53)(4.54)(4.55)より、圧力のポアソン方程式は、以下のように書き表される。

$$-\frac{1}{\delta t^2} (f_G^{(N+1)} + f_L^* - 1) = \nabla^2 p \quad (4.56)$$

式(4.53)の  $(f_G \bar{u}_{Gi})^{(N+1)} + (f_L \bar{u}_{Li})^*$  はソレノイダル条件を満たさない。このとき以下のよう書き表すと、

$$(f_G \bar{u}_{Gi})^{(N+1)} + (f_L \bar{u}_{Li})^* = \nabla \phi^* + \nabla \times \Psi^*. \quad (4.57)$$

$\nabla \times \Psi^*$  を含む項は、ソレノイダル条件を常に満足することから、圧力方程式からは  $\phi^*$  のみの修正が行われればよい。圧力は、以下に示されるように分解される。

$$p = p^{(A)} + p^{(B)}, \quad (4.58)$$

ここで、以下の関係が成り立つ。

$$\nabla^2 p^{(A)} \neq 0, \quad \nabla^2 p^{(B)} = 0. \quad (4.59)$$

従って、圧力のポアソン方程式は、以下のように書き表される。

$$-\frac{1}{\delta t^2} (f_G^{(N+1)} + f_L^* - 1) = \nabla^2 p^{(A)} = \frac{1}{\delta t} \nabla^2 \phi^* \quad (4.60)$$

式(4.58)(4.59)から、圧力方程式で解かれる圧力  $p^{(A)}$  は、液相体積流束のスカラーポテンシャルに対して  $\nabla^2 \phi = 0$  を満たすために導入される変数であり、 $\Psi^*$  に対しては影響を及ぼさないことが示される。また、ポアソン方程式(4.59)の中で陽に記述されていない調和関数圧力  $p^{(B)}$  は境界条件に関係する部分である。従来の二相流の圧力のポアソン方程式には、計算領域の境界  $\Gamma$ (図4-1)での境界条件が考慮されているものの、気泡表面での境界  $\Gamma_B$ (図4-1)で流体が均質と見なされており、気泡表面での境界条件が無視されている。正しく圧力場を計算するには、 $\Gamma_B$  での境界条件に適合するように、調和関数である  $p^{(B)}$  を与えることが必要であり、既存の平均化方程式でこの影響を無視していることは問題である。

さて、気泡境界上 ( $r = a$ ) での  $p^{(B)}$  が既知であるすると、 $p^{(B)}$  は以下のように展開される。

$$(p^{(B)}(r, \theta, \phi)|_{r=a} - p(r)|_{r \rightarrow \infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( p_n Y_n(\theta) + \sum_{m=1}^n (p_{nm}^{(c)} Y_{nm}^{(c)}(\theta, \phi) + p_{nm}^{(s)} Y_{nm}^{(s)}(\theta, \phi)) \right) \quad (4.61)$$

ここで、 $Y_{nm}^*$  は  $n$  次  $m$  次の球面調和関数、 $p_{nm}^*$  はその展開係数である。 $p^{(B)}$  が調和関数であり、 $p^{(B)}$  が十分遠方で0に収束することを仮定すると、気泡周りの任意の位置における圧力場  $p^{(B)}(r)$  は以下のように書き表される。

$$(p^{(B)}(r) - p(r)|_{r \rightarrow \infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \left( p_n Y_n(\theta) + \sum_{m=1}^n (p_{nm}^{(c)} Y_{nm}^{(c)}(\theta, \phi) + p_{nm}^{(s)} Y_{nm}^{(s)}(\theta, \phi)) \right) \quad (4.62)$$

従って、既存の気泡流解析モデルで無視されている  $p^{(B)}$  の場全体における分布を得るには、気泡表面での  $p^{(B)}$  の値がわかればよい。

## 渦度に対する問題

気泡流の運動量輸送方程式(式(4.22))において、局所平均化された運動量の実質時間微分は以下のように書き表される、

$$f_L \frac{D\mathbf{u}_L}{Dt} = f_L \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_L \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_L \quad (4.63)$$

運動量の実質時間微分について回転をとり、まとめると以下に示される結果を得る、

$$f_L \frac{D\boldsymbol{\omega}_L}{Dt} = f_L (\boldsymbol{\omega}_L \cdot \nabla) \mathbf{u}_L + (\nabla f_L) \times \left( \mathbf{g} - \frac{D\mathbf{u}_L}{Dt} \right) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}_L \quad (4.64)$$

ここで、 $\boldsymbol{\omega}_L$  は、渦度ベクトルであり、

$$\boldsymbol{\omega}_L = \nabla \times \mathbf{u}_L \quad (4.65)$$

と書き表される。式(4.64)中の右辺第1項は、単相流でも現れる渦度の生成項であり、渦度の伸縮効果を記述する。また、式(4.64)の右辺第2項は気泡流特有の渦度生成項である。本研究では、この項を「気泡流のマクロスケール渦度生成項」と呼ぶ。この気泡流のマクロスケール渦度生成項は、気泡体積率の勾配と流体の加速度との外積によって表されていることがわかる。この項は、気泡表面での渦度が小さいはずの上昇気泡群が大規模な渦構造を形成する機構を説明する上で重要である。例えば、タンクの底から純粋液体中に気泡群を注入すると気泡ブルームが形成されることが知られているが(村井, 1996)、このメカニズムは、局所的に気泡を注入すると、強いボイド率勾配が水平方向に形成し、かつ、浮力によって気泡が鉛直方向に加速するため、「気泡流のマクロスケール渦」が生成されることによって説明される。なお、「気泡流のマクロスケール渦度生成項」は既存の気泡流解析でも考慮されており、新たなモデル化の必要はない。

式(4.64)の右辺第3項は、バルクでは渦度の拡散を表すが、気泡近傍では気泡表面上で生成される渦度の影響を強く受ける。本研究では、この項を「気泡流のミクロスケール渦度生成項」と呼ぶ。気泡流のミクロスケール渦度生成項は、境界の影響(図4-1の $\Gamma$ や $\Gamma_B$ )が反映されなければならない。すなわち、気泡表面での速度滑りがある場合とない場合に対して、気液界面で生成される渦度の強さの違いが現れるように定式化する必要がある。しかしながら、既存の気泡流解析手法では運動量方程式を解く上で、二相流体が均質であると見なされ、気泡の境界 $\Gamma_B$ に対する境界条件が無視されている。従って、この「気泡流のマクロスケール渦度生成項」は新たにモデル化する必要がある。

さて、粒子体積率が低い場合、両相の体積流束和の Helmholtz 分解(式(4.51))を考えると、渦度は式(4.51)の左辺に回転をとったものに相当する。式(4.51)の右辺第1項に回転操作を施すと恒等的に0となることから、渦度の境界条件は、式(4.51)の右辺第2

項  $\nabla \times \Psi$  によって反映される。先述したように、調和関数で記述される圧力  $p^{(B)}$  については、 $\nabla \times \Psi$  に対しては影響を及ぼさず、 $\nabla^2 \phi = 0$  を満足するために導入される。従って、渦度に対して調和関数圧力  $p^{(B)}$  が寄与しないことから、「気泡流のマクロスケール渦度生成項」に対する議論は、球面調和関数圧力  $p^{(B)}$  と完全に分離して行うことができる。本研究では「気泡流のマクロスケール渦度生成項」の影響を粘性応力生成と関連づけて、モデル化する。

以上、従来の平均化方程式を用いた数値解析において考慮されていない、気泡表面上における「圧力」と「粘性応力」の境界条件の影響について、主に、式展開によって考察した。これらの影響を平均化方程式を用いた数値解析に導入する手法は、4.4 節にて詳しく検討する。

## 4.2.4 既存の数値モデルにおける非線形項の取扱い

単相乱流でよく知られているように、非線形項が存在する運動量保存方程式を平均化すると、相関項(レイノルズ応力)が現れてくる。この相関項は、そのトレース成分が乱れエネルギーを直接記述するために、乱れを知る上で重要である。方程式の完結問題(Closure Problem)を満たすには、この相関項に対するモデル化が必要である。単相流の場合は、 $k-\epsilon$ モデルやLarge Eddy Simulationなどの研究によって、乱れの物理に基づいた定式化が施されており、多くの知見が得られている。

一方、混相乱流の分野でもまた、主に $k-\epsilon$ モデルに基づいた研究(例えば、Elghobashi & Abou-Arab, 1983; 佐藤・菱田, 1996; など)が行われ、分散体の混入に伴う乱流変動の影響などが詳細に検討されている。しかしながら、粒子から流体への運動量・エネルギー輸送は、点源として扱われることが可能な状況下で定式化されており、解析可能な対象が非常に限定されている。

分散体体積率が比較的に高い気泡流の場合にも、 $k-\epsilon$ モデルに基づいた研究が行われている。Kataoka & Serizawa (1989)は、二相の体積率や気液界面が質量・運動量・エネルギー輸送へもたらす影響を考慮して、 $k-\epsilon$ を導出している。また、Lopez De Berrodano *et al.*(1990)は、気泡流のレイノルズ応力方程式を導出している。また、Serizawa *et al.*(1991)やLopez De Berrodano *et al.*(1994)は、気泡流に対する $k-\epsilon$ 方程式やレイノルズ応力方程式を用いて計算を行い、実験に対して妥当な計算結果が得られることを報告している。しかしながら、乱流エネルギー、エネルギー散逸率、レイノルズ応力の輸送方程式には、完結問題を満足するための未知項が数多く存在し、その定式化は、詳細な物理現象に基づいたものでなく、ほとんど経験的になされているのが現状である。

また、分散体を含む流れは、局所・瞬時の粒子=流体間の相互作用が重要であるのに対して、 $k-\epsilon$ モデルは、アンサンブル平均操作によって定式化されており、根本的に問題がある。従って、分散体の局所的な作用を導入するには、非定常3次元解析であるDNSやLESに基づいた解析が必要である。

さて、「混相乱流のDNS」と称している解析が、近年、数多く行われてきているが、その多くは単相流の乱流として十分な格子解像度を有しているものの、粒子運動はモデル式によって記述されており、厳密なDNSではない。また、二相の相互作用が考慮された、いわゆるtwo-way coupling法を用いた解析の多くは粒子の運動に対して点源としての扱いがなされているが、この扱いが妥当であるのは、以下の3つの条件が満たされている必要がある。

- (1) 粒子径が乱れの最小長さスケール(コルモゴロフ長さスケール)に比べて十分に小さいこと。

- (2) 粒子の相対速度が十分に小さく粒子レイノルズ数が1よりも十分に小さいこと。
- (3) 粒子の体積濃度が十分に小さいこと。

しかし「two-way coupling」法による「混相乱流のDNS」と称されている数値シミュレーション多くは、上記の条件を逸脱しているように見受けられる。また、上記の条件は、解析対象を非常に限定している。

混相流のLESには、例として、GAL-LESモデル(二瓶, 1999)が挙げられる。このモデルでは、混相乱流の物理に基づき、乱れエネルギーの非平衡性を考慮して渦粘性係数が決定されている。また、実験との整合性から、手法の有効性が示されている。ただし、このモデルは分散体の扱いがEuler的であることから、非常に粒子数が多く、粒子分布が一様であるとみなせる場合を想定していると考えられ、分散体の界面上での境界条件の設定を属に与えることが不可能であり、粒子間スケールの現象を扱うことはできない。

次節では、第3章で行った、気泡流の各種SGS応力モデルに対する「*a priori* study」の結果を踏まえ、平均化方程式を用いる気泡流解析に適したSGS応力モデルの定式化を行う。

### 4.3 新しい平均化方程式を用いた数値シミュレーション手法の構築

#### 4.3.1 気泡の誘起する圧力 (Projection MAC 法の間接ステップでの値)

4.2節で示されたように、二相流の圧力方程式を解く場合、気泡表面での境界条件の影響は、調和関数で記述される。従って、粒子表面上での圧力分布が陽にわかれば、半径方向の圧力分布が決まる。本節では、Projection MAC 法に準じた手法によって解析を行うことを念頭に置き、この手法に適した圧力境界条件の設定方法を検討する。

相体積流束の間接ステップでの圧力を「1st step の圧力 (調和関数圧力, 図 4-2 左上)」とし、二相の速度体積流束の和に対するソレノイダル条件を満足するための圧力のポアソン方程式の解を「2nd step の圧力 (図 4-2 右上)」と書き表す。

「1st step」では、粒子表面上  $\Gamma_B$  で「粒子運動によって誘起される圧力 ( $p^{(P1)}$ )」と「均一流体とみなされているときの圧力 ( $r_i \partial_i p|_{r=a}$ )」との差が境界条件として与えられている。また、図 4-2 の遠方  $\Gamma$  では圧力の境界値は 0 と与えられる。

「2nd step」では、気泡の存在する部分を含めて均質であるとみなし、遠方での境界条件を満足するように圧力方程式が解かれる。この「2nd step」は従来の二相流解析でも考慮されている部分であり、本節での考察の対象としない。

圧力方程式は圧力に対して線形であることから、「1st step」と「2nd step」とを足した圧力分布は、圧力のポアソン方程式の解を満足する (図 4-2 下)。

「1st step」、「2nd step」における、圧力分布をそれぞれ、 $p^{(1)}$ ,  $p^{(2)}$  と書き表し、気液界面上での圧力を近似的に以下のように書き表す。

$$\begin{aligned} p^{(1)}(a, \theta, \phi) &= (\text{粒子が形成する圧力抗力の影響}) + (\text{粒子の加速の影響}) \\ &\quad - (\text{均一流体とみなしたときの粒子表面圧力})^{(N)} \\ &= p^{(PD)} + p^{(AI)} + p^{(BK)(N)} \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} p^{(2)}(a, \theta, \phi) &= (\text{均一流体とみなしたときの粒子表面圧力})^{(N+1)} \\ &= -p^{(BK)(N+1)} \end{aligned} \quad (4.67)$$

ここで、 $p^{(PD)}$ ,  $p^{(AI)}$ ,  $p^{(BK)}$  はそれぞれ、圧力抗力 (Pressure Drag), 付加慣性 (Added Inertia), バルク (Bulk) 圧力勾配の影響を表す。 $p^{(1)}$  は調和関数であり、粒子と遠方での境界条件によって一意に決定される。ここで、 $p^{(1)}$  について以下のような仮定を施す。

(1)  $p^{(1)}(\mathbf{r})$  の分布が、遠方で 0 に減衰する。

(2) 粒子表面上での圧力分布について、粒子ごとに分離して考える。(このことは、粒子間に働く相互作用について全く考慮されていないというものではなく、圧力分布の重ね合わせとして反映されている。) また、粒子表面上での 1st step 圧力  $p^{(1)}(\mathbf{r})|_{r=a}$  には、軸対称の単一粒子のデータベース (Appendix J 参照) を用いる。

(3) 粒子加速の影響について、単一粒子に対する付加慣性力を用いる。

以上の仮定を下に、式 (4.66) における  $p^{(PD)}$ ,  $p^{(AI)}$ ,  $p^{(BK)}$  が決定され、以下にその具体的な表記を導出する。

$p^{(PD)}$  について

無限静止流体中において、並進運動に対する圧力抗力については、レイノルズ数の関数として与えられ、Appendix B, D, J で検討されている。さて、球座標系  $(r, \theta, \phi)$  において、粒子中心からの距離を  $r$ 、粒子の進行方向との角度を  $\theta$  その方位角を  $\phi$  と書き表す。圧力分布が軸対称である場合、無限静止流体中で粒子が誘起する圧力  $p^{(PD)}$  は粒子表面上で以下のように書き表される。

$$p^{(PD)}(r, \theta, Re) \Big|_{r=a} = |u_p - u_f^{(\infty)}|^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N p_n(Re) Y_n(\theta) \quad (4.68)$$

ここで、 $Y_n(\theta)$  は  $n$  次の球面調和関数、 $p_n(Re)$  はレイノルズ数  $Re$  における  $Y_n(\theta)$  に対する展開係数を表す。 $p^{(PD)}$  が調和関数であり、無限遠で 0 に減衰する ( $p|_{r \rightarrow \infty} \propto 0$ ) 関係を用いると、任意位置における  $p^{(PD)}$  は以下のように書き表される。

$$p^{(PD)}(r, \theta, Re) = |u_p - u_f^{(\infty)}|^2 \sum_{n=0}^N \left( \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} p_n(Re) Y_n(\theta) \right), \quad (4.69)$$

従って、 $r, \theta$  方向に対する圧力勾配は以下のように書き表される。

$$\frac{\partial p^{(PD)}(r, \theta, Re)}{\partial r} = - |u_p - u_f^{(\infty)}|^2 \sum_{n=0}^N \left( (n+1) \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} p_n(Re) Y_n(\theta) \right), \quad (4.70)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p^{(PD)}(r, \theta, Re)}{\partial \theta} = - |u_p - u_f^{(\infty)}|^2 \sum_{n=0}^N \left( \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} p_n(Re) Y_{n1}(\theta) \right), \quad (4.71)$$

ここで、 $Y_{n1}(\theta)$  は  $n$  次 1 次の球面調和関数である。

式 (4.68) ~ (4.71) における、 $p_n$  に対する意味について以下に説明する。

$p_0$  は、気泡周囲の圧力を表面法線方向に対して積分された量を表す。例えば、ポテンシャル流の場合、球径粒子が並進運動する際には、半径方向に対して引く張られる力が生まれ、 $p_0$  は負となる。この並進運動によってもたらされる圧力の減少分を「並進減圧」と呼ぶ。この並進減圧は粒子周りの対流の影響によってもたらされる。ポテンシャル流の場合、速度の 2 乗と流体密度でスケールリングすると、式 (4.68) における  $p_0$  は以下のように書き表されることが知られている。

$$p_0 = -\frac{1}{4} \times 2\sqrt{\pi}. \quad (4.72)$$

さて、低レイノルズ数の場合、ストークス方程式 ( $Re = 0$ ) やオゼーン方程式 ( $0 < Re \ll 1$ ) を用いて評価した場合、並進減圧は 0 と見積もられる。しかしながら、オゼー

この方程式は NS 方程式に対する  $Re$  摂動方程式として正しくなく,  $0 < Re \ll 1$  で並進減圧が 0 と見積もられることは, その間違いに起因している (Appendix D). Appendix D では並進減圧を NS 方程式を正しく  $Re$  摂動展開して解き,  $0 < Re \ll 1$  における並進減圧が有限な値を持つといった, 新たな知見を得ている.

速度の 2 乗と流体密度でスケールリングすると, 表面が固着条件で記述される場合, 式 (4.68) における  $p_0$  は以下のように書き表される.

$$p_0 = -\frac{1}{16} \times 2\sqrt{\pi}, \quad (Re \ll 1). \quad (4.73)$$

また, 表面が自由滑りで記述される場合, 式 (4.68) における  $p_0$  は以下のように書き表される.

$$p_0 = -\frac{1}{12} \times 2\sqrt{\pi}, \quad (Re \ll 1). \quad (4.74)$$

Appendix D では, さらに, 球周りの DNS によって中間レイノルズ域の並進減圧を求め, 以下のように定義される並進減圧係数  $C_{TPR}$  を用いて, 並進減圧のレイノルズ数の依存性について整理している.

$$C_{TPR} = \frac{\int_{r=0}^{\infty} ds (p(r) - p_{\infty})}{\rho_f V^2 \int_{r=0}^{\infty} ds}. \quad (4.75)$$

$p_1$  は, 粒子運動方向に対する圧力抗力を表す係数であり, 低レイノルズ域での理論解析や DNS によって Appendix B にて評価されている. 低レイノルズ数 ( $Re \ll 1$ ) では, ストークスの解より粒子表面上の境界条件に関わらず, 全抗力に対する圧力抗力が  $1/3$  である. Appendix B より, 粒子表面が固着条件で記述される場合, レイノルズ数が約 1 まではこの関係が成り立ち, 式 (4.68) における  $p_1$  は以下のように書き表される.

$$p_1 = \frac{C_D}{3} \times \frac{\sqrt{3\pi}}{4}, \quad (Re \leq 1). \quad (4.76)$$

粒子表面が固着条件で記述される場合, 高いレイノルズ数域では, 後流の影響によって, 球の後方の圧力分布が低下し, その結果, 全抗力に対する圧力抗力の比が低レイノルズの場合よりも大きくなる. ここで, Appendix B における圧力抗力係数/全抗力係数比  $C_D^{(Press.)}/C_D^{(total)}$  に対する議論より,  $1 \leq Re \leq 200$  では, 式 (4.68) における  $p_1$  は以下のように近似される.

$$p_1 = \left(\frac{1}{3} + 1.88 \times 10^{-3} \cdot (\ln Re)^{2.80}\right) \times \frac{\sqrt{3\pi}}{4} \quad (1 \leq Re \leq 200). \quad (4.77)$$

この相関式の導出は, 本研究によって新たに得られたものである.

高次の圧力の展開係数  $p_n$  ( $n \geq 2$ ) は、抗力や減圧に対しては寄与せずに、粒子表面圧力分布の非対称を表す。この高次の圧力の展開係数について、ストークス流 ( $Re = 0$ ) では 0 である。また、剥離を伴わない低レイノルズにおいて、高次の圧力の展開係数は小さい。粒子表面が固着条件で記述される場合、高いレイノルズ数域では、後流で流れが剥離し、球の後方の圧力分布が複雑となる。このとき、高次の圧力の展開係数が大きくなる。Appendix J では、無限静止流体中において並進運動する球形粒子に対して、 $n \leq 6$  における  $p_n$  を評価し、結果を示している。

$p^{(A)}$  について

気泡と流体との相対加速度を、以下のように書き表す、

$$\frac{dV_i}{dt} - \frac{Du_i}{Dt} \quad (4.78)$$

ここで、 $V_i$  は気泡速度、 $u_i$  は流体速度、 $D/Dt$  は以下のように示される流体の実質時間微分を表す、

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + u_j \partial_j. \quad (4.79)$$

ここで、粒子の相対加速度によってもたらされる  $p^{(A)}$  が、ポテンシャル流での値と一致すると考えると、粒子表面上での圧力は以下のように書き表される、

$$p^{(A)}(\mathbf{r})|_{r=a} = \frac{a}{2} \frac{x_j}{r} \left( \frac{dV_j}{dt} - \frac{Du_j}{Dt} \right). \quad (4.80)$$

この粒子加速方向に対する表面積分値は以下のように示され、付加慣性力を示す、

$$\begin{aligned} \int_{r=a} dS p^{(A)} \frac{x_j}{r} &= \int_{r=a} dS \frac{a}{2} \frac{x_i x_j}{r^2} \left( \frac{dV_j}{dt} - \frac{Du_j}{Dt} \right) \\ &= \beta \frac{4\pi a^3}{3} \left( \frac{dV_i}{dt} - \frac{Du_i}{Dt} \right). \end{aligned} \quad (4.81)$$

ここで、 $\beta = 1/2$  であり、球の付加質量係数に一致する、

$p^{(A)}$  が調和関数であり、無限遠で 0 に減衰する ( $p|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ ) 関係を用いると、任意位置における  $p^{(A)}$  は以下のように書き表される、

$$p^{(A)}(\mathbf{r}) = \frac{a^3}{2} \frac{x_j}{r^3} \left( \frac{dV_j}{dt} - \frac{Du_j}{Dt} \right). \quad (4.82)$$

式(4.82) から、付加慣性力に対する圧力勾配は以下のように書き表される、

$$\partial_i p^{(A)}(\mathbf{r}) = \frac{a^3}{2} \left( \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5} \right) \left( \frac{dV_j}{dt} - \frac{Du_j}{Dt} \right). \quad (4.83)$$

$p^{(BK)}$  について

粒子表面上では、流体を均一とみなしたときの圧力分布が存在し、ダブルカウントを避けるために、粒子上での境界条件を満たすためにはその分を差し引く必要がある。その影響を  $p^{(BK)}$  とする。2nd step を解いたときの  $N$  計算ステップにおける圧力分布を  $p^{(\infty)}$  と書き表す。  $p^{(\infty)}$  の 1 階微分を考慮すると、粒子表面上での  $p^{(BK)}$  は以下のように近似される。

$$p^{(BK)}(\mathbf{r})|_{r=a} = -x_j|_{r=a} \left( \partial_j p^{(\infty)}(\mathbf{r})|_{r=0} \right). \quad (4.84)$$

$p^{(BK)}$  が調和関数であり、無限遠で 0 に減衰する ( $p|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ ) 関係を用いると、任意位置における  $p^{(BK)}$  は以下のように書き表される。

$$p^{(BK)}(\mathbf{r}) = -\frac{a^3 x_j}{r^3} \left( \partial_j p^{(\infty)}(\mathbf{r})|_{r=0} \right). \quad (4.85)$$

式(4.85) から、バルクの圧力分布に対する圧力  $p^{(BK)}$  の勾配は以下のように書き表される。

$$\partial_l p^{(BK)}(\mathbf{r}) = -a \left( \frac{\delta_{lj}}{r^3} - \frac{3x_l x_j}{r^5} \right) \left( \partial_j p^{(\infty)}(\mathbf{r})|_{r=0} \right). \quad (4.86)$$

## 4.3.2 気泡近傍で生成される粘性応力のモデリング

粒子近傍の粘性応力は、前節で示されたように気泡表面で生成される渦度に対して重要な影響をもたらす。さて、粘性応力は速度勾配に比例する形で記述されるが、NS方程式での速度勾配は線形でない。従って、速度勾配を、図4-2で示された圧力のように、数学的操作によって、バルクでの寄与と粒子表面の境界条件への寄与とに分離することが不可能である。すなわち、粒子運動が速度勾配へ及ぼす影響は粒子表面付近で強く、バルクで弱い。その強弱を分離して考えることは難しい。従って、境界付近での粒子の誘起する粘性応力の影響を導入するには、数学的に多少大胆な方法を取らざるを得ない。

本研究では、粒子近傍の粘性応力の影響について、従来のポイントフォースモデルを土台として、運動量保存式の生成項として扱うことにする。そのとき、粒子近傍の速度場を $n$ 次( $n \geq 1$ )の球面調和関数で展開したデータベースを利用する。速度場の球面調和関数の1次モードは、ポイントフォースモデルと同様に抗力への寄与を表す。本手法では、抗力係数が効かないより高次のモード( $n \geq 2$ )を含めて定式化する。これにより粒子周りの応力場がポイントフォースモデルよりも詳細に得られ、粒子の後流の影響や境界層のレイノルズ数依存性が反映される。

さて、粒子運動によってもたらされる粘性応力の影響は、格子解像度に依存する。また、粒子界面に近いほど、その影響は強い。従って、グリッド長さと粒子表面からの距離を関数とした重み関数( $w: 0 \leq w \leq 1$ )を用いて、粒子運動が誘起する粘性応力の影響を考慮するのが適当であると考えられる。格子点と気泡位置が図4-3の関係にある場合を想定し、重み関数を以下のように書き表す。

$$w(\xi) = 1 - \frac{\xi}{\Delta x} \quad (0 \leq \xi \leq \Delta x), \quad (4.87)$$

$$w(\xi) = 0 \quad (\Delta x \leq \xi). \quad (4.88)$$

ここで、 $\xi$ は粒子表面からの距離、 $\Delta x$ はグリッド長さを表す。

さて、本手法での仮定として、粘性応力( $\sigma_{ij}$ )が以下のように分離されるものとする。

$$\sigma_{ij}^{(E)} = (1-w)\sigma_{ij}^{(\infty)} + w\sigma_{ij}^{(PI)}. \quad (4.89)$$

式中の肩添字について、 $(E)$ は実効(Effective)、 $(\infty)$ は流体を均一とみなした場合の、 $(PI)$ は粒子が誘起する(Particle Induced)応力を表す。ここで、 $\sigma_{ij}^{(\infty)}$ を、以下のように書き表す。

$$\sigma_{ij}^{(\infty)} = \mu \left( \partial_i u_{Lj} + \partial_j u_{Li} - \frac{2}{3} (\partial_k u_{Lk}) \delta_{ij} \right). \quad (4.90)$$

また,  $\sigma_{ij}^{(PI)}$  は, 軸対称の流れ場を解いたときの粒子の誘起する速度場のデータベース (Appendix G, I 参照) を用いて算出され, 以下のように書き表す.

$$\sigma_{ij}^{(PI)} = \mu \left( \partial_i u_j^{(PI)} + \partial_j u_i^{(PI)} - \frac{2}{3} (\partial_k u_k^{(PI)}) \delta_{ij} \right). \quad (4.91)$$

なお,  $u_i^{(PI)}$  は, 軸対称球座標系で以下のように書き表される.

$$u_r^{(PI)}(r, \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} Y_n(\theta), \quad (4.92)$$

$$u_\theta^{(PI)}(r, \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{m-2}{\sqrt{2n(n+1)}} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} Y_{n1}(\theta). \quad (4.93)$$

ここで,  $|u_p - u_f^\infty|$  は粒子と周囲流体との相対速度である. また,  $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  は, 球面調和関数/多項式展開係数である.  $u_i^{(r)}(a)$  でスケーリングされている, 速度の空間微分値は以下のように示される.

$$\frac{\partial u_r^{(PI)}(r, \theta)}{\partial r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( -m \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m-1} Y_n(\theta) \right), \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial u_\theta^{(PI)}(r, \theta)}{\partial r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( -\frac{m(m-2)}{\sqrt{2n(n+1)}} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m-1} Y_{n1}(\theta) \right), \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial u_r^{(PI)}(r, \theta)}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( -\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} Y_{n1}(\theta) \right), \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial u_\theta^{(PI)}(r, \theta)}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( \frac{m-2}{\sqrt{2n(n+1)}} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} \frac{\partial Y_{n1}(\theta)}{\partial \theta} \right). \quad (4.97)$$

ここで, 球座標系で表された速度勾配は Appendix H で示されるように座標変換を施され, カートesian座標で  $\sigma_{ij}^{(PI)}$  が計算される.

## 4.3.3 気泡流の SGS 応力モデルの構築

非線形相関項について,

$$f_L(\overline{u_L u_L} - \bar{u}_L \bar{u}_L) = -f_L \tau_{ij} \quad (4.98)$$

と書き表す. ここで,  $\tau_{ij}$  は単相流の LES (Large Eddy Simulation) における, SGS (Sub-Grid Scale) 応力に相当する. 局所体積平均操作 (グリッドフィルタ操作) を  $\langle \cdot \rangle$ ; 液相インディケータ関数を  $X_L$  と書き表すと,  $-f_L \tau_{ij}$  は以下のように書き表される.

$$-f_L \tau_{ij} = \langle X_L u_i u_j \rangle - \frac{\langle X_L u_i \rangle \langle X_L u_j \rangle}{\langle X_L \rangle} \quad (4.99)$$

この SGS 応力 ( $-f_L \tau_{ij}$ ) は, 次元解析より, 粒子の並進速度の 2 乗, 粒子径 ( $a$ ) の  $-2$  乗, グリッド長さ ( $\Delta x$ ) の 2 乗に比例した値を持ち, 粒子の運動に依存する. 従って, 単相乱流における渦構造に対して格子解像度が十分な場合 (多くの研究において, 「混相乱流の DNS」と自称されている場合) であっても, SGS 応力が無視できない場合がありうる. 特に, 格子スケールの方が十分に粗い場合 ( $a < \Delta x$ ), 粒子後流の影響が強い場合, 境界層の遠方での振る舞いがストークス流れと異なる中間レイノルズ数の場合は, SGS 応力を無視することが適切ではない.

本研究では, SGS 応力の非平衡性を考慮せずに, 瞬時の変数を用いて記述する. また, 本研究では, 分散相の体積率が低い系を計算対象としており, 非圧縮性単相乱流の LES と同様に SGS 応力の等方成分が圧力方程式の解の中に含まれているものと考えられる. 従って, SGS の非等方成分のみに対してモデル化を施す. 任意の 2 階のテンソル  $\phi_{ij}$  に対して, その非等方成分を  $\phi_{ij}^*$  と書き表すと, 以下に示される関係が成り立つ.

$$\phi_{ij}^* = \phi_{ij} - \frac{1}{3} \phi_{kk} \delta_{ij} \quad (4.100)$$

本研究では, 前節で定義した重み関数  $w$  を用いて, 粒子近傍については粒子が誘起する (Particle Induced) SGS 応力  $\tau_{ij}^{(PI)}$  の影響が強く, 粒子から離れた位置では, 単相流としての (Single-Phase) SGS 応力  $\tau_{ij}^{(\infty)}$  の影響が強いとして, 以下のような実効 (Effective) SGS 応力  $\tau_{ij}^{(E)}$  を導入する.

$$\tau_{ij}^{(E)*} = (1-w)\tau_{ij}^{(\infty)*} + w\tau_{ij}^{(PI)*} \quad (4.101)$$

ここで, 単相流としての SGS 応力  $\tau_{ij}^{(\infty)}$  は, ダイナミック渦粘性モデルとスケール相似則モデルとの混合モデルである Dynamic Mixed SGS Model (Vreman *et al.*, 1994) に準じた定式化を行う. ここでは, グリッドフィルタ操作を  $\bar{\cdot}$ , テストフィルタ操作を  $\hat{\cdot}$  と記述する. また, グリッドフィルタスケール, テストフィルタスケールをそれぞれ  $\bar{\Delta}$ ,  $\hat{\Delta}$  と

記述する。本研究では、 $\hat{\Delta}/\Delta = 2$ としている。Dynamic Mixed SGS Model を適用すると、 $-\tau_{ij}^{(\infty)*}$  は以下のように書き表される。

$$-\tau_{ij}^{(\infty)*} = (\overline{u_{Li}u_{Lj}} - \hat{u}_{Li}\hat{u}_{Lj})^* - 2C\hat{\Delta}^2 |S_L| S_{Lij}^* \quad (4.102)$$

ここで、

$$|S_L| = (2S_{Lij}S_{Lij})^{1/2}, \quad (4.103)$$

である。式(4.102)の定数  $C$  は、Vreman *et al.* (1994) の最小二乗法を用いた手法にならない、以下の手順で算出する。

$$M_{ij}^* = 4|\hat{S}_L|\hat{S}_{Lij}^* - |\hat{S}_L|\hat{S}_{Lij}^* \quad (4.104)$$

$$L_{ij}^* = \widehat{u_{Li}u_{Lj}} - \hat{u}_{Li}\hat{u}_{Lj} \quad (4.105)$$

$$H_{ij}^* = \left\{ \left( \widehat{\widehat{u_{Li}u_{Lj}}} - \hat{\hat{u}}_{Li}\hat{\hat{u}}_{Lj} \right) - \left( \widehat{u_{Li}u_{Lj}} - \hat{u}_{Li}\hat{u}_{Lj} \right) \right\}^* \quad (4.106)$$

$$C = -\frac{M_{ij}^*(L_{ij}^* - H_{ij}^*)}{2\hat{\Delta}^2 M_{ij}^* M_{ij}^*} \quad (4.107)$$

オリジナルの Vreman *et al.* (1994) の手法では、式(4.107)の分子・分母は等方的な方向に対して平均操作が施されている。本研究の場合、解析対象は等方であるが、粒子分布は非等方であり、局所的な分散相=連続相の相互作用が重要であることからそのような平均操作は施すのは適当でないとする。しかしながら、式(4.107)で平均操作を施すことは、数値的な負の粘性による計算不安定を防ぐ上で重要である。本研究では、 $C$  が 0 以下と評価される場合について、これを 0 とする。また、極端に大きな  $C$  の値も計算不安定をもたらす。従って、本研究では、以下のような最大の  $C$  ( $C_{max}$ ) を設定し、これを、0.4 (単相等方乱流のスマゴリンスキー定数の 10 倍) と制限する。従って、実際の  $C$  の算出について、式(4.107)ではなく、以下のように求めている。

$$C = \min \left( \max \left( -\frac{M_{ij}^*(L_{ij}^* - H_{ij}^*)}{2\hat{\Delta}^2 M_{ij}^* M_{ij}^*}, 0 \right), C_{max} \right). \quad (4.108)$$

気泡近傍における SGS 応力  $\tau_{ij}^{(PI)}$  を、2通り提案し、以下に説明する。

### $\tau_{ij}^{(PI)}$ のモデル 1

気泡近傍の SGS 応力  $\tau_{ij}^{(PI)}$  とバルクの SGS 応力  $\tau_{ij}^{(\infty)}$  を分離しない方法である。すなわち、

$$\tau_{ij}^{(PI)} = \tau_{ij}^{(\infty)}, \quad (4.109)$$

と考える。従って、式(4.102)~(4.108)に示された方法によって気泡近傍の SGS 応力  $\tau_{ij}^{(PI)}$  を求める。

### $\tau_{ij}^{(PI)}$ のモデル 2

粒子周りの速度場の重ね合わせを利用したモデルであり第3章で示した SGS 応力モデルの中で、Model-D に対応する。導出過程を以下に示す。

粒子の誘起する速度場を  $u_i^{(PI)}$  と書き表すと、 $\tau_{ij}^{(PI)}$  は以下のように書き表される。

$$-\tau_{ij}^{(PI)} = \langle u_i^{(PI)} u_j^{(PI)} \rangle - \langle u_i^{(PI)} \rangle \langle u_j^{(PI)} \rangle. \quad (4.110)$$

ここで、速度に対して以下のように書き表されるテイラー展開を施す。

$$\phi(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{x} \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{x} : \nabla\nabla\phi(\mathbf{x}) + o(\Delta x^2) \quad (4.111)$$

さらに、グリッドフィルタ操作  $\langle \rangle$  は以下のように書き表される。

$$\langle \phi \rangle = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} d\xi \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} d\eta \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} d\zeta \phi(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) \quad (4.112)$$

式(4.111)(4.112)をまとめると、式(4.110)は以下のように近似される。

$$-\tau_{ij}^{(PI)} = \frac{\bar{\Delta}^2}{12} \frac{\partial u_i^{(PI)}}{\partial x_k} \frac{\partial u_j^{(PI)}}{\partial x_k} + o(\bar{\Delta}^2) \quad (4.113)$$

ここで、 $\bar{\Delta}$  はグリッドフィルタスケールであり、以下のように書き表される。

$$\bar{\Delta} = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (4.114)$$

式(4.113)の  $o(\bar{\Delta}^2)$  を除いた、式を気泡近傍の SGS 応力  $\tau_{ij}^{(PI)}$  として扱う。

なお、式(4.113)の速度勾配の計算は、軸対称の流れ場を解いたときの粒子の誘起する速度場のデータベース (Appendix G, 1 参照) を用いている。速度勾配は式(4.94)~(4.97)のように記述される。そして、球座標系で表された速度勾配は Appendix H に従って、カーテシアン座標へと座標変換して、式(4.113)の  $\tau_{ij}^{(PI)}$  を求める。

## 4.4 計算手法

支配方程式は有限差分法によって離散化する。また、圧力の振動を防ぐためにスタッガードメッシュを用いる。連続相の時間積分は、2次精度の Adams-Bashforth 法によって行っている。空間微分精度は、4次精度の中心差分法で近似している。また、対流項は、以下のように分離してそれぞれの項を別々に離散化している。

$$\frac{\partial f u_i u_j}{\partial x_j} = u_i u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + f u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + f u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (4.115)$$

また、連続相から分散相への内挿は、5次精度のラグランジュ補間を適用している。気泡運動の時間成分法は、速度と位置に対して、それぞれ、2次精度 Adams-Bashforth 法、2次精度の rank-Nicholson 法を適用している。また、ボイド率の算出には、圧力の非物理的な高波数成分の除去に適した、Temple Delivery 法(村井ら, 1997)に従っている。

## 4.5 Euler-Lagrange による解析手順

解析手順は、projection MAC 法に準じており、以下のように示される。

1. 液相体積流束の予測:

$$\frac{(f_L u_L)^{(*)} - (f_L u_L)^{(N)}}{\delta t} = -(\text{Advection})^{(N)} + (\text{Viscous})^{(N)}$$

2. 液相体積率の予測:

$$\frac{f_L^{(*)} - f_L^{(N)}}{\delta t} = -\frac{\partial (f_L u_L)^{(*)}}{\partial x_i}$$

3. 気泡の新しい速度と位置を計算:

$u_G^{(N+1)}$  は気泡の並進運動方程式によって計算される。

$x_G^{(N+1)}$  は  $u_G^{(N+1)}$ ,  $u_G^{(N)}$ ,  $x_G^{(N)}$  によって計算される。

4. 気相体積率の計算:

$f_G^{(N+1)}$  は各気泡の位置  $x_G^{(N+1)}$  と半径によって計算される。

5. 気泡流の発散の計算:

$$D = 1 - f_G^{(N+1)} - f_L^{(*)}$$

6. 圧力方程式の解を求める:

$$\nabla^2 p^{(N+1)} = D$$

7. 液相体積率の計算:

$$f_L^{(N+1)} = 1 - f_G^{(N+1)}$$

8. 液相体積流束の修正:

$$(f_L u_{Li})^{(N+1)} = (f_L u_{Li})^{(*)} - \delta t \frac{\partial p^{(N+1)}}{\partial x_i}$$

9. 新しい液相速度の計算:

$$u_{Li}^{(N+1)} = (f_L u_{Li})^{(N+1)} / f_L^{(N+1)}$$

10. 計算が終了していないならば, 1. に戻る.

## 4.6 計算条件

計算対象は第3章で行われた, 上昇する多数の気泡運動のシミュレーションと同じであり, 全周に周期境界条件が課されている. 計算条件は,  $g = 10(\text{m/s}^2)$ ,  $f_p = 0.833, 3.33(\%)$  とする. なお, より高いボイド率の場合でも計算を行ったが, 局所的な気泡の集積が過度となることによって, 結果は不安定であった. 計算領域の大きさは, 第3章のDNSよりも広い1辺の長さを16mmとし, 格子点数を $16^3$ としている. また気泡径は0.5mmである.

## 4.7 計算結果

ここでは, 本章で示された幾つかの計算手法に対して計算を行う. そして, エネルギースペクトルを用いて, 第3章で行われたDNS結果と, 本計算結果との比較を行う.

ここで, まずはじめに, 4.3.3節で示された, 気泡近傍のSGSモデル $\tau_{ij}^{(PI)}$ に関して, 第3章の議論から, 粒子が誘起する速度場を利用している「モデル2」は実際の気泡流のSGS応力を良好に再現すると考えられるが, 「モデル2」を用いて計算を行った場合, 安定な計算結果を得ることができなかった. 数値的不安定の回避法を構築する必要があると考えられ, 今後の課題としたい.

計算手法は, 表4-1に示されているように, 3通りに対して行う. 表中の「Present」は4.2節, 4.3節での議論を通じて新たに構築された計算手法である. 「Conventional」は,

既存の気泡流の計算手法であり 4.2 節, 4.3 節で議論された SGS モデルや, 粒子近傍での圧力, 渦度生成の影響が全く反映されていない。また, 「Non-linear SGS」は, SGS モデルとして, 非線形モデル (第 3 章における Model-C) が導入されているのに対し, 4.3.1 節, 4.3.2 節でモデル化された, 気泡近傍での圧力, 渦度生成の影響は反映されていない。なお, 第 3 章では, 非線形モデルによって, DNS の局所的な情報を直接用いて算出されたモデル応力は, 実際の SGS 応力との相関が高いことが示されている。

Table 4-1 Conditions of simulation methods

|                | Near-particle boundary effect | SGS model                   |
|----------------|-------------------------------|-----------------------------|
| Present        | ○                             | ○ (Dynamic Mixed SGS model) |
| Conventional   | ×                             | ×                           |
| Non-linear SGS | ×                             | ○ (Non-linear SGS model)    |

図 4-4, 図 4-5 には, 計算された 1 次元縦エネルギースペクトルが示されている。この図には, 第 3 章で得られた DNS の結果が線で表示されている。この図より, 「Conventional」, 「Non-linear SGS」では, エネルギースペクトルの値が, 非常に過小評価であり, 大きくオーダーが異なっている。「Non-linear SGS」(非線形モデル)の結果と「Conventional」に有意な違いが見られないのは, まず, 非線形モデルは, 第 3 章で議論されているように, DNS の局所的な情報を直接用いて SGS 応力を評価する場合には高い相関を与えるものの, 格子解像度に強く依存するため, 粗い格子系を用いた気泡流の LES では不正確になってしまうことが, 一つの理由として挙げられる。特に格子解像度が低い場合には, GS 速度場は均一化してしまうために, 速度勾配を利用して算出されるモデル応力の大きさが著しく低くなっていると考えられる。また, 「Conventional」と「Non-linear SGS」はともに, 粒子近傍での圧力, 渦度生成の影響が反映されておらず, 「Present」の結果を踏まえると, このことが, DNS に対する顕著な過小評価を生み出す根本的な原因であると言える。

本計算手法 (Present) では, 4.2 節, 4.3 節での議論された粒子近傍での圧力, 渦度生成の影響が反映されている。図 4-4, 図 4-5 から, これらの要因をモデルに導入してすることによって, DNS の結果に近く, 従来方法を改善していることがわかる。

従って, 平均化方程式を用いた気泡流の数値シミュレーションには, 従来考慮されていなかった気泡近傍の圧力, 渦度生成の影響が重要であると言える。

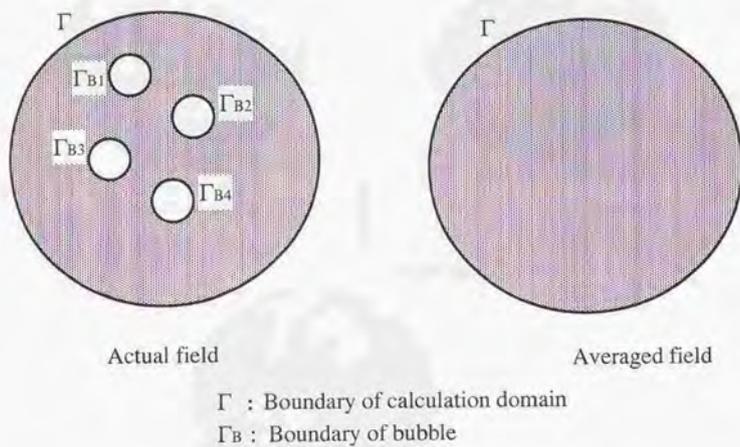


Fig. 4-1 Schematic of boundaries in actual and two-phase averaged fields.

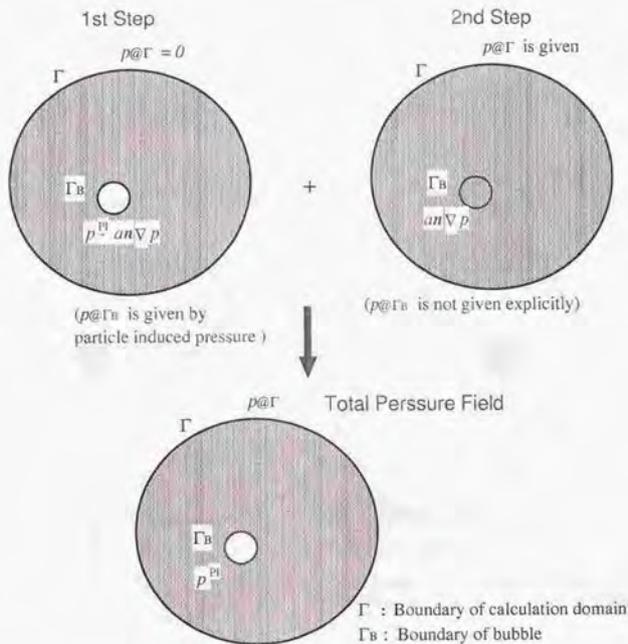


Fig. 4-2 Schematic of boundary conditions for present scheme.

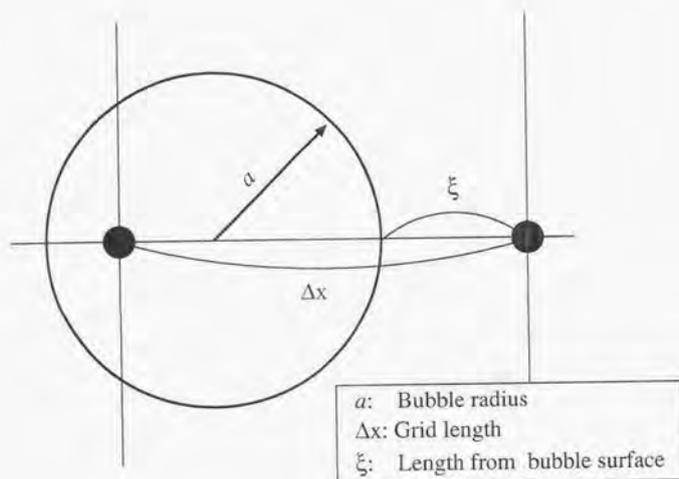


Fig. 4-3 Schematic of bubble and grid position.

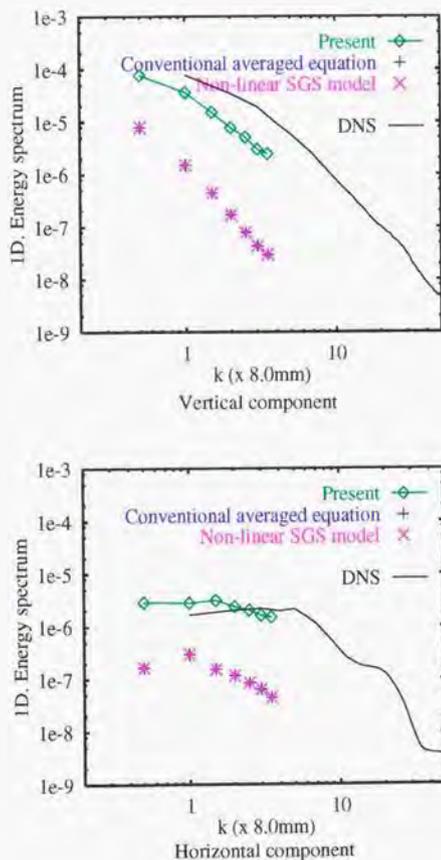


Fig. 4-4 1D. energy spectrum versus wave number compared among DNS, present scheme, scale similarity sub-grid model and non-linear sub-grid model for Vertical and horizontal components. ( $g = 10$ ,  $f_p = 0.833(\%)$ )

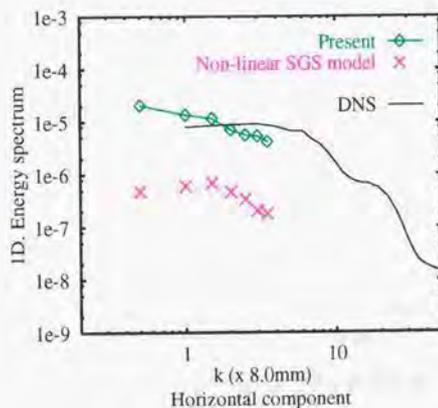
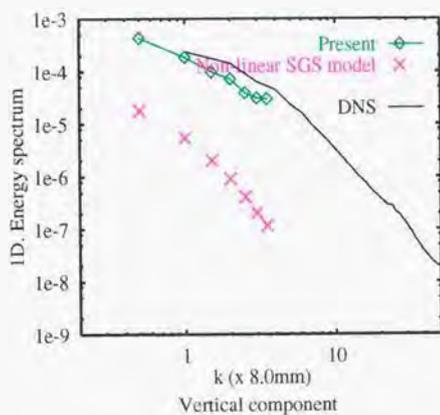


Fig. 4-5 1D. energy spectrum versus wave number compared among DNS, present scheme, scale similarity sub-grid model and non-linear sub-grid model for Vertical and horizontal components. ( $g = 10$ ,  $f_p = 3.33(\%)$ )

## Chapter 5

### 結論

本論文における結論は以下のようにまとめられる。

- 定常セル流れ中における気泡・粒子運動を one-way coupling 法によって計算し、渦が気泡・粒子運動にもたらす様々なパラメタの依存性を調べ、以下の結果を得た。
  - 気泡・粒子速度の時間発展過程を緩和過程と考えた場合、その緩和時間は、粒子緩和時間  $\tau_p^*$  に比例する影響だけでなく、 $\tau_p^*$  が小さい場合には  $1/\tau_p^*$  に比例することが示された。
  - 定常セル流れ中の気泡・粒子は、流体運動の非線形性の影響を受け複雑な挙動を示す。 $\tau_p^*$  変化に対する粒子挙動は流体との密度比  $\rho^*$  とセル流れの代表速度に対する静止流体中での沈降・上昇速度の相対値  $W^*$  によって整理されることが示された。
- 一様等方性乱流中の気泡・粒子運動を one-way coupling 法によって計算し、preferential concentration, 粒子分散, の影響について調べ、以下の結果を得た。
  - 乱流の特定の構造に対する粒子の集積 (Preferential concentration) について調べ、重い粒子 ( $\rho_p/\rho_f > 1$ ) の場合には、高圧力・高ひずみ領域に対し、密度が小さい気泡 ( $\rho_p/\rho_f \rightarrow 0$ ) の場合には低圧力・低ひずみ領域に集積するといった従来から知られている傾向が再現されることを確認した。
  - 気泡運動が渦構造に対して受ける指向性は、同じ程度の粒子緩和時間を有する重い粒子に比べて極めて強いことが示された。
  - 粒子緩和時間と乱れのラグランジュ積分時間の比 ( $\tau_p/T_{LJ}$ ) で整理して preferential concentration の強さを調べ、気泡は重い粒子の場合と同様に分散体の慣性と抗力の影響が同程度であるときにその傾向が顕著になることが示された。ただし、 $\tau_p/T_{LJ}$  が大きい場合、重い粒子は流体の慣性に対して鈍感になるのに

対し、気泡は敏感に反応する。従って、preferential concentration の強さが最大となる気泡の  $\tau_p/T_L$  は重い粒子に比べ大きいことが示された。

- 気泡・粒子の rms 速度について調べ、乱れの構造を無視した既存の Tchen の理論との比較を行った。その結果、粒子緩和時間に対する粒子速度の rms 値の振舞いについて、重い粒子の場合は Tchen の理論と近いのに対し、気泡の場合は preferential concentration の指向性が重い粒子に比べて極めて大きいため、Tchen の理論と大きく異なっていることが示された。
  - Preferential concentration が強いときの  $\tau_p$  に対する粒子拡散係数について、重い粒子の場合には乱流混合が強い高ひずみ領域に集まりやすいために、若干、バルク流体の乱流拡散係数よりも高くなる。それに対し、気泡の場合には、乱流混合が弱い渦中心に集中するため、バルク流体の乱流拡散係数よりも低い。
  - 分散体の慣性の影響が大きい場合 ( $\tau_p > O(1)$ ) の粒子拡散係数について、重い粒子の場合には、従来から知られているような、'crossing trajectory' 効果によって低下する様子が再現された。それに対して、気泡の場合には、流体の慣性が増幅されることによって、バルク流体の乱流拡散係数よりも高くなる様子が示された。
  - 確率的に粒子分散を表現する Langevin model (Sommerfeld *et al.*, 1993) について、密度比と粒子緩和時間をパラメータとして分散体の rms 速度を調べ、その結果が等方乱流中気泡・粒子の rms 速度に対する Tchen の理論とよく整合することを確認した。従って、重い粒子については、上述したように乱流中の粒子 rms 速度が Tchen の理論と合うことから、Langevin model が有効であることが示唆された。
- 第3章では、「気泡群の直接シミュレーション」に関する研究成果が記述され、その結果について以下に示す。
- 矩形格子を用いた球形気泡を含む流れの直接数値シミュレーションに関し、瀧口ら (1998) の手法にならって定式化を行った。本研究では、特に気泡表面上での境界条件の設定を工夫して、高精度で安定に計算する手法の開発を行った。
  - 本研究で開発された計算コードを用いて円柱や球周りの流れ場を計算し、抗力係数を調べた。その結果、本計算によって得られた抗力係数は、実験結果と良好に合うことが示され、流体の解析手法と粒子に働く力の算出方法が正しく行われることが確認された。
  - 静止流体中の単一球形気泡・粒子の速度の時間経過について、境界適合格子を用いた DNS や履歴力をモデル化した理論式とよく合うことが示され、気泡・

粒子運動に関する計算方法が正しく行われることが確認された。

- 本計算手法を多数の気泡を含む流れに適用して、抗力係数とレイノルズ数の関係について、粒子体積率の影響を調べた。その結果、調べた範囲（粒子体積率が10%以下、 $Re_p < 200$ ）では計算で得られた抗力係数と実験値や理論解とが概ね良く合うことが示された。また、単一粒子（粒子体積率が0%）の抗力係数に相対的な抗力係数の増大率はレイノルズ数よりも、粒子体積率に依存することが示された。
  - 気泡群の相互作用によってもたらされる拡散現象について、水平方向成分の自己拡散係数によって調べた。その結果、レイノルズ数が高く、ボイド率が高い程、自己拡散係数が大きくなる様子が示された。特に自己拡散係数はボイド率に対する依存性が大きく、本解析結果から高ボイド率域（10%程度）では、自己拡散係数が液体の分子粘性よりも卓越して大きくなる様子が示された。
  - 球形粒子が誘起する平均的な速度場を、球面調和関数を用いて展開した。ボイド率が高い程、粒子間が狭くなって相互作用が強くなるために、形成される境界層の厚さが薄くなることが示された。また、数少ない情報量で再構築される流線のレイノルズ数依存性が物理的に妥当であることが示された。
  - 気泡流の Sub-Grid Scale 応力について各種 SGS モデルとの比較・検討を行った。その結果、気泡流の場合には、気泡近傍の局所的な流れ場の構造が重要であることが示された。
- 第4章では、「平均化方程式を用いた分散性混相流モデルの構築」に関する研究成果が記述され、その結果について以下に示す。

- 粒子と流体間の運動量相互作用をポイントフォースとして扱う従来の数値解析手法について、粒子レイノルズ数が  $Re = 0$ 、もしくは、 $0 < Re \ll 1$  の場合について、粒子遠方場での速度の振舞いが正しく算出されることを示すと共に、粒子レイノルズ数が高い場合には粒子前後の速度場の非対称性から、粒子遠方場での速度の振舞いが正しく求まらず、粒子径のサイズの影響について導入することが必要であることを指摘した。
- 従来の平均化方程式を用いた分散性混相流解析法における致命的な問題点は、渦度や圧力の境界値問題として正しくないことにあることを指摘した。また、分散相と連続相を非圧縮性流体として扱う場合、気泡表面に圧力境界があると考えたときの圧力は、調和関数で記述されることを導出した。そして、渦度の気泡表面の境界条件に寄与する部分については圧力の境界条件と区別されることを示した。

- 上記の平均化方程式を用いた解析手法に対する問題点を解決するため、気泡の誘起する圧力と、気泡近傍の粘性応力と SGS 応力の影響をモデルに採り入れることによって、新しい分散性混相流の解析手法の構築を行った。本手法は、気泡周りの速度場や、圧力場について、球面調和関数/多項式展開によって構築されたデータベースを用いることで、少ない情報量によって気泡の後流や境界層厚さのレイノルズ数依存性などが反映されていることに特徴がある。そして、第3章で示された気泡群の直接数値シミュレーションと同じ条件において、平均化方程式を用いた数値解析を行い、気泡流のエネルギースペクトルを調べた。その結果、従来の平均化方程式を用いた気泡流の計算手法では、気泡流のエネルギースペクトルが極めて過小評価されるのに対し、本計算手法を用いることによって大きく改善されることが示され、本モデルの有効性が示唆された。

## 謝辞

本研究を遂行するに当たり、非常に熱心な御指導を頂いた東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻の松本洋一郎教授には、深く感謝の意を表します。松本教授には、研究室に所属した4年生のとき以来、実に6年もの間、お世話になり、最高の研究環境を与えて頂きました。重ねて深い感謝の意を表します。

東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻の高木周講師には、終始温かく御指導ならびに公私にわたる御激励を頂きました。特に、研究に息詰まった際に、本論文を完成させる上で重要なアイデアを頂き大変感謝しております。高木周講師の研究に対する熱い姿勢を見習っていきたくと思います。

本論文の審査をして頂いた、東京大学国際産学共同研究センターの小林敏雄教授、東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻の笹木伸英教授、東京大学生産技術研究所第2部の谷口伸行助教授には、有益な御助言を頂きました。ここに、お礼申し上げます。

東京大学インテリジェントモデリングラボラトリーの田村義昭助教授には、数値計算の方法についてわかりやすく丁寧に教えて頂きました。ここに、お礼申し上げます。

本研究室の市川保正助手、青木功助手には、物品購入や研究室の管理を通じて、様々な面でお世話になりました。ここに、お礼申し上げます。現在、東京工業大学勤務の中別府修助助手には、研究会で多くのアドバイスを頂きました。ここに、お礼申し上げます。

現在、森北出版勤務の森北博巳氏には、日々の討論からたくさんのお有意義な知見を得ることができました。ここに、お礼申し上げます。氏の実験精度に対するこだわりには感銘を受けました。

東京大学大学院工学系研究科の竹村文男助教授には、研究に対し多くのアドバイスを頂きました。特に、気泡流の工学的な背景を丁寧に説明して頂き、本研究を進める上で、明確な目的意識を持つことができました。ここに、お礼申し上げます。

東京大学生産技術研究所の大島まり助教授には、混相流の研究会を通じて、さまざまな議論をさせて頂く機会に恵まれ、貴重な御意見を頂きました。ここに、お礼申し上げます。

現在、福井大学工学部機械工学科の村井祐一助手には、気泡流の計算手法について多大な助言を頂きました。ここに、お礼申し上げます。また、私が4年生の研究室配属の際

に松本研究室を希望したのは、当時博士課程に在籍されていた氏の熱心な説明のおかげです。福井大学大学院博士課程在学中の北川石英氏には、気泡流の数値計算手法について貴重な意見を頂き、感謝しています。

現大阪大学工学部勤務の芝原正彦助手、現東北大学流体研究所勤務の徳増崇助手、スタンフォード大学留学中の山西伸宏氏、現カルフォルニア工科大学在籍中の市原美恵氏には研究室生活で大変お世話になりました。ここに、お礼申し上げます。優秀な先輩達に囲まれていたために、良い刺激を受けることができました。本当に恵まれていたと思います。

博士課程在学中の坪井伸幸氏には、研究について様々なアドバイスを頂きました。また、氏のおかげで活気のある研究生生活を送ることができました。ここに、お礼申し上げます。

現在石川島播磨重工勤務の土屋直木氏には、キャビテーションの数値計算について貴重な意見を頂きました。ここに、お礼申し上げます。

4年生のときから修士課程まで一緒だった現在 SONY 勤務の沢尾貴史氏には、研究面でのよきライバルとして、刺激を受けました。また、氏のおかげで楽しい研究生生活を過ごすことができました。ここに、お礼申し上げます。

東京大学大学院博士課程に在学中の崎山幸紀君、蘇秀賢君、ラーヌワック・ブーンチャイ君、同修士課程に在学中の牧野雅互君、野呂孝君、杉江壯志君、山口浩樹君には大変お世話になり、安泰な研究生生活を送ることができました。以上の皆さんに感謝の意を表します。また、現松本教授秘書の五十川順子さんには、円滑な研究生生活を送る上でお世話になり、感謝いたします。

本論文を完成する上で、研究以外でも、多くの方々に支えられました。特に、私の10年にわたる大学生活を遠方から支えてくれた両親には感謝します。

最後に、加藤真弓さんには、研究生生活を過ごす上で心のよりどころとして支えて頂きました。いつも身勝手な私を温かく見守って頂き、深く感謝しております。

## 参考文献

1. Auton, T.R., 1987, 'The lift force on a spherical body in a rotational flow', *J. Fluid Mech.*, **183**, 199-218.
2. Bardina, J., Ferziger, J.H. and Reynolds, W.C., 1983, Report No. TF-19, Stanford Univ.
3. Batchelor, G.K., 1967, '*An Introduction to Fluid Dynamics*', (Cambridge University Press, Cambridge).
4. Biesheuvel, A. and van Wijngaarden, L., 1984, *J. Fluid. Mech.*, Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid, **148**, 301-318.
5. Brady, J.F. and Bossis, G., 1988, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Stokesian Dynamics, **20**, 111-157.
6. Chandrasekhar, S., 1961, '*Hydrodynamic and hydromagnetic stability*', (Oxford University Press).
7. Cherukat, P., McLaughlin, J.B. and Graham, L., 1994, *Int. J. Multiphase Flow*, The Internal Lift on a Rigid Sphere Translating in a Linear Shear Flow Field, **20**, 339-353.
8. Chung, W.J.N., Troutt, T.R. and Crowe, C.T., 1998, *J. Fluid Mech.*, Direct numerical simulation of a three-dimensional temporal mixing layer with particle dispersion, **358**, 61-85.
9. Clift, R., Grace, J.R. and Weber, W.E., 1978, '*Bubbles, droplets, and particles*', (Academic Press).
10. Crowe, C.T., Sharma, M.P. and Stock, D.E., 1977, *Trans. ASME J. Fluids Eng.*, The particle-source-in cell (PSI-CELL) model for gas-droplet flows, . .

11. Crowe, C.T., Troutt, T.R. and Chung, J.N., 1996, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Numerical models for two-phase turbulent flows, **28**, 11-43.
12. Cuenot, B., Magnaudet, J. and Spennato, B., 1997, *J. Fluid Mech.*, The effects of slightly soluble surfactants on the flow around a spherical bubble, **339**, 25-33.
13. 土井 康明, 茂里 一紘, 堀田 多喜男. 1991. 日本造船学会論文集, 微小気泡による摩擦抵抗の軽減, **170**, 55-63.
14. Drew, D.A., 1983, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Mathematical modeling of two-phase flow, **15**, 261-291.
15. Druzhinin, O.A. and Elghobashi, S., 1998, *Phys. Fluids*, Direct numerical simulations of bubble-laden turbulent flows using the two-fluid formulation, **10**, 685-697.
16. Eaton, J.K. and Fessler, J.R., 1994, *Int.J. Multiphase Flow*, Preferential concentration of particles by turbulence, **20**, 169-209.
17. Elghobashi, S.E. and Abou-Arab, T.W., 1983, *Phys. Fluids*, A two-equation turbulence model for two-phase flows, **26**, 931.
18. Elghobashi, S. and Truesdell, G.C., 1992, *J. Fluid Mech.*, Direct simulation of particle dispersion in a decaying isotropic turbulence, **242**, 655-700.
19. Elghobashi, S. and Truesdell, G.C., 1993, *Phys. Fluids*, On the two-way interaction between homogeneous turbulence and dispersed solid particles. I: Turbulence modification, **A5**, 1790-1801.
20. Elghobashi, S.E., 1994, *Appl. Sci. Res.*, On predicting particle-laden turbulent flows, **52**, 309.
21. Esmaeli, A. and Tryggvason, G., 1996, *J. Fluid. Mech.*, An inverse energy cascade in two-dimensional low Reynolds number bubbly flows, **314**, 315-330.
22. Esmaeli, A. and Tryggvason, G., 1998, *J. Fluid. Mech.*, Direct numerical simulations of bubbly flows. Part 1. Low Reynolds number arrays, **377**, 313-345.
23. Esmaeli, A. and Tryggvason, G., 1998, *J. Fluid. Mech.*, Direct numerical simulations of bubbly flows. Part 1. Low Reynolds number arrays, **377**, 313-345.

24. Esmaceli, A. and Tryggvason, G., 1999, *J. Fluid. Mech.*, Direct numerical simulations of bubbly flows. Part 2. Moderate Reynolds number arrays, **385**, 325-358.
25. Faxén, , 1922, *Annalen der Physik*, Der Widerstand gegen die Bewegung einer strengen Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen Ebenen Wänden eingeschlossen ist, **4**, 89-119.
26. Feng, J., Hu, H.H. and Joseph, D.D., 1994, *J. Fluid Mech.*, Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid Part 1. Sedimentation, **261**, 95-134.
27. Ferziger, J.H. and Peric, M., 1996, '*Computational Methods for Fluid Dynamics*', (Springer).
28. Fessler, J.R., Kulick, J.D. and Eaton, J.K., 1994, *Phys. Fluids*, Preferential concentration of heavy particles in a turbulent channel flow, **6**, 3742-3749.
29. Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W.H., 1991, *Phys. Fluids*, A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, **A3**, 1760-1765.
30. Gore, R.A. and Crowe, C.T., 1989, *Int. J. Multiphase Flow*, Effect of particle size on modulating turbulent intensity, **15-2**, 279-285.
31. Harlow, F.H. and Welch, J.E., 1965, *Phys. Fluids*, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surfaces, **8**, 2182-2189.
32. Hetsroni, G., 1989, *Int. J. Multiphase Flow*, Particle-turbulence interaction, **15-5**, 735-746.
33. Hetsroni, G. and Sokolov, M., 1971, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, Distribution of mass, velocity and intensity of turbulence in a two-phase turbulent jet, **38**, 315-327.
34. Hirt, C.W. and Nichols, B.D., 1981, *J. Comp. Phys.*, Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, **39**, 201-226.
35. 日夏 宗彦, 1995, 第 66 回船舶技術研究所発表会講演集, Large Eddy Simulation (LES) によるチャネル内の微小気泡流れの数値シミュレーション, , 123-126.
36. Hinze, J.O., 1975 '*Turbulence*', New York, McGraw-Hill.

37. Hu, H.H., 1996, *Int. J. Multiphase Flow*, Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures, **22**, 335-352.
38. Ikohagi, T., Yasui, M. and Oba, R., 1994, *Proc. 2nd Int. Symp. Cavitation Tokyo*, Numerical Simulation of Cavitation Jet Flows, , 83.
39. Ishii, M. and Zuber, N., 1979, *AIChE J.*, Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows, **25**, 843-855.
40. Johnson, A.A. and Tezduyar, T.E., 1999, *Comput. Mech.*, Advanced mesh generation and update methods for 3D flow simulations, **23**, 130-143.
41. Kaftori, D., Hetsroni, G. and Banerjee, S., 1994, *Phys. Fluids*, Funnel-shaped vortical structures in wall turbulence, **A6**, 3035-3050.
42. Kanai, A., 1998, 'A marker-density-function approach for the direct numerical simulation of bubble flows', (東京大学博士論文).
43. 仮屋崎 侃, 1987, 日本機械学会論文集 B, 流体の一様せん断流れ場中の孤立気泡の挙動, **53-487**, 744-749.
44. Kataoka, I. and Serizawa, A., 1989, *J. Int. Multiphase Flow*, basic equations of turbulence in gas-liquid two-phase flow, **5**, 843-855.
45. Kenning, V.M. and Crowe, C.T., 1997, *Int. J. Multiphase Flow*, On the effect of particles on carrier phase turbulence in gas-particle flows, **23 N2**, 403-408.
46. Kim, I., Elghobashi, S. and Sirignano, W.A., 1998, *J. Fluid Mech.*, On the equation for spherical-particle motion: effect of Reynolds and acceleration number, **367**, 221-253.
47. Kim, J., Moin, P. and Moser, R., 1987, *J. Fluid Mech.*, Turbulent statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, **177**, 133-166.
48. Komori, S. and Kurose, R., 1996, *Advances in Turbulence (S.Gavrillakis et al. eds.)*, The effects of shear and spin on particle lift and drag in a shear flow at high Reynolds numbers, **VI**, 551-554.
49. Krämer, M. and Leuckel, W., 1988, *Lisbo LDA Symp. (Lisbon, Portugal)*, Experimental and theoretical investigations on the behavior of solid particle motion in turbulent gaseous flows.

50. Kulick, J.D., Fessler, J.R. and Eaton, J.K., 1994, *J. Fluid Mech.*, Particle response to a turbulence modification in fully developed channel flow, **277**, 109-134.
51. Lamb, H., 1932, '*Hydrodynamics*', (Cambridge University Press).
52. Lance, M. and Bataille, J.M., 1991, *J. Fluid Mech.*, Turbulence in the liquid phase of a uniform bubbly air-water flow, **222**, 95-118.
53. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., 1959, '*Course of Theoretical Physics. Vol. 6: Fluid Mechanics*', (Pergamon Press).
54. Leal, L.G., 1992, '*Laminar flow and convective transport processes*', (Butterworth-Heinemann).
55. Lee, S.L. and Durst, F., 1982, *Int. J. Multiphase Flow*, **8**, 125.
56. Legendre, D., and Magnaudet, J., 1997, *Phys. Fluids*, A note on the lift force on a spherical bubble or drop in a low-Reynolds-number shear flow, **9**, 3572-3574.
57. Legendre, D., and Magnaudet, J., 1998, *J. Fluid Mech.*, The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow, **368**, 81-126.
58. Legendre, D. and Magnaudet, J., 1998, *Proc. of 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June*, Interaction between two spherical bubbles rising side by side, (CD-ROM).
59. Levich, B.V., 1949, *Zh. Eksp. Theoret. Fiz.*, Bubble motion at high Reynolds numbers, **19**, 18-24.
60. Liles, D. et al., 1984, *NUREG/CP-3858 LA-10157-MS. TRAC-PF I/MOD1, An Advances Best Estimate Computer Program for Pressurized Water Reactor Thermal-Hydraulic Analysis*, . . .
61. Lilly, D.K., 1992, *Phys. Fluids*, A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method, **A4**, 633-635.
62. Liu, S., Meneveau, C. and Katz, J., 1994, *J. Fluid Mech.*, On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurement in a turbulent jet, **275**, 83-119.
63. Loewenberg, M. and Hinch, E.J., 1996, *J. Fluid Mech.*, Numerical simulation of a concentrated emulsion in a shear flow, **321**, 395-419.

64. Longmire, E.K. and Eaton, J.K. 1989, *Proc. of the Korea-U.S. Fluids Engineering Seminar* (edited by Kim, J. Korea Institute of technology, Taejon, Korea, 1989), 435-454.
65. Lopez De Berrodano, M., Lee, S.-J., Lahey Jr., R.T. and Drew, D.A., 1990, *Trans. ASME J. Fluids Eng.*, The prediction of two-phase turbulence and phase distribution phenomena using Reynolds stress model, **112**, 107-113.
66. Lopez De Berrodano, M., Lahey Jr., R.T. and Jones, O.C., 1994, *Int. J. Multiphase Flow*, Phase distribution in bubbly two-phase flow in vertical ducts, **20**, 805-818.
67. Madavan, N.K., Deutsch, S. and Merkle, C.L., 1984, *Phys. Fluids*, Reduction of turbulent skin friction by microbubbles, **27**, 356-363.
68. Madavan, N.K., Deutsch, S. and Merkle, C.L., 1985, *J. Fluid Mech.*, Measurements of local skin friction in a microbubble-modified turbulent boundary layer, **156**, 237.
69. Magnaudet, J.J.M., 1997, *Proc. of FEDSM '97*, The force acting on bubbles and rigid particles, FEDSM97-3522 (CD-ROM).
70. Maxey, M.R., 1987, *J. Fluid Mech.*, The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields, **174**, 441.
71. Maxey, M.R., 1987, *Phys. Fluids*, The motion of small spherical particles in a cellular flow field, **30**, 1915-1928.
72. Maxey, M.R. and Riley, J.J., 1983, *Phys Fluids*, equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow, **26**, 883-889.
73. McLaughlin, J.B., 1989, *Phys. Fluids*, Aerosol particle deposition in numerically simulated channel flow, **A1**, 1211-1224.
74. McLaughlin, J.B., 1991, *J. Fluid Mech.*, Inertial migration of a small sphere in linear shear flows, **224**, 261-274.
75. Mei, R., 1993, *Int. J. Multiphase Flow*, History force on a sphere due to a step change in the free-stream velocity, **19**, 509-525.
76. Mei, R. and Adrian, R.J., 1992, *J. Fluid Mech.*, Flow past a sphere with an oscillation in the free-stream velocity and unsteady drag at finite Reynolds number, **237**, 323-341.

77. Mei, R., Klausner, J.F. and Lawrence, C.J., 1994, *Phys. Fluids*, A note on the history force on a spherical bubble at finite Reynolds number, **6**, 418-420.
78. Mei, R., Lawrence, C.J. and Adrian, R.J., 1991, *J. Fluid Mech.*, Unsteady drag on a sphere at finite Reynolds number with small fluctuations in the free-stream velocity, **233**, 613-631.
79. Merkle, C.L. and Deutsch, S., 1989, *Prog. Astronautics and Aeronautics: Viscous Drag Reduction in Boundary Layers*, D.M. Bushnell and J.N. Hefner eds. AIAA, Drag reduction in liquid boundary layers by gas injection, **123**, 351-412.
80. Michaelides, E.E., 1997, *Trans. ASME J. Fluid Eng.*, Review- The transient equation of motion for particles, bubbles and droplets, **119**, 233-247.
81. Mizuya, T. and Kasagi, N., 1998, *Proc. of 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June*, Numerical analysis of particle motion in turbulent channel flow., (CD-ROM).
82. Moore, D.W., 1963, *J. Fluid Mech.*, The boundary layer on a spherical gas bubble, **16**, 161-176.
83. 森西 洋平, 1996, 日本機械学会論文集 B, 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性 (第2報, スタッガードおよびコロケート格子系の差分スキーム), **62-604**, 4098-4105.
84. 森北 博巳, 1999, 第3回東京大学 IML シンポジウム講演集, 気泡がチャネル乱流に及ぼす影響, . . .
85. 森口 繁一, 宇田川 カネ久, 一松 信, 1960, 「岩波数学公式 III. (特殊関数)」, (岩波書店).
86. 村井 祐一, 1996, 「気泡流の三次元微細流動構造の解明」(東京大学博士論文).
87. 二瓶 泰雄, 1999, 新しい計算手法に基づく混相乱流 LES の開発と複雑混相乱流解析への応用, (東京工業大学博士論文).
88. 日本原子力学会熱流動部会編, 1993, 「気液二相流の数値解析」, (朝倉書店).
89. 西川 秀次, 1987, 翼を過ぎる気泡流の数値解析に関する研究, (東京大学大学院博士論文).

90. Odar, F. and Hamilton, W., 1964, *J. Fluid Mech.*, Forces on a sphere accelerating in a viscous flow, **18**, 302-314.
91. Oseen, C.W., 1913, *Ark. Mat. Astron. Fysik*, Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel, **9**.
92. Pan, Y. and Banerjee, S., 1996, *Phys. Fluids*, Numerical simulation of particle interactions with wall turbulence, **8**, 2733-2755.
93. Pan, Y. and Banerjee, S., 1997, *Phys. Fluids*, Numerical investigation of the effects of large particles on wall-turbulence, **9**, 3786-3807.
94. Pedinotti, S., Mariotti, G. and Banerjee, S., 1992, *Int. J. Multiphase Flow*, Direct Numerical Simulation of particle behaviour in the wall region turbulent flows in horizontal channels, **18**, 927-941.
95. Peskin, C.S. and McQueen, M., 1989, *J. Comp. Phys.*, A three-dimensional computational for blood flow in the heart I. Immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid, **81**, 372-405.
96. Peskin, C.S. and McQueen, M., 1989, *J. Comp. Phys.*, A three-dimensional computational for blood flow in the heart II. Contactile fibers, **82**, 289-297.
97. Prosperetti, A., 1977, *Quarterly of Appl. Math.*, Viscous effects on perturbed spherical flows, 339-352.
98. Proudman, I. and Pearson, R.A., 1957, *J. Fluid Mech.*, Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder, **2**, 237-262.
99. Ransom, V.H. et al., 1986, *NUREG/CR-4312 EGG-2796*, RELAP/MOD2 Code Manual, Vol. 1, Code Structure, System Models, and Solution Method, , -
100. Rashidi, M., Hetsroni, G. and Banerjee, S., 1990, *Int. J. Multiphase Flow*, Particle-turbulence interaction in a boundary layer, **16**, 935-949.
101. Reeks, M.W., 1991, *Phys. Fluids*, On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows, **A3**, 446-456.
102. Rogers, C.B. and Eaton, J.K., 1991, *Phys. Fluids*, The effect of small particles on fluid turbulence in a flat-plate, turbulent boundary in air, **A3**, 928.

103. Rouson, D.W.I., Eaton, J.K. and Abrahamson, S.D., 1997, 'A direct numerical simulation of a particle-laden turbulent channel flow', Report No. TSD-101, Satford University.
104. Ruetsch, G.R. and Meiburg, E., 1994, *Phys. Fluids*, Two-way coupling in shear layers with dilute bubble concentrations, **A6**, 2656-2670.
105. Ryskin, G. and Leal, L.G., 1984, *J. Fluid Mech.*, Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 2. Buoyancy-driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid, **148**, 19-35.
106. Saffman, P.G., 1962, *J. Fluid Mech.*, On the stability of laminar flow of a dusty gas, **13**, 120.
107. Saffman, P.G., 1965, *J. Fluid Mech.*, The lift on a small sphere in a slow shear flow, **22**, 385-400, (Corrigendum, 1968, **31**, 624. ).
108. Sangani, A.S., Zhang, D.Z. and Prosperetti, A., 1991, *Phys. Fluids*, The added mass, Basset, and viscous drag coefficients nondilute bubbly liquids undergoing small-amplitude oscillatory motion, **A3**, 2955-2970.
109. Sangani, A.S. and Didwania, A.L., 1993, *J. Fluid Mech.*, Dynamic simulations of flows of bubbly liquids at large Reynolds numbers, **250**, 307-337.
110. 佐藤 洋平, 菱田 公一, 1996, 日本機械学会論文集 B, 固気二相矩形管内流の乱流構造 (第2報, 2スケール二相乱流モデル), **62-593**, 26-33.
111. Sato, Y., Fukuichi, U. and Hishida, K., 1999, *Proc. of FEDSM'99, 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference*, Effect of inter-particle spacing on turbulence modulation by Lagrangian PIV, (CD-ROM).
112. Schiller, L. and Naumann, A.Z., 1933, *Z. Vereines Deutscher Inge.*, Über die Grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung, **77**, 318.
113. Serizawa, A., Kataoka, I., and Michiyoshi, I., 1975, *Int. J. Multiphase Flow*, Turbulence structure of air-water bubbly flow. I. Measuring techniques, **2**, 211-233.
114. Serizawa, A., Kataoka, I., and Michiyoshi, I., 1975, *Int. J. Multiphase Flow*, Turbulence structure of air-water bubbly flow. II. Local properties, **2**, 235-246.

115. Serizawa, A., Kataoka, I., and Michiyoshi, I., 1975, *Int. J. Multiphase Flow*, Turbulence structure of air-water bubbly flow. III. Transport properties, **2**, 247-259.
116. Serizawa, A., Kataoka, I., Gofuku, A., Takahashi, O., and Kawara, Z., 1991, *Proc. of the Int. Conf. on Multiphase Flows '91-Tsukuba*, Effect of initial bubble size on bubbly flow structure, , 547-550.
117. Shida, Y., Kuwahara, K. and Takami, H., 1986, *Cavitation and Multiphase forum, ASME*, New Computational Method for a Flow of a Bubbly Liquid, , 46.
118. Smagorinsky, J., 1963, *Mon. Weather Rev.*, **91**, 99.  
Snyder, W.H. and Lumley, J.L., 1971, *J. Fluid Mech.*, Some measurements of particle velocity autocorrelation functions in a turbulent flow, **48**, 41. vspace0.0em
119. Sommerfeld, M., Kohnen, G. and Ruger, M., 1993, *9th Symp. on Turbulent Shear Flows (Kyoto, Japan)*, Some open questions and inconsistencies of Lagrangian particle dispersion models. , 15-1-1.
120. Sproull, W.T. 1961, *Nature*, **190**, 976.
121. Squires, K.D. and Eaton, J.K., 1990, *Phys. Fluids*, Particle response and turbulence modification in isotropic turbulence, **A2**, 1191-1203.
122. Squires, K.D. and Eaton, J.K., 1991, *Phys. Fluids*, Preferential concentration of particles by turbulence, **A3**, 1169-1178.
123. Squires, K.D. and Eaton, J.K., 1994, *Trans. ASME J. Fluids Eng.*, Effect of selective modification of turbulence on two-equation models for particle-laden turbulent flows, **116**, 778.
124. Sridhar, G. and Katz, J., 1995, *Phys. Fluids*, Drag and lift forces on microscopic bubbles entrained by a vortex, **7**, 389-399.
125. Stone, H.A., 1993, *Phys. Fluids*, An interpretation of the translation of drops and bubbles at high Reynolds numbers in terms of the vorticity field, **A5**, 2567-2569.
126. Sugiyama, K. and Matsumoto, Y., 1998, *Proc. of 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June* , Large Eddy Simulation of Bubbly Turbulent Channel Flow, (CD-ROM).

127. Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., 1994, *J. Comp. Phys.*, A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flows, **114**, 146-159.
128. 数值流体力学編集委員会編, 1995, 「燃焼・希薄流・混相流・電磁流体の解析」(東大出版会), .
129. Takagi, S. and Matsumoto, Y., 1995, *Proc. of The 2nd Int. Conf. on Multiphase Flow '95-Kyoto*, Three dimensional calculation of a rising bubble, **2**, PD2-9.
130. 高木 周, 松本 洋一郎, 1996, 日本混相流学会誌, 静止流体中を上昇する球形気泡に働く力, **10**, 264-273.
131. Takagi, S. and Matsumoto, Y., 1998, *Proc. of 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June*, Numerical study on the forces acting on a bubble and a particle. (CD-ROM).
132. 高橋 孝仁, 角川 明, 児玉 良明, 1997, 日本造船学会, マイクロバブルによる摩擦抵抗低減の流れ方向分布, **182**, .
133. 瀧口 智志, 梶島 岳夫, 三宅 裕, 1998, 日本機械学会論文集 B, 固体粒子と乱流の相互作用の数値計算法, **64-625**, .
134. Tang, L., Wen, F., Yang, Y., Crowe, C.T., Chung, J.N. and Troutt, T.R., 1992, *Phys. Fluids*, Self-organizing particle dispersion mechanism in free shear flows, **A4**, 2244-2251.
135. 谷口 伸行, 大島 まり, 坪倉 誠, 1997, 生産研究 (東京大学生産技術研究所内報) **49-1**, 11.
136. Taylor, G.I., 1921, *Proc. London Math. Soc.*, Diffusion by continuous movements, **20**, 196.
137. Taylor, G.I. 1923, *Philos. Mag.*, On the decay of vortices in a viscous fluid, **XLVI**, 671.
138. Tomiyama, A., Sou, A., Zun, I., Kanami, N. and Sakaguchi, T., 1995, *Proc. of The 2nd Int. Conf. on Multiphase Flow '95-Kyoto*, Effect of Eötvös number and dimensionless liquid volumetric flux on lateral motion of a bubble in a laminar duct flow, **2**, PDI-11.

139. Tritton, D.J. 1959, *J. Fluid Mech.*, Experiments on the flow past circular cylinder at low Reynolds number, **6**, 547-567.
140. 坪倉 誠 小林 敏雄 谷口 伸行. 1996, 日本機械学会論文集 B, 改良型 Dynamic sub-grid scale model のチャネル乱流による評価, **62-600**, 3015-3022.
141. Tsuji, Y. and Morikawa, Y., 1982, *J. Fluid Mech.*, LDV measurements of an air-solid two phase flow in a horizontal pipe, **120**, 385.
142. Tsuji, Y., Morikawa, Y. and Shiomi, H., 1984, *J. Fluid Mech.*, LDV measurements of air-solid two-phase flow in a vertical pipe, **139**, 417-434.
143. Tsuji, Y., Morikawa, Y., Tanaka, Y., Karimine, K. and Nishida, S., 1988, *Int. J. Multiphase Flow*, Measurement of an axisymmetric jet laden with coarse particles, **14**, 565-574.
144. Uijtewaal, W.S.J. and Oliemans, R.V.A., 1996, *Phys. Fluids*, Particle dispersion and deposition in direct numerical and large eddy simulations of vertical pipe flows, **8**, 2590-2604.
145. Unverdi, S.D. and Tryggvason, G., 1992, *J. Comp. Phys.*, A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows, **100**, 25-37.
146. Vames, J.S. and Hanratty, T.J., 1988, *Exp. Fluids*, Turbulent dispersion of droplets for air flow in a pipe, **6**, 94.
147. Vasseur, P. and Cox, R.G., 1977, *J. Fluid. Mech.*, The lateral migration of spherical particles sedimenting in a stagnant bounded fluid, **80**, 561-591.
148. Verlet, L., 1967, *Phys. Rev.*, Computer experiments on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones Molecules, **159**, 98.
149. Vreman, B., Geurts, B. and Kuerten, H., 1994, *Phys. Fluids*, On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model, **6**, 4057-4059.
150. Wang, L.-P. and Maxey, M.R., 1993, *Appl. Sci. Res.*, The motion of microbubbles in a forced isotropic and homogeneous turbulence, **51**, 291.
151. Wang, L.P. and Maxey, M.R., 1993, *J. Fluid Mech.*, Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence, **256**, 27-68.

152. Wang, Q., Squires, K.D., Chen, M. and McLaughlin, J.B., 1997, *Int. J. Multiphase Flow*, On the role of the lift force in turbulence simulation of particle deposition, **23** N4, 749-763.
153. 渡部 力, 名取 亮, 小国 力, 1989, 「Fortran による数値計算ソフトウェア」(丸善).
154. Wells, M.R. and Stock, D.E., 1983, *J. Fluid. Mech.*, The effects of crossing trajectories on the dispersion of particles in a turbulent flow, **136**, 31.
155. 山本 愛彦, 1999, 「単一上昇気泡の挙動に及ぼす不純物の影響」, (東京大学修士論文)
156. 山本 恭史, Matthias Pott Hoff, 田中 敏嗣, 梶島 岳夫, 辻 裕, 1999, 日本機械学会論文集 B, 固気二相チャンネルの LES(粒子間衝突の影響), **65-629**, 166-173.
157. Yang, C.Y. and Leal, L.G., 1991, *Phys. Fluids*, A note on memory-integral contributions to the force on an accelerating spherical drop at low Reynolds number, **3**, 1822-1823.
158. Yuan, Z. and Michaelides, E.E., 1992, *Int. J. Multiphase Flow*, Turbulence modulation in particle flows - a theoretical approach, **18-5**, 779-785.
159. Yuu, S. and Umekage, T., 1991, *ASME-FED*, **121**, 3.
160. 湯 晋一 梅景 俊彦 田淵 政治, 1994, 日本機械学会論文集 B, 三次元固気混相乱流自由噴流の Two-Way Method を用いた直接数値計算と実験による検証, **60-572**, 1152-1160.
161. Zhang, D.Z. and Prosperetti, A., 1994, *J. Fluid Mech.*, Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow, **267**, 185-219.
162. Zhou, H. and Pozrikidis, C., 1993, *J. Fluid Mech.*, The flow of ordered and random suspensions of two-dimensional drops in a channel, **255**, 103-127.
163. Zuber, N., 1964, *Chem. Eng. Sci.*, On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime, **19**, 897-917.

## Appendix A

### チャンネル乱流中の粒子運動の LES 解析と その問題点

#### A.1 はじめに

乱流状態にある気流中に小さい粒子が分散した固気混相乱流は、多くの工業プロセスで観察され、その流動構造の解明は工学的に重要である。そのため、様々な流れ場を対象とした研究が行われており、例えばチャンネル内や円管内の固気混相乱流を対象とした実験 (Vames & Hanratty, 1988; Fessler *et al.*, 1994; Kulick *et al.*, 1994) により、粒子の拡散、集積、平均速度分布、乱流の変調などについての知見が得られている。また、近年の計算機性能の大幅な向上に伴い、単相乱流の直接数値シミュレーション (DNS) を利用した二相流解析 (McLaughlin, 1989; Wang & Maxey, 1993; Pan & Banerjee, 1996; Rouson *et al.*, 1997) が行われ、実験では得ることが難しい有用なデータを得ることが可能となっている。ただし、DNS は莫大な計算機資源を必要とし、単純で低レイノルズ数の流れ場しか扱うことができないといった制約がある。そのため、エネルギーを保有する大規模渦をグリッドスケール (GS) で解像し、解像できないサブグリッドスケール (SGS) のついてはモデル化を行う Large Eddy Simulation (LES) による解析がより実用的なものとなる。チャンネル内の固気混相乱流を対象とした LES を用いた解析については、Wang & Squires (1996)、山本ら (1999) などが挙げられ、より現実的なレイノルズ数の下での有意義な結果が得られている。しかしながら、一様等方性乱流中で沈降する粒子の DNS を用いた数値解析 (Wang & Maxey, 1993) によると、粒子の運動はエネルギーを保有する大規模渦だけではなく、Kolmogorov の長さスケールに近いより小さな渦にも影響を受けることが指摘されている。このことは、粒子の運動が周囲流体の渦構造の長さスケールに強く依存することを表し、特に、LES で解像できていない SGS の構造が粒子運動に対して重要となりうることを示唆するものである。

LES の SGS モデルとして最も頻りに用いられているのは Smagorinsky モデル (Smagorinsky, 1963) であるが, そのモデル定数は DNS や実験結果と乱流統計量が整合するよう統計的な処理によって最適化が行われているため, 瞬時・局所の乱流構造の予測には適さないことが知られている. 近年, この問題を改善すべく, 流れ場に依存して動的にモデル定数が決定される Dynamic SGS モデル (Germano *et al.*, 1991) や, 瞬時・局所で DNS との相関の高い SGS 応力が得られるスケール相似則モデル (Bardina *et al.*, 1983) など, 様々な手法が提案されている. これらのモデルは, 数値安定性, 統計量の精度, 遷移予測可能性などに違いを有することが確認されているが, 局所的な渦のスケールや強さに大きく依存する粒子の乱流統計量 (Maxey, 1987; Wang & Maxey, 1993) は, Dynamic SGS モデルやスケール相似則モデルを利用することで, その精度が改善されるものと期待される. そこで, 本研究ではいくつかの SGS モデルをチャネル内の固気混相乱流の解析に適用し, DNS を用いた one-way coupling 法による固気混相乱流の計算結果 (Rouson *et al.*, 1997) との比較, 検討を行う. また, SGS から粒子への作用のうち, 粒子分散の効果を取り入れるために, 既存の Langevin Model (Sommerfeld *et al.*, 1993) による方法を LES に適用し, SGS の速度変動成分が粒子乱流統計量にどのような影響を与えるのか調べる.

## A.2 計算方法

### A.2.1 支配方程式

本節では解析に用いる支配方程式を示す. なお, ここで示されるすべての解析変数は壁面摩擦速度  $u_\tau$ , チャネル半幅  $\delta$ , 流体の密度  $\rho_f$  によって無次元化を行ったものである.

○連続の式:

$$\frac{\partial \bar{u}_{fi}}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{A.1})$$

○運動量方程式:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}_{fi}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_{fj} \bar{u}_{fj}}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{2}{Re_\tau} \bar{S}_{fij} - \tau_{fij} \right) + \delta_{ii}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ここで,  $u_i$  は速度,  $p$  は圧力,  $t$  は時間,  $x_i$  は座標, 添字  $f$  は流体,  $\bar{\cdot}$  はグリッドフィルタ操作を表す. また,  $S_{ij} (= (\partial \bar{u}_j / \partial x_i + \partial \bar{u}_i / \partial x_j) / 2)$  はひずみ速度テンソル,  $\tau_{ij} (= \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j)$  は SGS 応力テンソルである.

粒子運動方程式:

$$\frac{du_{pj}}{dt} = \frac{\bar{u}_{fj} - u_{pj}}{\tau_p} + y\delta_{j1}. \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{dx_{pj}}{dt} = u_{pj} \quad (\text{A.4})$$

ここで、添字  $p$  は粒子を表す。式 (A.3) では、媒質密度に比べて粒子密度は十分に重く、粒子径は Kolmogorov の長さスケールに比べて十分に小さいといった条件の下、(i) Maxey & Riley が導出した粒子運動方程式<sup>(12)</sup>による定式化を行い、(ii) Faxén 項を無視し、(iii) 支配的な慣性力項、重力項、定常抗力項のみによる簡略化を行った。また、式 (A.3) 中の粒子の緩和時間  $\tau_p$  は

$$\tau_p = \frac{4\rho_p d_p^2}{3\rho_f C_D \nu_f Re_p} \quad (\text{A.5})$$

である。ここで、 $C_D$  と  $Re_p$  はそれぞれ抗力係数と粒子レイノルズ数 ( $=2r_p|u_p - u_f|/\nu_f$ ) である。 $C_D$  として、以下の実験式 (Schiller & Naumann, 1933) を用いた。

$$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}). \quad (\text{A.6})$$

## A.2.2 LES の SGS モデル

渦粘性の仮定によると式 (A.2) 中の SGS 応力テンソル  $\tau_{ij}$  は以下のように近似される。

$$\tau_{fij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{fkk} = -2C\Delta^2|\bar{S}_f|\bar{S}_{fij}. \quad (\text{A.7})$$

Smagorinsky Model (Smagorinsky, 1963) (以下 SM) の場合、スマゴリンスキー定数 ( $C_s = 0.1$ ) と van Driest 型の壁面減衰関数 ( $f_w = 1 - \exp(-y^+/25)$ ) により、式 (A.7) のモデル定数  $C$  は、 $C = (C_s f_w)^2$  として与えられる。

SGS 応力を流れ場の解を基に動的に算出する Dynamic SGS Model (Germano *et al.*, 1991) (以下 DSM) では GS 成分と、より大きな長さスケールのフィルタ操作によって得られる Test Scale (TS) 成分で記述される SGS 応力の構成方程式によってモデル定数が算出される。本研究では、Lilly (1996) の最小二乗法を用いた手法により、式 (A.7) の  $C$  を求める。

スケール相似則モデル (Bardina *et al.*, 1983) によって得られる SGS 応力モデルは実際の瞬時・局所の SGS 応力と高い相関を有することが知られている。渦粘性モデルとを合わせた、Mixed SGS Model<sup>(17)(18)</sup>によると、SGS 応力は

$$\begin{aligned} \tau_{fij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{fkk} &= (\bar{u}_{fj}\bar{u}_{fj} - \bar{u}_{fi}\bar{u}_{fj}) \\ &- \frac{1}{3}\delta_{ij}(\bar{u}_{fk}\bar{u}_{fk} - \bar{u}_{fk}\bar{u}_{fk}) \\ &- 2C\Delta^2|\bar{S}_f|\bar{S}_{fij}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

と書き表される。本研究では、Dynamic Mixed SGS Model(以下 DMSM) の Vreman *et al.* (1994) の手法に従い、式 (A.8) 中のモデル定数  $C$  を、以下の式 (A.9)~(A.12) の関係によって動的に求める。

$$C = \frac{\langle (L_{fij} - H_{fij}) M_{fij} \rangle}{2\Delta^2 \langle M_{fij} M_{fij} \rangle}, \quad (\text{A.9})$$

$$L_{fij} = \overline{u_{fi} \overline{u_{fj}}_i} - \overline{u_{fi} \overline{u_{fj}}_i}, \quad (\text{A.10})$$

$$H_{fij} = \langle \overline{u_{fi} \overline{u_{fj}}_i} - \overline{u_{fi} \overline{u_{fj}}_i} \rangle - \langle \overline{u_{fj} \overline{u_{fi}}_j} - \overline{u_{fj} \overline{u_{fi}}_j} \rangle \quad (\text{A.11})$$

$$M_{fij} = \left( \frac{\Delta r}{\Delta} \right)^2 \langle \overline{S_j} \overline{S_{fij}} - \overline{S_j} \overline{S_{fij}} \rangle. \quad (\text{A.12})$$

ここで、 $\overline{(\cdot)}$  は TS フィルタ操作、 $\langle \cdot \rangle$  は負粘性による計算不安定を回避するための統計的に等方な方向に対する平均化操作である。また、テストフィルタとグリッドフィルタの比  $(\Delta r/\Delta)$  は、2 とした。

### A.2.3 SGS から粒子分散への影響

式 (A.13) の粒子運動方程式では流体速度は GS 成分のみで記述されており、媒質の SGS から粒子への運動エネルギー輸送がカットオフされている。本研究では、SGS の流体運動を拡散的であるとみなし、Markov 性を仮定した Langevin Model (Sommerfeld *et al.*, 1993) によって SGS の流体運動から粒子運動への寄与の 1 つである「粒子分散」の評価を行う。このモデルでは、LES で算出される渦粘性係数などを用いて流体粒子の拡散理論 (Taylor, 1921) と整合するように SGS の流体の拡散運動を確率的に計算し、粒子運動の不規則応答理論 (Hinze, 1975) に基づいて「粒子分散」が求められる。速度の SGS 変動成分を  $u'$  と記述すると、時間に関して離散化された Langevin 方程式は以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} & \{u'_{fi}(t + \Delta t)|_{wp}\} \\ &= R_L(\Delta t) R_{Eij}(\Delta r) \{u'_{fj}(t)|_{wp}\} \\ & \quad + \sigma(\sqrt{u'^2_{fj}}) \sqrt{1 - \{R_L(\Delta t) R_{Eij}(\Delta r)\}^2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

ここで、 $\sigma(u_{rms})$  は rms 値が  $u_{rms}$ 、平均値が 0 の白色の外乱、 $\Delta r$  は  $\Delta t$  の間に粒子と流体が離れる距離である。また、 $R_L(\Delta t)$  は、 $u'_f$  についてのラグランジュ時間相関係数、 $R_E(\Delta r)$  オイラー空間相関テンソルであり、それぞれ、以下のように近似する。

$$R_L(\tau) \sim \exp\left(-\frac{\tau}{T_L}\right) \quad (\text{A.14})$$

$$R_{Eij}(r) \sim (f(r) - g(r)) \frac{x_i x_j}{r^2} + g(r) \delta_{ij} \quad (\text{A.15})$$

ここで,  $f, g$  はそれぞれ縦相関, 横相関係数を表す. 粒子速度の変動成分は式 (A.13) の速度の擾動成分を線形化することによって以下のように記述される.

$$\frac{du'_{pi}}{dt} = \frac{u'_{ji} - u'_{pi}}{\tau_p} \quad (\text{A.16})$$

本研究では, Sommerfeld *et al.* (1993) と同様に渦の life time を  $T_L = 0.3k/\epsilon$  とする. また,  $\overline{u'_{ij}}$  や  $k$  の評価はスケール相似則 (Bardina *et al.*, 1983) を利用し,  $\epsilon$  の評価は渦粘性モデルを用いる.

#### A.2.4 計算手法

解析対象は平行平板間の 2次元チャネル乱流場である. 解析領域は主流方向 ( $x$ ) × 壁面方向 ( $y$ ) × スパン方向 ( $z$ ) を  $2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$  とした. 格子点数は  $x, y, z$  方向に対してそれぞれ 32, 64, 32 とした.  $y$  方向の格子は壁面近傍で密にとり, 格子の最小幅は, チャネル半幅に対して  $1.10 \times 10^{-2}$  倍とした. フィルタ操作は  $x, z$  方向に対して行い, 4次精度の差分表現 (谷口ら, 1997) によって近似した. 連続相の方程式は有限差分法で解き, アルゴリズムには SMAC 法を用いた. また, 時間の離散化は 2 次の Adams - Bashforth 法, 空間の離散化は 2 次精度中心差分によって近似した. LES によって得られる乱流統計量の予測精度は, 空間の差分精度をより高次のものにすれば向上することが期待できるが, SGS モデルの統計量に対する性質の評価は可能であると考えられる. 粒子位置への流体側の物理量の内挿は 3 次のスプライン補間法により, 64 点を用いて行った. 粒子運動について, 速度の算出 (式 (A.3)) には 2 次の Adams-Bashforth 法, 粒子位置の算出 (式 (A.4)) には Verlet 法 (Verlet, 1967) を用いた. 本研究では簡単のため, 粒子同士の衝突については無視し, 壁面に到達した粒子は完全弾性衝突するものとして扱った. 流体側の初期条件として, 単相流の LES 計算で十分に発達した状態を与えた. また, 粒子初期速度は液相速度を粒子位置に内挿して与えた. 時間ステップは  $5 \times 10^{-4}\delta/u_\tau$  で与え, 無次元時間で  $10\delta/u_\tau$  計算した後, 無次元時間で  $5\delta/u_\tau$  の間, 統計量のサンプリングを行った.

## A.3 計算結果と考察

### A.3.1 単相流での計算結果

本節では LES の各種 SGS モデルによる計算結果の妥当性を示すために、Kim-Moin-Moser (1987) (以下、K.M.M.) のチャンネル内乱流の DNS と同条件の計算によって得られた乱流統計量を比較し、従来より指摘されてきた SGS モデルの特徴の再現性について調べる。計算条件は壁面レイノルズ数 ( $Re_\tau=$ )180 である。SM, DSM, DMSM によって計算された平均流速分布を図 A-1、乱流強度の流れ方向成分と垂直方向成分とを図 A-2 に示す。

図 A-1, A-2 に示されるように、SM の乱流統計量の方が、DSM よりも、DNS の結果に近いことがわかる。これは、DSM では瞬時・局所の流れ場の状態を基にモデル定数を動的に決定してしているのに対し、SM では流れ場に応じて、乱流統計量が合うように予め最適化されたモデル定数が用いられているためである。図 A-1 の平均流速分布に関し、渦粘性近似の SM や DSM の結果は  $y^+ < 10$  での流速分布や  $y^+ = 100$  付近の速度勾配について DNS とよく一致しているが、 $y^+ > 20$  ではやや過大評価していることがわかる。それに対して、DSM にスケール相似則モデルがカップリングされている DMSM では、全体的に DNS の結果と良く一致することが示されている。このような傾向は、坪倉ら (1996) が行った LES の計算結果と同様のものであり、LES としての本計算法の妥当性が示されている。図 A-2(a) の乱流強度の流れ方向成分については、LES の計算結果が DNS よりも過大評価であり、また、DSM, SM, DMSM の順で DNS との差が小さくなるといった傾向がある。また乱流強度の壁面垂直方向成分 (図 A-2(b)) は、LES の計算結果が DNS よりも過小評価であり、DSM と DNS との差が最も大きい。これらの傾向も従来から指摘されている LES の特徴 (坪倉ら, 1996) を表すものであり、本計算結果の妥当性を示している。

### A.3.2 壁面乱流場における粒子の挙動

本節では、前節で示された乱流統計量の SGS モデルに対する依存性が粒子の乱流統計量にどのような影響を及ぼすのかについて検討を行うため、DNS を用いて計算された固気二相流の解析結果との比較を行う。比較に用いた DNS のデータは Rousson-Eaton-Abrahamson (1997) (以下 R.E.A.) の one-way coupling 法によるものである。計算条件については壁面レイノルズ数  $Re_\tau=180$ 、また粒子の種類は Lycopodium, Glass, Copper である。粒子の条件は表 A-1 のように示される。ここで、表 A-1 中のパラメータ  $T_p$  (粒子緩和時間) は周囲流体の運動に対する追従性の指標であり、 $T_p = (d_p^2 \rho_p) / (18 \nu \rho_f)$  と表される。統計量算出には LES における計算グリッドを検査体積として、壁面に平行な層における粒子についてアンサンブル平均を行った。本節では、式 (A.13)~(A.16) で示した SGS から

粒子への影響のモデルは導入せず、この影響については次節で議論する。

Table A-1. Simulation conditions

|            | $d_p/\delta$ | $T_p$ |
|------------|--------------|-------|
| Lycopodium | 0.00139      | 0.048 |
| Glass      | 0.00277      | 0.65  |
| Copper     | 0.00388      | 4.50  |

図 A-3 は、粒子平均速度の分布である。乱流場中の粒子は、重力の作用が同じであっても、乱流渦が粒子に作用することにより、上昇・下降速度が変わってくるのが知られている (Maxey, 1987; Wang & Maxey, 1993)。図 A-3 において、粒子と流体との相対速度が一定にならないのはこのためである。また、 $T_p$  が大きいほど壁面近くの粒子速度が大きくなるといった DNS の結果が、LES で概ね良好に再現されていることが図 A-3 よりわかる。

$T_p$  が最も小さな Lycopodium の場合、粒子周りの流体の加速に対する応答時間が短く、流体運動によく追従するため、粒子平均速度は流体平均速度とほぼ似た分布になることが図 A-3(a) よりわかる。ただし、 $y^+ < 20$  の領域では DNS の Lycopodium の平均速度が流体速度に比べて低くなっているのに対し、LES では、いずれの場合もこの傾向は顕著に現れていない。DNS のこの傾向は、R.E.A. によると、粒子が壁面近くの非等方的な流れ場である低速ストリークに集積することによって起こされると説明されている。この知見に基づくと、粒子の集積はストリークの構造の影響を受けると考えられ、壁面付近での局所的な渦の長さスケールに左右されるものと考えられる。そこで、局所的な渦の長さスケールと関連がある二点相関係数を調べ、LES と DNS との比較によって、どの長さスケールが粒子運動に強い影響を与えるのかを考察する。図 A-4(a) は壁面近傍に存在するストリーク構造の長さの指標とされている  $x$  方向の縦相関係数分布 ( $R_{uu}(x)$ ) について、DNS では  $y/\delta=0.030$ 、LES では  $y/\delta=0.029$  における値を示す。図 A-4(a) より、2点間の距離が最大の場合 ( $x=\pi$ ) の  $R_{uu}(x)$  について、DNS では 0.04 以下と小さく、十分な流れ方向の計算領域があるものと期待されるが、LES では十分に減衰していない、これは、LES の格子解像度が低いため、渦の細分化に伴う乱れの等方化が不十分となり、実際よりも流れの非等方性強くなってしまふことに起因すると考えられる。一方、2点間の距離が短い場合 ( $x/\delta < 1$ ) の  $R_{uu}(x)$  については、スケール相似則が導入されていない SGS モデル (SM, DSM) と比較し、DMSM と DNS との相関係数分布がよく一致しているのがわかる。これに対し、図 A-3(a) に示される  $y^+=10$  付近の LES の粒子速度分布は SGS モデルに対する依存性が小さく、DNS の分布とは異なっているのがわかる。従って、 $R_{uu}(x)$  で評価されるストリーク構造の長さは、粒子速度の低下をもたらす機構に対し関連が小さいと考えられる。図 A-4(b) は低速・高速ストリークの幅の指標とされる  $x$  方向速度の  $z$  方向に対する横相関係数分布 ( $R_{uu}(z)$ ) について、DNS では  $y/\delta=0.058$ 、LES では  $y/\delta=0.055$  にお

る値を示す。図 A-4(b) より、各 SGS モデルの相関係数分布は  $z/\delta < 0.30$  の範囲で DNS の結果とは異なる傾向を示しているのがわかる。このことは、図 A-3(a) で示された粒子速度分布が DNS と LES とで定性的に異なることと符合している。従って、粒子速度が流体速度よりも低くなる DNS の傾向 (図 A-3(a)) は、ストリーク構造の幅と関連があると考えられる。また、ストリーク構造の幅は  $R_{uu}(z)$  が最小値をとる  $z$  の 2 倍程度であるとされるが、LES では空間解像度が低いために DNS のような  $R_{uu}(z)$  の極小点は持っておらず (図 A-4(b))、ストリーク構造の幅が GS 成分だけでは明確に捉えられていないことがわかる。

以上の議論により、DNS の場合に壁面付近における Lycopodium の粒子平均速度が流体平均速度よりも低くなるのは、粒子運動が局所的な渦の長さスケールに影響を受け、特に  $z$  方向の空間解像度が重要であることが示唆された。そこで、 $z$  方向のみの格子点数 ( $n_z$ ) を 2 倍 (64 点) にして DMSM による計算を行い、粒子速度に対するスパン方向の格子解像度の影響を調べる。この場合、 $z$  方向のみについては DNS 並の空間解像度を有し、LES としては非現実的な細分化である。図 A-5 はストリークの幅の指標とされる  $x$  方向速度の  $z$  方向に対する横相関係数分布 ( $R_{uu}(z)$ ) を示す。図 A-5 より、 $z$  方向の格子点数が少ない場合 ( $n_z=32$ ) の  $R_{uu}(z)$  の分布は定性的に DNS と傾向が異なっているのに対して、 $z$  方向の格子点数が多い場合 ( $n_z=64$ ) の  $R_{uu}(z)$  の分布は DNS の結果に近いことがわかる。また、 $z$  方向の格子点数が多い場合は DNS と同様に  $R_{uu}(z)$  の極小点を有しており、ストリーク構造の幅が明確に捉えられることを表している。図 A-6 は壁面近傍 ( $y^+ < 20$ ) における Lycopodium の粒子平均速度分布である。この図より、ストリーク構造の幅が明確に捉えられている  $z$  方向の格子点数が多い場合 ( $n_z=64$ ) の方が DNS の結果に近いことがわかる。従って、壁面付近における Lycopodium 粒子の運動は図 A-3(a) で示された現実的な LES の格子点数 ( $n_z=32$ ) で解像されていない SGS 成分の構造、特に  $z$  方向のストリーク構造に強い影響を受けると言える。

次に、図 A-3(b) より粒子緩和時間が中間である Glass の平均速度に関して、DNS と LES との結果は殆んど違わないことがわかる。一方、壁面付近  $y^+ < 10$  での流体の乱流統計量について、図 A-1 に示された流速分布に対しては LES と DNS の差が小さく、図 A-3(a)(b) に示された乱流強度に対してはその差は大きくなっている。粒子の沈降速度は、一様等方性乱流の DNS 結果 (Wang & Maxey, 1993) から示唆されるように、粒子周りの流体速度や乱流強度に影響を受けるが、図 A-3(b) の結果より、DNS と LES の SGS モデルによる相違は小さく、流体の平均速度分布が大きな影響を与えていると考えられる。つまり、 $T_p$  が大きい場合、高速のチャネル中央部から低速の壁面付近へと移動する粒子は、周囲の流体運動に対する時間遅れによって十分に減速しないため、壁面付近での粒子・流体間の相対速度が大きくなる。Copper については、Glass よりも粒子の緩和時間が大きく、上述した影響がより強くなるため、粒子速度分布が全体的に平坦化していることが図

A-3(c) からわかる。DNS と LES を比較すると、粒子速度分布の平坦化の傾向は DNS の方が強い。また、SGS モデルの違いによる有為な差は図 A-3(c) からは見受けられない。乱流渦中を沈降する粒子は、流れが等方的である場合、高速な領域を選択的に通過することによって静止流体中よりも沈降速度が増え、特に乱れの速度スケールと粒子の沈降速度が同程度のときにこの傾向が顕著となることが知られている (Maxey, 1987) Copper は、図 A-4(a)(b) と図 A-3(c) より乱れが概ね等方的であるとみなせるチャネル中央付近における流体の乱流強度と粒子=流体間の相対速度とがおおよそ 1 程度と同程度であることから、高速領域を選択的に通過すると考えられる。図 A-3(c) で見られる DNS と LES との粒子平均速度の違いは、LES では粒子沈降速度の増大をもたらす乱流渦の解像度が十分でないためと考えられる。

図 A-7 と図 A-8 はそれぞれ、粒子乱流強度の流れ方向と壁面垂直方向の成分の分布である。図 A-7 から粒子乱流強度の流れ方向は LES と DNS で概ね良好な一致を示し、緩和時間が大きいほど壁面付近での乱流強度が大きくなっている。一様等方性乱流中の粒子運動の理論解析によると、重い粒子の乱流強度は流体の乱流強度よりも小さくなることが知られている (Hinze 1975)。しかし、 $T_p$  の大きな Glass (図 A-7(b))、Copper (図 A-7(c)) の粒子乱流強度の流れ方向成分は特に壁面付近で流体よりも大きな値を持ち、一様等方性乱流の理論と定性的に異なることがわかる。計算される粒子乱流強度の流れ方向成分が壁面近くで高いのは、R.E.A. が指摘しているように、チャネル内流れには平均的な速度勾配が存在し、粒子が周囲流体の乱れに応答する影響よりも、チャネル中央部から移動した高い速度を有する粒子や周囲流体に近い速度を持つ粒子が混在して粒子速度スケールが多様であることが原因であると考えられる。壁面付近で粒子の速度スケールが多様であることは、図 A-3(b)(c) の壁面付近での粒子=流体間の相対速度が、バルクに比べて大きくなっていることから示唆される。本計算によって得られた壁面付近  $y^+ < 20$  での流体の乱流統計量について、図 A-2(a) に示された乱流強度の流れ方向成分は LES の SGS モデルによる相違が大きいのにに対し、図 A-1 に示された平均速度分布の相違は小さいことを踏まえると、図 A-7 (b)(c) に示された、Glass、Copper の粒子乱流強度の流れ方向成分分布に対する SGS モデルの依存性が小さいことから、R.E.A. の指摘と同様に、粒子乱流強度の流れ方向成分は流体の局所的な乱れよりも平均速度勾配の存在に大きく影響を受けるものと考えられる。

図 A-8 に示される壁面垂直方向の粒子乱流強度分布について、単相流の LES で予測される壁面垂直方向の乱流強度と DNS 結果との相対的な差が大きいこと (図 A-2(a)) から、LES と DNS との分布には定量的な違いがある。しかし、 $T_p$  に対する粒子乱流強度分布の大局的な傾向については、LES と DNS との間に概ね良好な一致が見られる。図 A-8 によると、 $T_p$  が大きな粒子ほど粒子乱流強度が減衰している傾向が示されている。これは一様等方性乱流中の粒子運動の理論解析 (Hinze, 1975) と同様な傾向であり、図 A-7(b)(c)

で示された乱流強度の流れ方向成分の傾向と定性的に異なっている。これは、流れ方向成分に関しては、先述のように流体の平均速度が壁面垂直方向に分布を持つことによって、粒子乱流強度が増大するのに対し、壁面垂直方向成分に関しては、粒子乱流強度の増大をもたらす流体の平均速度の空間勾配が 0 であり、流体の速度変動に対する粒子の応答が  $T_p$  の大きいほど鈍感となる影響によって粒子乱流強度が減少するためであると考えられる。また、図 A-8(b)(c) から、Glass, Copper の粒子乱流強度の垂直方向成分分布が平坦化していることが示されている。この傾向は、壁面付近で減衰する流体の乱流強度の傾向と異なり、壁面付近での粒子乱流強度がバルクでの値と同程度であることを表している。このことから、粒子緩和時間の大きな粒子の壁面垂直方向に対する移動は、乱れに対する応答が鈍感なために、局所的ではなく、大局的な流体の乱れからの影響を受けていると考えられる。従って、壁面垂直方向に対しても、壁面付近では粒子の速度スケールが多様であることが示唆される。

図 A-7(a) に示されるように、 $T_p$  の小さな Lycopodium の乱流強度の流れ方向成分分布の形は流体のものに近いことから、上述した壁面近傍での粒子速度の多様性は  $T_p$  の大きな Glass や Copper の場合に比べて小さく、粒子の周囲流体の乱れに対する応答がより重要である。図 A-2(a) で示されている流体の乱流強度の流れ方向成分のピークの値について、SM と DSM では DNS に比べて過大評価であるのに対し、DMSM では DNS と近い値であった。一方、DMSM の粒子乱流強度のピーク値は DNS の結果よりも低くなり、他のモデルの場合も LES では  $10 < y^+ < 20$  で粒子乱流強度を過小評価していると考えられる。図 A-7(a) に示されている SM と DSM の粒子乱流強度のピーク値が DNS の結果と合っているのは、図 A-2(a) との比較により、流体の乱れ度を過大評価する誤差と過小評価する誤差が同程度であるためである。SGS モデルに対する Lycopodium 粒子の乱れ度と単相流の結果とが同じ傾向を示すことは、図 A-8(a) に示された壁面垂直成分についても同様であり、流体の乱流強度を最も過小評価する DSM (図 A-2(a)) の値が最も小さい。

以上の図 A-3, A-7, A-8 に示された LES と DNS との違いは SGS モデルの依存性が小さいことから、LES で解像されていない SGS から粒子への作用が原因であると考えられる。その作用についてのメカニズムは、渦中を落下する粒子が高速に落下する領域を選択的に進む影響、ひずみ速度が大きく渦度が小さい領域へ粒子が選択的に集積する影響、SGS の乱れにより粒子が分散する影響などが考えられる。次節では、これらのうち最後に示した粒子分散について検討する。

## A.3.3 SGS 変動成分から粒子分散への影響についての評価

SGS から粒子分散への影響を拡散現象として捉えると、拡散の強さを表す指標である自己拡散係数  $D$  は

$$D = \frac{1}{3} \overline{u'^2 T_I} \quad (\text{A.17})$$

と書き表される。ここで、 $T_I$  は積分時間であり、以下に示されるラグランジュ相関係数  $R_L(\tau)$  を時間積分することによって得られるものである。

$$R_L(\tau) = \frac{\langle u'_i(t) u'_i(t+\tau) \rangle}{\langle u'_i(t) u'_i(t) \rangle} \quad (\text{A.18})$$

従って、粒子の分散は、SGS エネルギー  $k = \sqrt{2}/2$  の大きさだけではなく、 $k$  の時間変化のスケール  $T_{II}$  にも影響を受ける。

LES の SGS から粒子運動への影響を評価した従来の研究には、Wang & Squires (1996) が挙げられる。その方法では、SGS エネルギー  $k$  の輸送方程式を解き、粒子の運動方程式(式(A.3))の流体速度  $u_j$  に、粒子位置で評価される  $k$  を利用して正規乱数で与えられる流体速度の変動成分  $u'_j$  を各時間ステップ毎に加える。従って、Wang & Squires (1996) の方法を用いた場合、流体の変動速度の相関は1時間ステップ毎になくなり、 $T_{Ip}/T_{II}$  が小さいほど SGS から粒子分散への影響は過小評価されるものと考えられる。本節では、SGS によって引き起こされる粒子分散の影響をより正しく評価するために、 $k-\epsilon$  モデルによる解析で採用された Sommerfeld らの Langevin Model (Sommerfeld *et al.*, 1993) (以下 LM) を、式(A.13)~(A.16)に従って LES に導入し、計算を行う。LES の SGS モデルには DMSM を採用する。

まず、分散の時間スケールの程度を検討するため、粒子速度の変動成分に関する  $0 < \tau < 0.5$  におけるラグランジュ時間相関  $R_{Lp}(\tau)$  の時間発展を図 A-9 に示す。なお、式(A.18)中の平均操作  $\langle \cdot \rangle$  は全粒子に対して行った。図 A-9 には、参照のために Glass の点で評価される流体のラグランジュ時間相関  $R_{Lj}(\tau)$  が示されている。 $R_L(\tau)$  の分布に指数関数近似を仮定すると、積分時間  $T_I$  は  $R_L(\tau) = 1/e$  を満足する時刻である。Wang & Squires (1996) の方法が流体の速度は1ステップで相関が失われるのに対し、この仮定による Glass 位置での  $T_{II}$  は  $1.05 \times 10^{-2} \delta^2 / u_\tau^2$  に相当し、本計算の 21 ステップに相当する。粒子のラグランジュ相関係数について、図 A-9 より、 $T_p$  が大きいほど流体の高波数の変動に追従しにくくなることによって粒子速度の時間変化が緩やかになるために、粒子の積分時間  $T_{Ip}$  は大きくなる様子が示されている。また、 $R_L(\tau)$  の指数関数近似の仮定によって求めた粒子の積分時間  $T_{Ip}$  を表 A-2 に示す。表 A-2 に示されるように  $T_p$  が最小である *Lycopodium* の場合は  $T_{Ip}/T_{II}$  が 7 程度であることから、粒子分散に対して、流体変動速度  $u'_j$  の時間変化の過程が無視できない。

Table. A-2 Stochastic properties of particle

|                        | Lycopodium            | Glass                 | Copper                |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $T_f$                  | $6.97 \times 10^{-2}$ | $4.26 \times 10^{-1}$ | 1.38                  |
| $\overline{u_i' u_i'}$ | $1.82 \times 10^{-3}$ | $4.22 \times 10^{-4}$ | $4.29 \times 10^{-6}$ |
| $D$                    | $4.22 \times 10^{-5}$ | $5.99 \times 10^{-5}$ | $1.97 \times 10^{-5}$ |

次に、分散の速度変動スケールの程度を検討するため、図 A-10 に  $\langle u_i' u_i' \rangle$  の時間発展を示す。この図より、粒子緩和時間が大きいほど粒子の慣性が重要になり、密度の大きな粒子の周囲流体に応答する速度変動は小さくなることが示される。表 A-2 には、さらに、 $\overline{u_i' u_i'}$  と式 (A.17) で計算される粒子の自己拡散係数  $D$  を示す。自己拡散係数は積分時間と速度変動の二乗との積で表されるが、図 A-9, A-10 よりわかるように粒子緩和時間が大きいほど前者は大きく、後者は小さくなる。そのため、自己拡散係数  $D$  は、本計算条件では、粒子緩和時間が中間である Glass の場合に最大となっている (表 A-2 参照)。従って、分散の影響は Glass の場合が最も強くなる。

LM によって粒子の統計量にどのように効いてくるか明らかにするため、LM あり/なしで計算された粒子の平均速度と乱流強度をそれぞれ図 A-11 と図 A-12 に示す。図 A-11, A-12 より、LM の影響による違いはほとんど見受けられず、その違いは 3% 以下である。LM の影響が小さい理由について、LES ではレイノルズ応力は GS 成分でほぼ解像されていることが挙げられる。LES ではエネルギーの大半は GS 成分が保有し、SGS モデルで評価される式 (A.13) 中の  $\overline{u_i' u_i'}$  は十分に小さい。つまり、LES の SGS 成分として与えられる乱れエネルギーは、 $k-\epsilon$  モデルの  $k$  に比べて小さく、LES での粒子の変動速度は  $k-\epsilon$  モデルを用いた場合に比べて小さい。このことから、乱れの微細構造から粒子運動への影響を拡散現象として扱うことは、SGS モデルで評価される乱れエネルギーが小さいために、効果が弱いと考えられる。

以上の考察より、いずれの場合も、DNS の結果との差は、LM を考慮することによって縮まらないことがわかる。すなわち、LES で解像されていない SGS から粒子への影響には、確率的に不規則な運動として記述することが可能な粒子分散よりも、特定のスケールを有する微細渦から粒子が受ける選択的な作用 (高速な領域の通過や集積など) が支配的であると考えられる。

## A.4 まとめ

流体側の乱流統計量 (平均速度, 乱流強度) に関して既存の各種 SGS モデルの特徴を再現し得る LES によって、従来の DNS による固気二相流の数値シミュレーション (Rouson *et al.*, 1997) と同じ条件で計算し、SGS モデルや格子解像度が計算結果に及ぼす影響について比較・検討を行った。また、SGS の流体運動に Markov 性を仮定した Langevin Model

によって計算を行い、SGSの変動が粒子の分散へ与える影響について調べた。その結果、以下のような結論を得た。

(1) 本 LES 計算によって得られた粒子側の乱流統計量の傾向は DNS を用いた結果と概ね良好に一致することが示された。

(2) LES の SGS モデルの違いによる計算結果の差は LES と DNS との差に比べて小さいことがわかった。このことから、粒子乱流統計量の精度を向上させるには、既存の SGS モデルの改善によって流体側の乱流統計量の予測精度を上げるよりも、空間解像度の方が重要であり、粒子運動は大規模渦だけではなく、SGS からの影響を強く受ける場合があることが示された。

(3) 既存の SGS モデルを用いて、流体の SGS 変動から粒子運動への影響を確率的に扱う粒子分散を評価した。そして、本計算条件での粒子側の乱流統計量に対し、粒子分散の影響は十分に小さいことを確認した。これは SGS 乱れの影響を表すモデルが粒子運動に対する選択的な影響を表現していないことが原因であると考えられ、粒子運動はあるスケールの微細渦に対して選択的に影響を受けている可能性が高い。

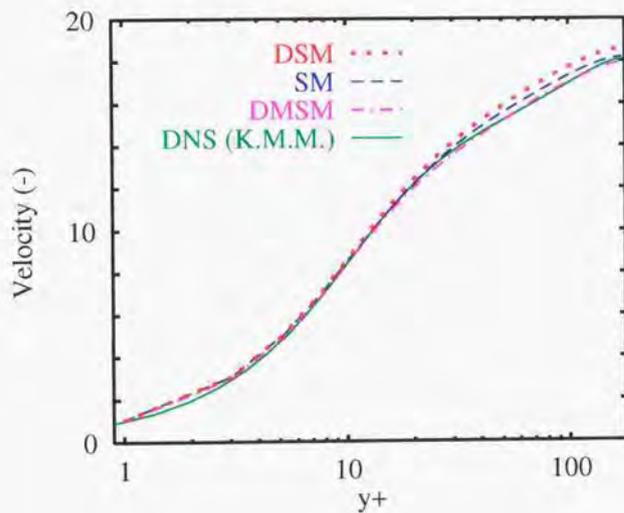


Fig. A-1 Mean stream-wise velocity of fluid in turbulent channel flow. (DNS:—, K.M.M.; LES: --, SM (Smagorinsky Model); ···, DSM (Dynamic SGS Model); - · - ·, DMSM (Dynamic Mixed SGS Model))

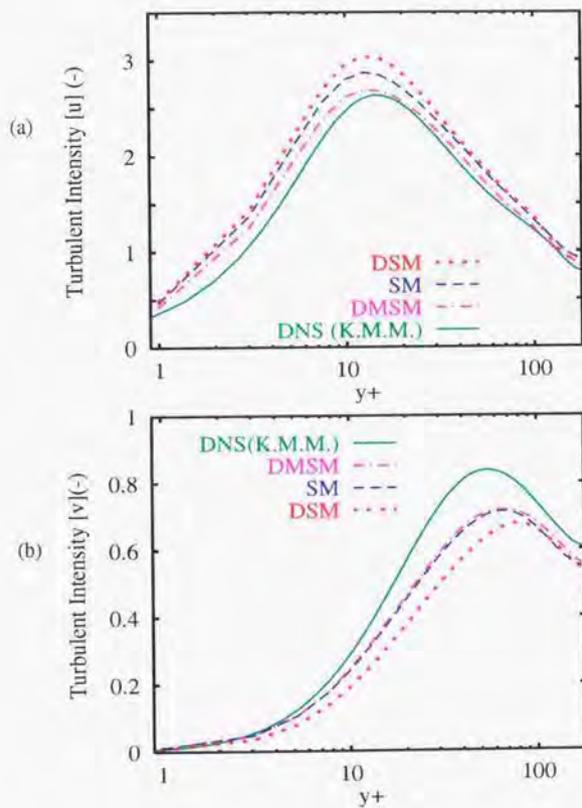


Fig. A-2 Root-mean-square velocities of fluid in turbulent channel flow. (a) Stream-wise component; (b) Wall-normal component. (DNS:—, K.M.M.; LES: - -, SM (Smagorinsky Model); ···, DSM (Dynamic SGS Model); - · -, DMSM (Dynamic Mixed SGS Model))

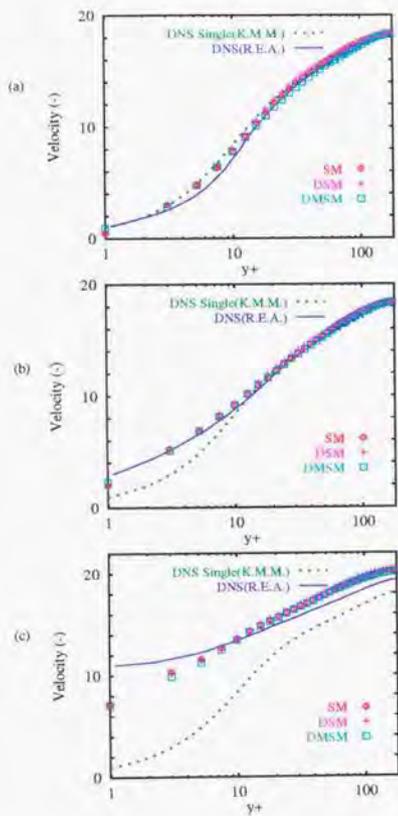


Fig. A-3 Mean stream-wise velocity of particle in turbulent channel flow.

(a) Lycopodium; (b) Glass; (c) Copper. (DNS single phase: —, K.M.M. DNS particle: - -, R.E.A. LES particle (without Langevin model):  $\diamond$ , SM (Smagorinsky Model); +, DSM (Dynamic SGS Model);  $\square$ , DMSM (Dynamic Mixed SGS Model))

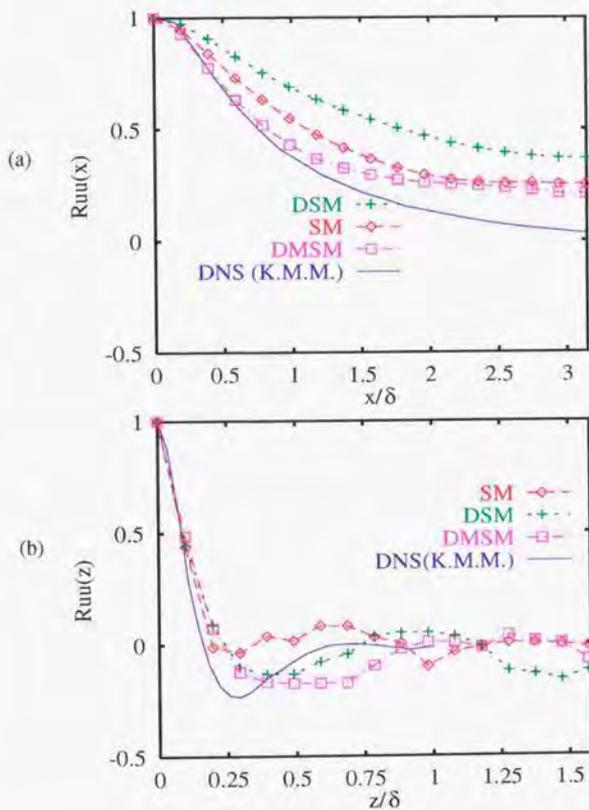


Fig. A-4 Stream-wise and spanwise two point correlations of velocity fluctuations.  
 (DNS: - K.M.M.; LES:  $\diamond$ , SM (Smagorinsky Model); +, DSM (Dynamic SGS Model);  
 $\square$ , DMSM (Dynamic Mixed SGS Model) )

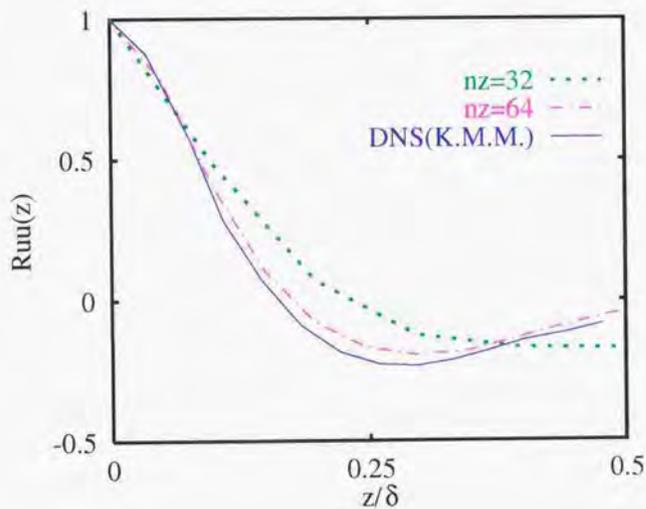


Fig. A-5 Spanwise grid size dependencies on spanwise two point correlations of velocity fluctuations. (DNS:— K.M.M.; LES:  $\cdots$ ,  $n_z=32$ ;  $-\cdot-$ ,  $n_z=64$ )

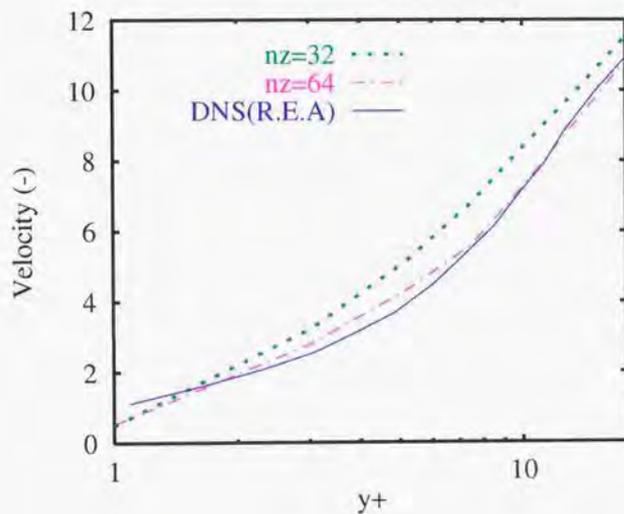


Fig. A-6 Spanwise grid size dependencies on mean stream-wise velocity of Lycopodium particle in turbulent channel flow. (DNS: — R.E.A.; LES:  $\cdots$ ,  $n_z=32$ ;  $- -$ ,  $n_z=64$ )

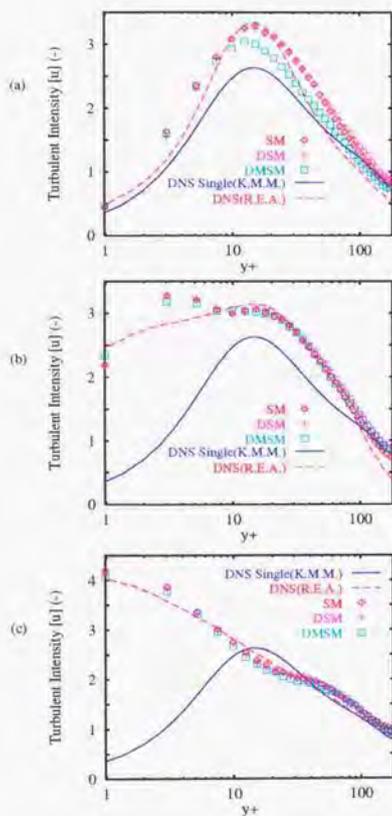


Fig. A-7 Stream-wise root-mean-square velocity of particle in turbulent channel flow. (a) Lycopodium; (b) Glass; (c) Copper. (DNS single phase: —, K.M.M.; DNS particle: · · ·, R.E.A.; LES particle (without Langevin model):  $\diamond$ , SM (Smagorinsky Model); +, DSM (Dynamic SGS Model);  $\square$ , DMSM (Dynamic Mixed SGS Model))

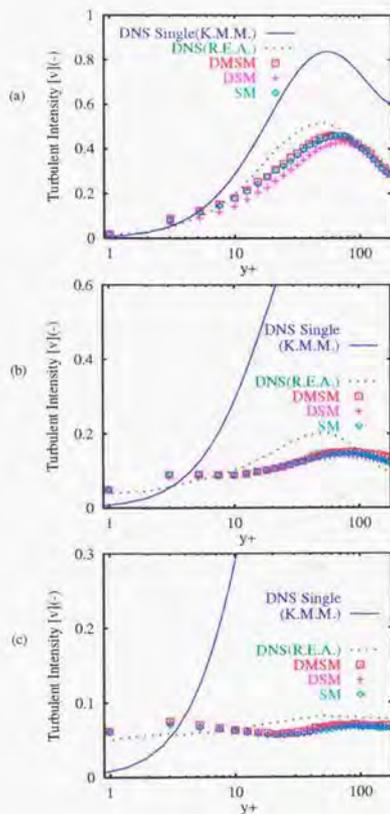


Fig. A-8 Wall-normal root-mean-square velocity of particle in turbulent channel flow. (a) Lycopodium; (b) Glass; (c) Copper. (DNS single phase: —, K.M.M. DNS particle: - · -, R.E.A. LES particle (without Langevin model):  $\diamond$ , SM (Smagorinsky Model); +, DSM (Dynamic SGS Model);  $\square$ , DMSM (Dynamic Mixed SGS Model))

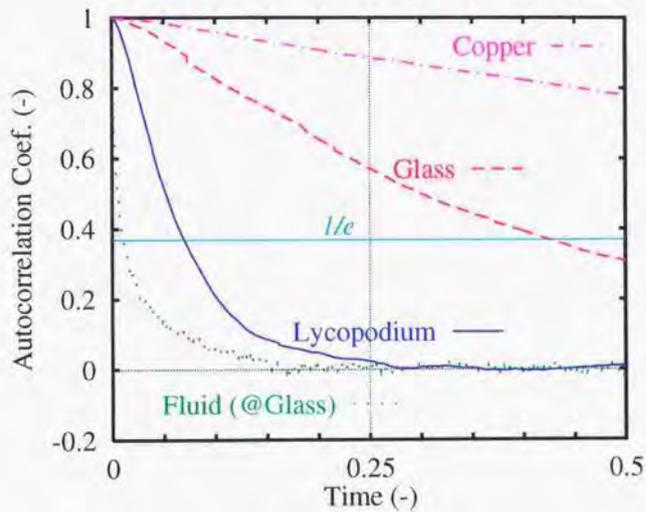


Fig. A-9 Lagrangian autocorrelations of stochastic velocity at particles in the turbulent channel flow. (Fluid:  $\cdots$ , Glass. Particle:  $-$ , Lycopodium;  $- -$ , Glass;  $- \cdot -$ , Copper)

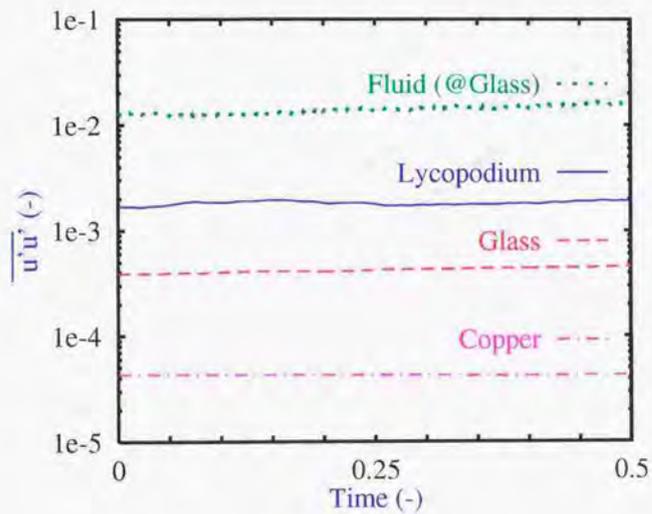


Fig. A-10 Mean-square stochastic velocities at particles in the turbulent channel flow.  
(Fluid:···,Glass. Particle:—,Lycopodium; - -,Glass; - · -, Copper)

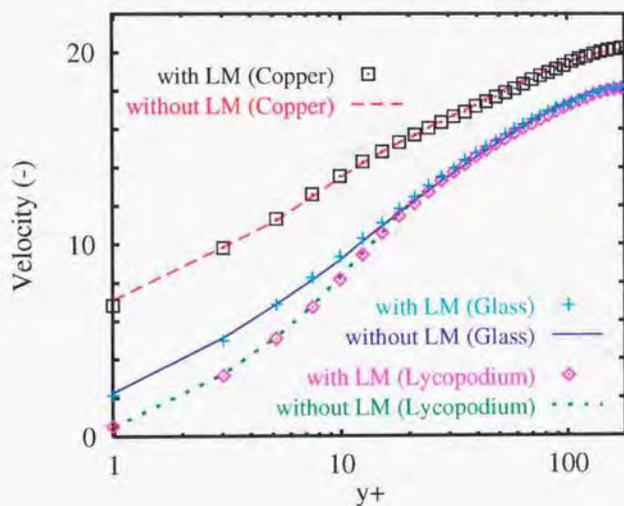


Fig. A-11 Mean stream-wise velocity of particle in turbulent channel flow with Langevin Model (LM) and without LM.

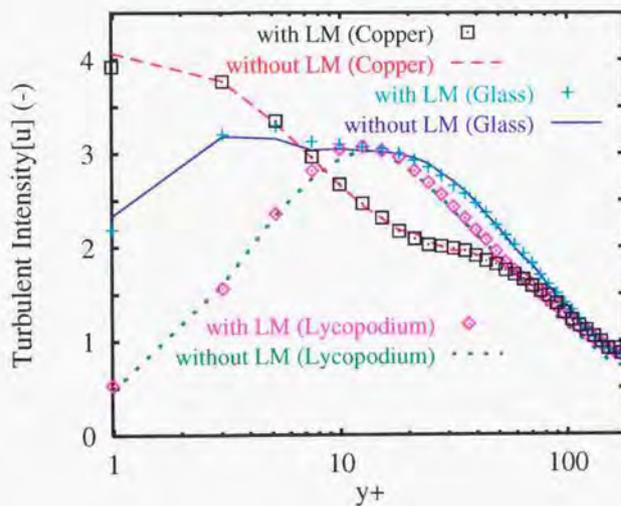


Fig. A-12 Stream-wise root-mean-square velocity of particle in turbulent channel flow with Langevin Model (LM) and without LM.

## Appendix B

### 球形粒子に働く圧力抗力と粘性抗力との比 の算出

#### はじめに

第4章では、粒子運動が誘起する応力場をモデル化して、平均化方程式に取り込んでいる。本研究での解析手法は非圧縮流体の解法に準じたものである。従って、圧力は、各時刻において、場全体における速度のソレノイダル条件からのずれを0に補正するためのポアソン方程式の解として与えられる。ポアソン方程式は楕円型であることから、その解は境界条件に依存する。しかしながら、従来の平均化方程式を用いた気泡流解析では、気泡表面での圧力の境界条件が考慮されていなかった。従って、平均化方程式を用いた気泡流シミュレーションによって流体の物理現象をより忠実に再現するには、境界条件の影響が反映された圧力場を再現することが重要である。第4章での議論によると、圧力場の境界条件の影響は調和関数で記述されることから、気泡表面上での圧力分布がわかればよい。気泡表面上での圧力分布を定式化するには気泡表面上の圧力分布を球面調和関数で展開することが有効であるが、最も重要な貢献は1次の展開係数に相当する「圧力抗力」の影響である。球形粒子に働く抗力係数は、レイノルズ数の関数として記述され、従来からよく知られている。従って、圧力抗力を求めるには、全体の抗力の中で圧力抗力が占める割合を定式化すればよい。

本章では、直接数値シミュレーション (DNS) により、粒子に働く粘性抗力と圧力抗力の比について計算する。そして、固体粒子や球形気泡に対し、粘性抗力と圧力抗力の比に関する相関を導く。出する。

## 数値解析について

2次元軸対称座標系で記述された支配方程式

連続の式:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) = 0. \quad (\text{B.1})$$

運動量保存式 (r 方向):

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} \right). \quad (\text{B.2})$$

運動量保存式 ( $\theta$  方向):

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \quad (\text{B.3})$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (\text{B.4})$$

有限差分法に基づき、スタッガード格子を用いて支配方程式を離散化して定常解を求める。空間微分項は2次精度中心差分である。時間積分には、対流項に対して1次のオイラー陽解法、粘性項に対して1次のオイラー陰解法を適用している。

シミュレーションはレイノルズ数 ( $Re$ ) をパラメタとして行っている。球形固体粒子の場合は、後流渦が定在するレイノルズ数域 ( $Re \leq O(200)$ ) である、0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 と設定している。球形気泡 (ここでは clean bubble) の場合は渦放出が起きないことから、球形固体粒子の場合に設定したレイノルズ数の他に、500, 1000, 2000 に対しても計算を行っている。格子に対する条件は以下のように示される。

Table. B-1 Simulation conditions of grid system

|            |       |
|------------|-------|
| $N_r$      | 100   |
| $N_\theta$ | 180   |
| $\alpha$   | 1.09  |
| $\delta$   | 0.005 |

ただし、 $N_r$  は半径方向に対する格子点数、 $N_\theta$  は周方向に対する格子点数、 $\alpha$  は半径方向の格子幅に対する増幅係数、 $\delta$  は粒子半径に対する半径方向の最小格子幅である。計算領域の大きさに関し、半径方向の長さ ( $r_{max}$ ) は粒子半径の約 300 倍に設定している。

## 粒子に働く抗力係数 (計算精度に対する議論)

球形固体粒子働く抗力係数は Mei (1993) より,

$$C_D = \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right) \quad (Re < 0.01),$$

$$C_D = \frac{24}{Re} \left( 1 + 0.1315 Re^{0.82 - 0.05 \log_{10} Re} \right) \quad (0.01 \leq Re < 20),$$

$$C_D = \frac{24}{Re} \left( 1 + 0.1935 Re^{0.9305} \right) \quad (20 \leq Re < 260),$$

である. 球形気泡に働く抗力係数は Mei *et al.* (1994) より,

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[ \frac{2}{3} + \left\{ \frac{12}{Re} + \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{3.315}{\sqrt{Re^{-1/2}}} \right) \right\}^{-1} \right],$$

である. 固体粒子と気泡に対する Mei (1993) の式と本研究における計算結果を図 B-1, B-2 に示す. 図 B-1, B-2 より, 本計算で得られた固体粒子と球形気泡に対する抗力係数について, 極めてよく Mei (1993), Mei *et al.* (1994) の式と一致していることがわかる. また, 表 B-2, B-3 は固体粒子と球形気泡と抗力係数の値と Mei (1993), Mei *et al.* (1994) の式に対する誤差を示す. この表からも Mei (1993), Mei *et al.* (1994) の式との誤差が十分に小さいことがわかる.

Table. B-2 Drag coefficient of rigid particle and its error compared with Mei (1993) equation.

$$(N_r \times N_\theta = 100 \times 180)$$

| $Re$ | $C_D(\text{Present})$ | $C_D(\text{Mei,1993})$ | Error(%) |
|------|-----------------------|------------------------|----------|
| 0.1  | 245.9                 | 244.3                  | 0.664    |
| 0.2  | 124.8                 | 124.0                  | 0.617    |
| 0.5  | 51.94                 | 51.54                  | 0.771    |
| 1    | 27.46                 | 27.16                  | 1.127    |
| 2    | 15.00                 | 14.76                  | 1.641    |
| 5    | 7.179                 | 7.033                  | 2.069    |
| 10   | 4.330                 | 4.258                  | 1.687    |
| 20   | 2.730                 | 2.735                  | -0.176   |
| 50   | 1.580                 | 1.574                  | 0.385    |
| 100  | 1.091                 | 1.087                  | 0.382    |
| 200  | 0.7733                | 0.7756                 | -0.297   |

Table. B-3 Drag coefficient of spherical bubble and its error compared with Mei *et al.*(1994) equation.

$$(N_r \times N_\theta = 100 \times 180)$$

| $Re$   | $C_D(\text{Present})$ | $C_D(\text{Mei et al.}(1994))$ | Error(%) |
|--------|-----------------------|--------------------------------|----------|
| 0.1    | 165.6                 | 161.8                          | 2.348    |
| 0.2    | 83.62                 | 81.80                          | 2.218    |
| 0.5    | 34.38                 | 33.69                          | 2.044    |
| 1.0    | 17.89                 | 17.57                          | 1.836    |
| 2.0    | 9.547                 | 9.410                          | 1.458    |
| 5.0    | 4.356                 | 4.326                          | 0.689    |
| 10.0   | 2.482                 | 2.477                          | 0.206    |
| 20.0   | 1.432                 | 1.429                          | 0.186    |
| 50.0   | 0.6833                | 0.6777                         | 0.815    |
| 100.0  | 0.3793                | 0.3745                         | 1.288    |
| 200.0  | 0.2047                | 0.2017                         | 1.489    |
| 500.0  | 0.08748               | 0.08622                        | 1.456    |
| 1000.0 | 0.04515               | 0.04455                        | 1.363    |
| 2000.0 | 0.02332               | 0.02279                        | 2.343    |

## 圧力抗力と粘性抗力との比の算出

粒子に働く、粘性抗力係数、圧力抗力係数、全抗力係数について、それぞれ、 $C_D^{(Vis.)}$ 、 $C_D^{(Press.)}$ 、 $C_D^{(total)}$ と書き表すと、

$$C_D^{(total)} = C_D^{(Vis.)} + C_D^{(Press.)} \quad (B.5)$$

の関係が成り立つ。固体粒子と球形気泡に対する  $C_D^{(Vis.)}/C_D^{(total)}$  とレイノルズ数の関係について、それぞれ図 B-3 と図 B-4 に示す。図 B-3、B-4 より、低いレイノルズ数 ( $Re \leq 1$ ) では、 $C_D^{(Vis.)}/C_D^{(total)}$  がほぼ 2/3 であることがわかる。これは、ストークス流れの場合の理論解と同じ結果である。

高レイノルズ数での球形気泡について、 $Re \rightarrow \infty$  で粘性抗力係数が  $C_D^{(Vis.)} = 32/Re$  (Moore, 1963)、全抗力が  $C_D^{(total)} = 48/Re$  (Levich, 1949) に漸近することが理論的に知られており、 $C_D^{(Vis.)}/C_D^{(total)}$  は 2/3 である。図 B-4 によると、本計算結果からも高レイノルズ数域での  $C_D^{(Vis.)}/C_D^{(total)}$  が 2/3 であることが示され、理論とよく一致していることがわかる。高レイノルズ数における球形気泡の  $C_D^{(Vis.)}/C_D^{(total)}$  は、低レイノルズ数の理論解と同じ比であるが、図 B-4 より、球形気泡の  $C_D^{(Vis.)}/C_D^{(total)}$  は全てのレイノルズ数渡って、ほぼ一定の値であることがわかる。これは、気泡の場合にはレイノルズ数によらず流れの剥離がなく、剥離渦による圧力分布のゆがみの影響が小さいからだと考えられる。

一方、固体粒子の場合は、高レイノルズ数で後方に定在渦ができ、その領域の圧力が低下する。そのため、全抗力に対する圧力抗力の影響が強くなる。図 B-3 によると、レイノルズ数が高い場合 ( $Re > 1$ )、計算したレイノルズ数 ( $Re < 200$ ) に関する粘性抗力係数/全抗力係数比  $C_D^{(Vis.)}/C_D^{(total)}$  は、フィッティングによって以下のように求まる。

$$\frac{C_D^{(Vis.)}}{C_D^{(total)}} = \frac{2}{3} - 1.88 \times 10^{-3} \cdot (\ln Re)^{2.80} \quad (Re \geq 1). \quad (B.6)$$

フィッティングによる得られた線については、図 B-3 に示されており、計算結果 (シンボル) とよく合っている。圧力抗力係数/全抗力係数比  $C_D^{(Press.)}/C_D^{(total)}$  は、式 (B.5)/(B.6) より、以下のように書き表される。

$$\frac{C_D^{(Press.)}}{C_D^{(total)}} = \frac{1}{3} + 1.88 \times 10^{-3} \cdot (\ln Re)^{2.80} \quad (Re \geq 1). \quad (B.7)$$

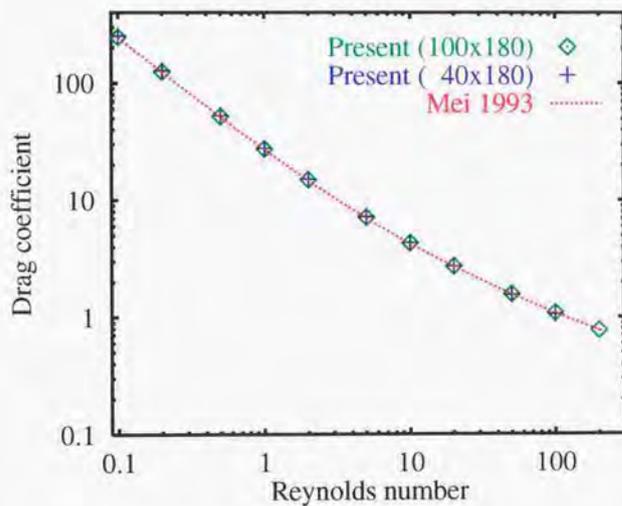


Fig. B-1 Drag coefficient of a rigid particle for various Reynolds number conditions.

( $\diamond$ : Present DNS  $r_{max} \sim 300a$ ,  $N_r=100$ ,  $N_\theta=180$ ; +: Present DNS  $r_{max} \sim 30a$ ,  $N_r=40$ ,  $N_\theta=180$ ; -: Mei (1993))

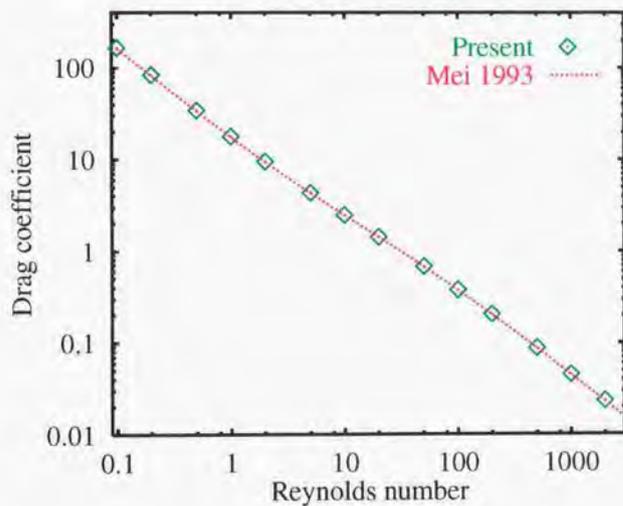


Fig. B-2 Drag coefficient of a spherical bubble for various Reynolds number conditions.

( $\diamond$ : Present DNS  $r_{max} \sim 300$ ,  $N_r=100$ ,  $N_\theta=180$ ; - : Mei *et al.*(1994))

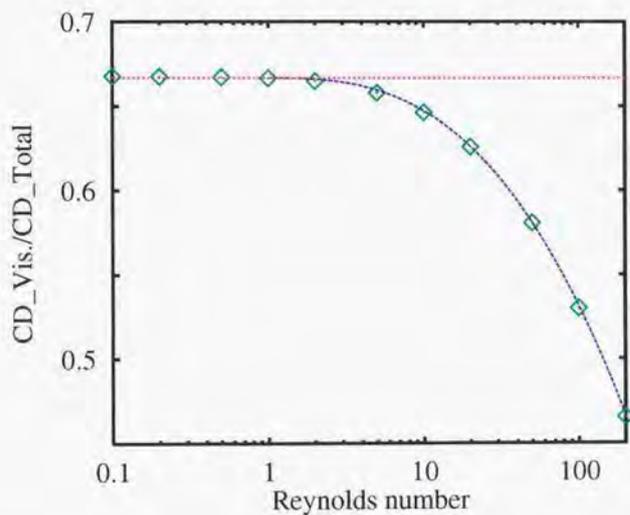


Fig. B-3  $C_D^{(Vis.)}/C_D^{(total)}$  versus Reynolds number of a spherical particle. Lines correspond to the results fitted by model equation (Eqn. B.6) and symbols correspond to the present simulation results. ( $r_{max} \sim 300$ ,  $N_\theta=180$ ,  $N_r=100$ )

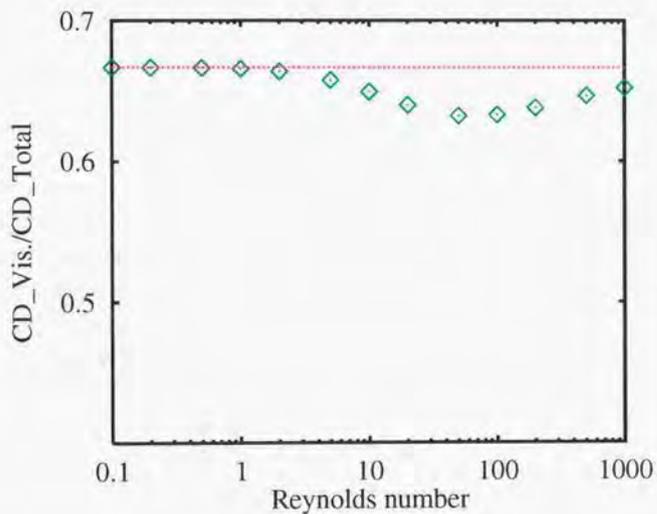


Fig. B-4  $C_D^{(Vis.)}/C_D^{(total)}$  versus Reynolds number of a spherical bubble.  
( $r_{max} \sim 300$ ,  $N_\theta=180$ ,  $N_r=100$ )

## Appendix C

### ストークス流れにおける球形粒子が誘起する速度場の領域依存性

#### はじめに

低レイノルズ数の粒子周りの数値シミュレーションにおいて、計算領域を十分に大きくとらないと抗力係数の算出精度が著しく悪くなることが知られている。この理由について、低レイノルズ数では楕円型の偏微分方程式で記述される粘性項が支配的であり、遠方での境界条件に対して敏感となるためである。すなわち、低レイノルズ数での粒子周りの速度分布は計算領域の影響を多大に受けている。さて、本研究では、第4章で述べたように、広いレイノルズ数に渡って粒子の誘起する速度分布を数値解析によってモデル化を行っている (Appendix E, F, G, I 参照)。速度場のモデル化には、速度境界層の厚さを知ることが重要であるが、その計算領域に対する依存性を検討する必要がある。本章では、最も速度境界層が厚い、レイノルズ数が0における球形粒子周りの速度場が、計算領域の大きさに対して、どの程度依存するのかを、ストークス方程式を用いて解析的に算出する。

#### ストークス流れにおける有限な球形領域中の粒子が誘起する速度の一般形

図 C-1 には本解析における粒子と計算領域との関係が示されている。ここで、粒子半径を  $a$ 、粒子移動速度を  $V_i$  と記述する。計算領域は粒子重心位置を中心と半径が  $R_{max}$  の有限領域であり、遠方境界  $r = R_{max}$  での流体速度  $u_i$  を一様に0としている。

慣性の影響を無視した。ストークス流れの支配方程式は以下のように書き表される。

$$\partial_t u_i = 0, \quad (C.1)$$

$$0 = -\partial_i p + \nabla^2 u_i. \quad (C.2)$$

式(C.2)の両辺に、 $(\nabla \times \nabla \times)$ の演算を施すことにより、以下に示される関係を得る。

$$0 = \nabla^2 \nabla^2 u_i. \quad (\text{C.3})$$

さて、ストークス方程式は線形方程式であり、速度場  $u_i$  は粒子速度  $V_i$  に比例する。また、系の対称性を考慮すると、粒子周りの速度場は等方な2階のテンソル  $T_{ij}$  を用いて以下のように書き表される。

$$u_i = T_{ij} V_j \quad (\text{C.4})$$

式(C.1)(C.3)より、2階の等方テンソル  $T_{ij}$  に対して、以下の条件が満たされなくてはならない。

$$\partial_i T_{ij} = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\partial_k \partial_k \partial_i \partial_j T_{ij} = 0 \quad (\text{C.6})$$

式(C.5)(C.6)を満たす2階の等方テンソルは4種類存在し、それぞれ以下のように書き表される。

$$Q_{ij}^{(-1)} = \frac{a}{r} \left( \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2} \right), \quad (\text{C.7})$$

$$P_{ij}^{(-3)} = \frac{a^3}{r^3} \left( \delta_{ij} - 3 \frac{x_i x_j}{r^2} \right), \quad (\text{C.8})$$

$$Q_{ij}^{(+2)} = \frac{r^2}{a^2} \left( -2\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2} \right), \quad (\text{C.9})$$

$$P_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}. \quad (\text{C.10})$$

ここで、 $P_{ij}$  は調和関数 ( $\nabla^2 P_{ij} = 0$ )、 $Q_{ij}$  は非調和関数 ( $\nabla^2 Q_{ij} \neq 0$ )、であることを示す。また、肩の数字  $\alpha$  は、距離  $r$  に対する遠方での挙動が  $O(r^\alpha)$  であることを表す、図 C-1 で示された系に対して、式(C.7)~(C.10)の関係を用いると、ストークス方程式を満たす速度場の解  $u_i$  は粒子速度  $V_j$  を用いて以下のような線形和によって記述される。

$$u_i = \left( C^{(-1)} Q_{ij}^{(-1)} + C^{(-3)} P_{ij}^{(-3)} + C^{(+2)} Q_{ij}^{(+2)} + C^{(0)} P_{ij}^{(0)} \right) V_j, \quad (\text{C.11})$$

ここで、 $C^{(-1)}$ 、 $C^{(-3)}$ 、 $C^{(+2)}$ 、 $C^{(0)}$  は定数であり、境界条件によって決定される値である。次節以降では、球形固体粒子と球形気泡に対する  $u_i$  と  $a/R_{max}$  との関係について示す。

### 球形固体粒子の場合

球形固体粒子の場合の境界条件は粒子表面上での速度滑りなし条件と  $r = R_{max}$  で速度が0となる条件であり、以下のように示される。

$$u_i = V_i \quad (r = a), \quad (\text{C.12})$$

$$u_i = 0 \quad (r = R_{max}). \quad (\text{C.13})$$

式(C.11)と式(C.12)(C.13)の関係を用いると、 $C^{(-1)}$ 、 $C^{(-3)}$ 、 $C^{(+2)}$ 、 $C^{(0)}$ に対し、以下の4つの方程式が得られる。

$$C^{(-1)} + C^{(-3)} - 2C^{(+2)} + C^{(0)} = 1, \quad (\text{C.14})$$

$$C^{(-1)} - 3C^{(-3)} + C^{(+2)} = 0, \quad (\text{C.15})$$

$$C^{(-1)} \left( \frac{a}{R_{max}} \right) + C^{(-3)} \left( \frac{a^3}{R_{max}^3} \right) - 2C^{(+2)} \left( \frac{R_{max}^2}{a^2} \right) + C^{(0)} = 0, \quad (\text{C.16})$$

$$C^{(-1)} \left( \frac{a}{R_{max}} \right) - 3C^{(-3)} \left( \frac{a^3}{R_{max}^3} \right) + C^{(+2)} \left( \frac{R_{max}^2}{a^2} \right) = 0. \quad (\text{C.17})$$

式(C.14)~(C.17)を解くことによって、 $C^{(-1)}$ 、 $C^{(-3)}$ 、 $C^{(+2)}$ 、 $C^{(0)}$ は求まり、 $p$ の添字を付けて表すと以下のように示される。

$$C_p^{(-1)} = \frac{3 - 3\epsilon^5}{D_p}, \quad (\text{C.18})$$

$$C_p^{(-3)} = \frac{1 - \epsilon^3}{D_p}, \quad (\text{C.19})$$

$$C_p^{(+2)} = \frac{-3\epsilon^3 + 3\epsilon^5}{D_p}, \quad (\text{C.20})$$

$$C_p^{(0)} = \frac{-9\epsilon + 5\epsilon^3 + 4\epsilon^5}{D_p}. \quad (\text{C.21})$$

ここで、

$$\epsilon = a/R_{max}, \quad (\text{C.22})$$

$$D_p = 4 - 9\epsilon + 10\epsilon^3 - 9\epsilon^5 + 4\epsilon^5 \quad (\text{C.23})$$

と書き表される。

### 球形気泡の場合

球形気泡の場合の境界条件は粒子表面上での運動学的条件、せん断応力が0の条件と  $r = R_{max}$  で速度が0となる条件であり以下のように示される。

$$u_i x_i = V_i x_i \quad (r = a), \quad (\text{C.24})$$

$$\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{x_j}{r} = (0 \times \delta_{ik} + \text{Function}(r) \times x_i x_k) V_k \quad (r = a), \quad (\text{C.25})$$

$$u_i = 0 \quad (r = R_{max}). \quad (\text{C.26})$$

式(C.25)に関し、変形速度に関する部分は以下のように書き表される。

$$\left( \frac{\partial Q_{ik}^{(-1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial Q_{jk}^{(-1)}}{\partial x_i} \right) \frac{x_j}{r} = a \left( -4 \frac{x_i x_k}{r^4} \right). \quad (\text{C.27})$$

$$\left( \frac{\partial P_{ik}^{(-3)}}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{jk}^{(-3)}}{\partial x_i} \right) \frac{x_j}{r} = a^3 \left( -6 \frac{\delta_{ik}}{r^4} + 18 \frac{x_i x_k}{r^6} \right). \quad (\text{C.28})$$

$$\left( \frac{\partial Q_{ik}^{(+2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial Q_{jk}^{(+2)}}{\partial x_i} \right) \frac{x_j}{r} = \frac{1}{a^2} \left( -3\delta_{ik} r - \frac{x_i x_k}{r} \right). \quad (\text{C.29})$$

式(C.11)と式(C.24)~(C.29)より、 $C^{(-1)}$ 、 $C^{(-3)}$ 、 $C^{(+2)}$ 、 $C^{(0)}$ に対し、以下の4つの方程式が得られる。

$$2C^{(-1)} - 2C^{(-3)} - C^{(+2)} + C^{(0)} = 1, \quad (\text{C.30})$$

$$2C^{(-3)} + C^{(+2)} = 0, \quad (\text{C.31})$$

$$C^{(-1)} \left( \frac{a}{R_{max}} \right) + C^{(-3)} \left( \frac{a^3}{R_{max}^3} \right) - 2C^{(+2)} \left( \frac{R_{max}^2}{a^2} \right) + C^{(0)} = 0, \quad (\text{C.32})$$

$$C^{(-1)} \left( \frac{a}{R_{max}} \right) - 3C^{(-3)} \left( \frac{a^3}{R_{max}^3} \right) + C^{(+2)} \left( \frac{R_{max}^2}{a^2} \right) = 0. \quad (\text{C.33})$$

式(C.30)~(C.33)を解くことによって、 $C^{(-1)}$ 、 $C^{(-3)}$ 、 $C^{(+2)}$ 、 $C^{(0)}$ は求まり、 $b$ の添字を付けて表すと以下のように示される。

$$C_b^{(-1)} = \frac{2 + 3\epsilon^5}{D_b}, \quad (\text{C.34})$$

$$C_b^{(-3)} = \frac{\epsilon^3}{D_b}, \quad (\text{C.35})$$

$$C_b^{(+2)} = \frac{-2\epsilon^3}{D_b}, \quad (\text{C.36})$$

$$C_b^{(0)} = \frac{-6\epsilon - 4\epsilon^6}{D_b}, \quad (\text{C.37})$$

ここで、振動パラメタ  $\epsilon$  は式 (C.22) で定義される、計算領域半径と粒子半径との比である。また、

$$D_b = 4 - 6\epsilon + 6\epsilon^5 - 4\epsilon^6. \quad (\text{C.38})$$

である。

### 球形液滴の場合に対する一般化

粒子と流体との粘性係数が  $\mu_p, \mu_f$  で与えられる場合には、式 (C.11) は、式 (C.18)~(C.23)、式 (C.34)~(C.37) の関係を用いて、以下のように書き表される。

$$C^{(-1)} = \frac{(\mu_p/\mu_f)C_p^{(-1)}D_p + C_b^{(-1)}D_b}{(\mu_p/\mu_f)D_p + D_b} \quad (\text{C.39})$$

$$C^{(-3)} = \frac{(\mu_p/\mu_f)C_p^{(-3)}D_p + C_b^{(-3)}D_b}{(\mu_p/\mu_f)D_p + D_b} \quad (\text{C.40})$$

$$C^{(+2)} = \frac{(\mu_p/\mu_f)C_p^{(+2)}D_p + C_b^{(+2)}D_b}{(\mu_p/\mu_f)D_p + D_b} \quad (\text{C.41})$$

$$C^{(0)} = \frac{(\mu_p/\mu_f)C_p^{(0)}D_p + C_b^{(0)}D_b}{(\mu_p/\mu_f)D_p + D_b} \quad (\text{C.42})$$

### 抗力係数

$Q_{ij}^{(-1)}$  はストークスレットを表し、抗力係数への影響は  $32C^{(-1)}/Re$  である。また、調和関数である  $P_{ij}^{(-3)}, P_{ij}^{(0)}$  の抗力係数への貢献は 0 である。さて、 $Q_{ij}^{(+2)}$  の抗力係数の影響についてここで調べる。 $Q_{ij}^{(+2)}$  に対応する速度を

$$u_i^{(+2)} = Q_{ik}^{(+2)}V_k, \quad (\text{C.43})$$

と書き表すと、その速度のラプラシアン以下のように書き表される。

$$\nabla^2 u_i^{(+2)} = \nabla^2 Q_{ik}^{(+2)}V_k = -\frac{10\delta_{ik}}{a^2}V_k. \quad (\text{C.44})$$

従って、 $Q_{ij}^{(+2)}$  に対応する圧力  $p^{(+2)}$  は式 (C.2) より、

$$p^{(+2)} = -\frac{10x_k V_k}{a^2} \quad (\text{C.45})$$

であり、圧力・粘性応力  $\sigma_{ij}^{(+2)}$  は式 (C.29)(C.45) より、

$$\sigma_{ij}^{(+2)} = \frac{1}{a^2} (-3\delta_{ik}x_j - 3\delta_{jk}x_i + 12\delta_{ij}x_k) V_k \quad (\text{C.46})$$

と書き表される。従って、抗力への影響  $F_i^{(+2)}$  は以下のように 0 と導かれる。

$$\begin{aligned}
 F_i^{(+2)} &= \int_{|r|=a} ds \sigma_{ij}^{(+2)} \frac{x_j}{r} \\
 &= \int_{|r|=a} ds \frac{1}{a^2} (-3\delta_{ik}x_j - 3\delta_{jk}x_i + 12\delta_{ij}x_k) V_k \frac{x_j}{r} \\
 &= \int_{|r|=a} ds \frac{1}{a^2} \left( -3\delta_{ik}r + 9 \frac{x_i x_k}{r} \right) V_k \\
 &= 4\pi a (-3\delta_{ik} + 3\delta_{ik}) V_k \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{C.47}$$

従って抗力係数  $C_D$  は、

$$C_D = \frac{32C^{(-1)}}{Re} \tag{C.48}$$

である。従って、固体粒子の抗力係数  $C_{Dp}$  は、

$$C_{Dp} = \frac{24(1 - \epsilon^5)}{Re(1 - (9/4)\epsilon + (5/2)\epsilon^3 - (9/4)\epsilon^5 + \epsilon^6)} \tag{C.49}$$

気泡の抗力係数  $C_{Db}$  は、

$$C_{Db} = \frac{16(1 + (3/2)\epsilon^5)}{Re(1 - (3/2)\epsilon + (3/2)\epsilon^5 - \epsilon^6)} \tag{C.50}$$

である。 $C_{Dp}$ ,  $C_{Db}$  について  $O(\epsilon^1)$  のオーダーまで考慮すると、式 (C.49)(C.50) から、以下のように書き表される、

$$C_{Dp} = \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{9}{4}\epsilon + o(\epsilon) \right) \tag{C.51}$$

$$C_{Db} = \frac{16}{Re} \left( 1 + \frac{3}{2}\epsilon + o(\epsilon) \right) \tag{C.52}$$

式 (C.51)(C.52) より、例えば抗力係数を  $R_{max}/a \rightarrow \infty$  の場合に比べ 1% 以下の誤差で算出するための計算領域の大きさは、固体粒子の場合  $R_{max}/a \geq 225$ 、気泡の場合  $R_{max}/a \geq 150$ 、必要とする。

### 粒子運動が誘起する速度場の影響領域

ここでは、粒子が誘起する速度場の影響領域に対する、計算領域の大きさの依存性を調べる。粒子が誘起する速度場を Legendre 関数で展開したときの 1 次の展開係数  $u_i^{(r)}(r)$  について考える。 $u_i^{(r)}(r)$  は粒子速度の移動方向成分を表し、速度境界層の厚さを表す指標として用いる。式 (C.4) の  $T_{ij}$  を使うと、 $u_i^{(r)}(r)$  は以下のように書き表される。

$$u_i^{(r)}(r) = T_{ij} \frac{x_j x_j}{r^2} \tag{C.53}$$

従って、式 (C.7)(C.8)(C.9)(C.10)(C.11)(C.53) より  $u_1^{(r)}(r)$  は以下のように書き表される。

$$u_1^{(r)}(r) = \left( 2C^{(-1)}\frac{a}{r} - 2C^{(-3)}\frac{a^3}{r^3} - C^{(+2)}\frac{r^2}{a^2} + C^{(0)} \right) |V| \quad (C.54)$$

$u_1^{(r)}(r)$  を粒子の移動速度と粒子径でスケーリングした値を  $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{r})$  と記述すると、 $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{r})$  は以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^{(r)}(\bar{r}) &= u_1^{(r)}(ax)/u_1^{(r)}(a) \\ &= \frac{2C^{(-1)}}{\bar{r}} - \frac{2C^{(-3)}}{\bar{r}^3} - C^{(+2)}\bar{r}^2 + C^{(0)} \end{aligned} \quad (C.55)$$

式 (C.18)~(C.23), 式 (C.34)~(C.38), 式 (C.55) の関係を用いると、 $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{r})$  について、 $R_{max}/a \rightarrow \infty$  の場合と、 $R_{max}/a$  が有限な場合の値が計算できる。粒子重心から粒子半径の10倍離れた位置  $\bar{r} = 10$  において、粒子速度スケールに対して1%以下の誤差で  $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{r})$  の値を算出するために必要な計算領域の大きさを評価すると、固体粒子の場合  $R_{max}/a$  が約200以上、気泡の場合  $R_{max}/a$  が約140以上である。

### 粒子が誘起する速度場に対する理論とDNSとの比較

ここでは、直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation; DNS) を行い、 $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{r})$  を求め、理論との比較し、 $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{r})$  の領域依存性について議論する。なお、計算手法は、Appendix C で用いたものと同じである。

計算領域の半径の大きさ  $r_{max}$  は、約  $30a$  (case1) と  $300a$  (case2) の2通りについて調べている。半径方向と円周方向の格子点数は、case1 と case2 とのそれぞれ場合に対し、 $N_r \times N_\theta = 40 \times 180$ ,  $N_r \times N_\theta = 100 \times 180$  である。本計算手法では、有限なレイノルズ数で定式化されており、レイノルズ数を0としてシミュレーションすることはできない。また、レイノルズ数があまりに小さい場合には、対流項の収束性が非常に遅くなってしまふ。ここでは、レイノルズ数を0.1として計算を行い、ストークス方程式を用いた理論解と比較する。

粒子の誘起する速度場の粒子の移動方向成分は、1次の球面調和関数  $Y_1(\theta)$  に対する半径方向速度  $u_r(r, \theta)$  の展開係数  $u_1^{(r)}(r)$  に相当し、以下のように書き表される。

$$u_1^{(r)}(r) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_1(\theta) (\cos(\theta) - u_r(r, \theta)). \quad (C.56)$$

この式を粒子半径  $a$  と  $r = R_{max}$  の速度に対する粒子相対速度でスケーリングすると、式 (C.55) より、以下のように書き表される。

$$\bar{u}_1^{(r)}(\bar{r}) = u_1^{(r)}(ax)/u_1^{(r)}(a).$$

図 C-2, C-3 は  $R_{max} = 300a$  と  $30a$  とした場合の  $u_1^{(r)}(r)$  と  $r$  の関係について、式 (C.18) ~ (C.23), 式 (C.34) ~ (C.38), 式 (C.55) より計算されるストークス流れの理論値と DNS 結果とを示す。図 C-2 は固体粒子、図 C-3 は気泡に対する分布である。また、図 C-2, C-3 には、 $R_{max} \rightarrow \infty$  の場合の理論解が示されている。図 C-2, C-3 より、 $R_{max} = 30a$  の場合、粒子の誘起する速度分布の理論解と DNS 結果とは固体粒子・気泡の両方の場合においてよく一致している。 $R_{max} = 30a$  の場合、 $R_{max} \rightarrow \infty$  の理論解に比べて、図示した  $r$  の範囲では、ずれが大きいことがわかる。 $R_{max} = 300a$  の場合について、図 C-2, C-3 で示されるように、この場合もまた理論解と DNS の結果とは良好に一致している。ただし、詳細に見ると、 $r$  が大きい領域では  $u_1^{(r)}(r)$  を若干過小評価している。これは、 $r$  が大きい領域では格子密度が粗く差分誤差が大きいこと、また、微小ではあるが慣性の影響が DNS に存在することが原因である。ただし、Appendix B で示した抗力係数については、従来の経験式に比べ極めてよく一致し、粒子近傍での計算結果には問題点がない。また、 $R_{max} = 300a$  の場合の理論解は  $R_{max} \rightarrow \infty$  の理論解に比べて、ずれが小さいことがわかる。

以上に示された、ストークス流れの速度分布の計算領域依存性に関する知見を下に、本研究では、気泡の誘起する速度分布を DNS を用いてモデル化 (Appendix E, F, G, I 参照) する場合、気泡半径に対して 10 倍以下  $r/a \leq O(10)$  の領域で正しい速度分布が得られることを満足するように、DNS の計算領域  $R_{max}$  を  $300a$  程度として計算を行う。

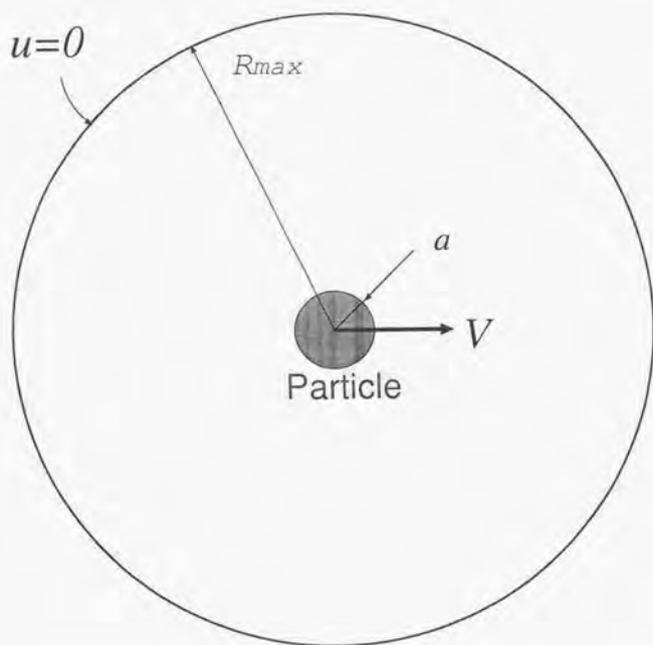


Fig. C-1 Schematics of particle and simulation domain

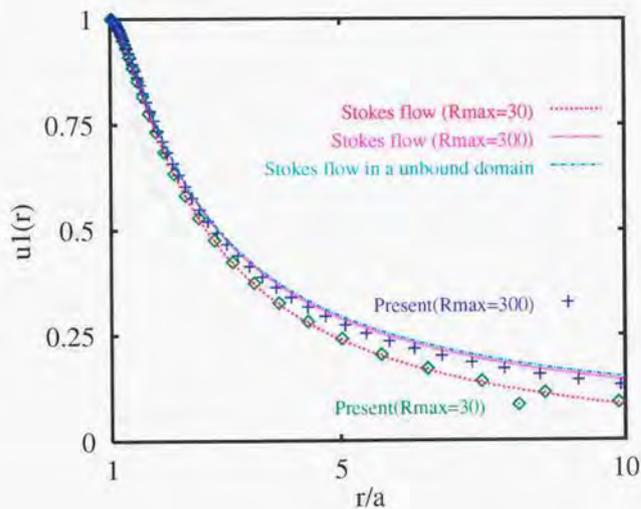


Fig. C-2  $\bar{u}_1^{(\tau)}(\bar{r})$  versus  $r/a$ . ( $R_{max} = 300$  and  $R_{max} = 30$ )  
 (Present simulation results of  $Re = 0.1$  and Stokes flow solution of a rigid particle)

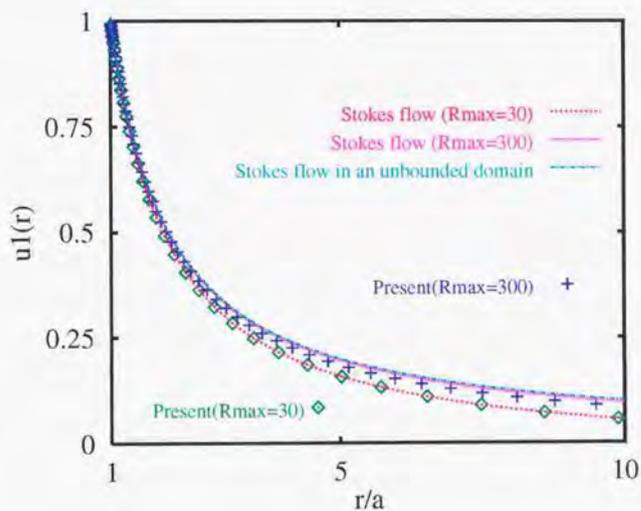


Fig. C-3  $\hat{u}_1^{(r)}(\hat{r})$  versus  $r/a$  ( $R_{max} = 300$  and  $R_{max} = 30$ )  
 (Present simulation results of  $Re = 0.1$  and Stokes flow solution of a spherical bubble)

## Appendix D

### 並進運動する球形粒子に働く並進減圧

はじめに

並進運動する粒子・気泡の表面での平均圧は無限遠における圧力よりも低い。その圧力差は「並進減圧」と呼ばれる。気泡の体積変化を考慮すると、この影響は外向き法線方向へと張つばる力であるため、気泡の膨張をもたらす。また、並進減圧の存在は、粒子の半径方向に圧力分布があることを意味している。従って、混相流におけるマイクロメソスケールにおける現象、すなわち粒子間の流体力学的相互作用を考える上で重要な要因であると考えられる。しかしながら、現状での並進減圧に関する詳細な知見は十分であると言えない。

第4章では粒子運動が誘起する応力場をモデル化して、平均化方程式に取り込んでいる。圧力の境界条件の影響を計算モデルに導入するには、気泡表面上での圧力分布を球面調和関数で展開し、調和関数として記述するのが有効であると述べられている。気泡表面上の圧力を球面調和関数で展開すると、1次の展開係数は「圧力抗力」に相当し、気泡から流体への作用のうち最も重要な影響であり、その定式化はAppendix Bで行われている。本節で議論する「並進減圧」は、展開係数の次数が0に相当する。すなわち、第4章で構築された計算モデルでの「並進減圧」の影響は、気泡重心からの距離 $r$ に対し-1乗で減衰する。圧力抗力の影響が $r$ の-2乗で減衰することから、並進減圧は圧力抗力よりも遠方まで及ぶ作用として記述され、気泡から流体への作用としても重要な要因であると言える。

さて、レイノルズ数が無限大の極限として記述されるポテンシャル流の並進減圧は、 $1/4\rho_j V^2$ であることが知られている (Lamb, 1932)。それに対し、レイノルズ数が0の極限であるストークス流れの場合、ストークス方程式を解いて得られる並進減圧は0である。この理由は、並進減圧が流体の慣性に起因しているためである。微小な慣性の影響 ( $0 < Re \ll 1$ ) に関して、しばしばオゼーン近似の方程式が使われているが、オゼーン近

似の方程式によって並進減圧を見積もると、ストークス方程式と同様に0である。しかしながら、例えば Proudman & Pearson (1957) によって指摘されているように、オゼーン近似の方程式は  $Re$  を摂動パラメタとしてナビエ=ストークス方程式の摂動展開した式として正しくない。従って、 $0 < Re \ll 1$  における並進減圧を評価するには、正しく  $Re$  展開したナビエ=ストークス方程式を用いることが必要である。

そこで、本章では、まず、正しく  $Re$  展開したナビエ=ストークスを用いて、低レイノルズ数の極限における並進減圧を理論的に導出する。さらに、球形気泡や固体粒子の運動の直接数値シミュレーションによって並進減圧を算出し、そのレイノルズ依存性について議論する。

### 支配方程式および並進減圧係数の定義

解析対象を、図 D-1 に示す。定常非圧縮流体を仮定すると、質量と運動量に対する方程式はそれぞれ以下のように書き表される。

$$\partial_i u_i = 0 \quad (D.1)$$

$$\rho_f \partial_j (u_i u_j) = -\partial_i p + \mu_f \nabla^2 u_i \quad (D.2)$$

並進減圧は球形粒子表面上の垂直応力を表面積分することによって得られる。本研究では、並進減圧係数  $C_{TPR}$  を以下のように定義する。

$$C_{TPR} = -\frac{\int_{(r=a)} ds (p(r) - p_\infty)}{\rho_f V^2 \int_{(r=a)} ds} \quad (D.3)$$

式(D.3)には、垂直応力のうち粘性応力 ( $\mu \partial_r u_r$ ) が陽に含まれない。これは、運動学的条件と連続の式により  $\partial_r u_r$  の表面積分が0となるためである。

### 無次元化

パラメタはレイノルズ数

$$Re = \frac{2a \rho_f V}{\mu_f} \quad (D.4)$$

である。無次元変数を、こと表記し以下のような無次元化を施す、

$$\tilde{r} = r/2a, \quad \tilde{\partial}_i = 2a \partial_i, \quad \tilde{\nabla}^2 = 4a^2 \nabla^2,$$

$$\tilde{u}_i = u_i/V, \quad \tilde{p} = \frac{Re \cdot (p - p_\infty)}{\rho_f V^2}$$

なお、圧力は動圧 ( $\rho_F V^2$ ) で無次元化するのが一般的であるが、ここでは解析の簡単のため、 $Re$  がかかっている。上記の無次元化された変数と式 (D.1)(D.2)(D.3) より、以下に示される関係が成り立つ。

$$\partial_i \bar{u}_i = 0, \quad (D.5)$$

$$Re \bar{\partial}_i (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\bar{\partial}_i \bar{p} + \bar{\nabla}^2 \bar{u}_i, \quad (D.6)$$

$$C_{rPR} = \frac{\int_{|\bar{r}=1|} d\bar{s} \bar{p}}{Re \int_{|\bar{r}=1|} d\bar{s}}. \quad (D.7)$$

次節以降では、無次元化変数を示す指標  $\bar{\cdot}$  を省略する。

$Re \ll 1$  における、球形粒子に働く並進減圧係数の評価

Stokes 方程式で記述される場合

流体の粘性係数を  $\mu_f$ 、粒子の粘性係数を  $\mu_p$  とし、以下のように  $\lambda$  を定義する。

$$\lambda = \frac{2\mu_f + 3\mu_p}{4\mu_f + 4\mu_p} \quad (D.8)$$

このとき、固体粒子の場合には  $\mu_f \ll \mu_p$  より、 $\lambda = 3/4$ 。クリーンバブルの場合には  $\mu_f \gg \mu_p$  より、 $\lambda = 1/2$  である。従って、

$$\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{4},$$

である。

連続の式とストークス方程式は、それぞれ、以下のように書き表される。

$$\partial_i u_i = 0 \quad (D.9)$$

$$0 = -\partial_i p + \nabla^2 u_i \quad (D.10)$$

なお、粒子表面上での境界条件は、運動学的条件と、粒子表面上でのせん断応力の釣り合いによって表される。また、遠方での境界条件は、 $u_i - V_i = 0$  と、 $p = 0$  で記述される。

並進運動する球形粒子周りに形成される速度場は、ストークス方程式を解いて求めると、2階の等方テンソルと粒子速度との内積によって記述される。無限遠方での速度の境

界条件を満たす2階の等方テンソルは、モノポールのオゼンテンソルと3重極の調和関数の2種類であり、速度場は粒子表面での境界条件を満足するように等方テンソルの線形和によって記述される (Appendix C 参照)。抗力係数はオゼンテンソルの係数のみに依存し、 $32\lambda/Re$  と与えられる。また、圧力はダイポールの調和関数と速度との内積によって記述され、その大きさもまたオゼンテンソルの係数に比例する。式 (D.9)(D.10) を満たす解に関して、抗力係数と  $\lambda$  との関係、及び、運動学的条件により、粒子の外側での速度と圧力は以下のように書き表される。

$$u_i = \left( \delta_{ik} - \lambda a \left( \frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{x_j x_k}{r^3} \right) - \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) a^3 \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_j x_k}{r^5} \right) \right) V_k \quad (D.11)$$

$$p = \frac{2a\lambda x_i}{r^3} V_i = \frac{2a\lambda}{r^2} P_1(\cos\theta) V \quad (D.12)$$

ただし、粒子速度は  $V = 1$ 、粒子半径は  $a = 1$  である。このとき、並進減圧係数  $C_{TPR}$  は以下のように書き表される。

$$C_{TPR} = \frac{\int_{|r|=a} ds p}{Re \int_{|r|=a} ds} = \frac{4\pi a^3 \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_0(\cos\theta) p}{4\pi a^2 Re} \quad (D.13)$$

ここで、Legendre 関数の直交性を考えると、

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta P_0(\cos\theta) P_1(\cos\theta) = 0,$$

であるから、並進減圧係数は、

$$C_{TPR} = 0,$$

となる。

### Oseen 近似で記述される場合

オゼン近似 (Oseen, 1910) の方程式は

$$\partial_i u_i = 0 \quad (D.14)$$

$$Re V_j \partial_j u_i = -\partial_i p + \nabla^2 u_i \quad (D.15)$$

と書き表される。この方程式は、一見、 $Re \ll 1$  を摂動パラメタとしてナビエ=ストークス方程式を展開した式のようなものであるが、摂動方程式としては間違っていることが Proudman

& Pearson (1957) により指摘されている。オゼーン近似によって計算される抗力係数は、 $O(Re)$  のナビエ=ストークス方程式の近似解 (Proudman & Pearson, 1957) に一致するが、これは、偶然である。本節ではオゼーン近似を用いて計算される並進減圧係数は 0 となることを示し、次節でこの結果が正しくないことを示す。

運動量保存式 (式 (D.15)) の両辺の発散をとると、以下の関係が成り立つ。

$$\nabla^2 p = 0 \quad (D.16)$$

従って圧力  $p$  は調和関数である。  $r \rightarrow \infty$  で  $p \rightarrow 0$  となる関係を用いると、圧力  $p$  は形式的に以下のように書き表される。

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (D.17)$$

ここで、 $P_n(\cos \theta)$  は Legendre 関数、 $p_n$  は定数である。

さて、並進減圧係数  $C_{TPR}$  は、

$$C_{TPR} = - \frac{\int_{r=a} ds p}{Re \int_{r=a} ds} = - \frac{4\pi a^3 \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_0(\cos \theta) p}{4\pi a^2 Re} \quad (D.18)$$

と書き表される。従って、Legendre 関数の直交性を考慮すると、 $C_{TPR}$  にはモノポールに対する係数  $p_0$  のみに対して議論すればよい。  $p_0$  に対応する速度について、粘性項との対比により  $(V_i - u_i)$  は遠方で、

$$(V_i - u_i) \propto O(r^0), \text{ or } (V_i - u_i) \propto O(\log r).$$

である。つまり、 $p_0$  が 0 でない場合には  $r \rightarrow \infty$  で  $(V_i - u_i)$  は 0 に漸近しない。従って  $p_0 = 0$  であることが必要であり、オゼーン近似では並進減圧係数  $C_{TPR}$  が 0 である。なお、Clift *et al.* (1978, Sec. II) より、固体粒子の場合のオゼーン方程式の解について、粒子表面上での圧力は、

$$p_0 = 0, \quad p_1 = \frac{3}{2a} V, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{Re}{4a} V,$$

と与えられる。このことから、オゼーン近似での圧力は、ストークス方程式の解に対し、4重極の係数  $p_3$  のみが修正され、並進減圧への寄与が 0 である。

### Navier-Stokes 方程式の $Re$ 摂動展開式で記述される場合

ストークス展開 (例えば、Vasseur & Cox, 1977) にならない、 $Re$  を摂動パラメータとし、粒子近傍の速度と圧力を以下のように展開する。

$$u_i(Re, \mathbf{r}) = u_i^{(0)}(\mathbf{r}) + Re u_i^{(1)}(\mathbf{r}) + o(Re), \quad (D.19)$$

$$p(Re, \mathbf{r}) = p^{(0)}(\mathbf{r}) + Re p^{(1)}(\mathbf{r}) + o(Re), \quad (D.20)$$

このとき、 $O(Re^0)$  の方程式は、ストークス方程式と同じであり、以下のように書き表される。

$$\partial_i u_i^{(0)} = 0 \quad (D.21)$$

$$0 = -\partial_i p^{(0)} + \nabla^2 u_i^{(0)} \quad (D.22)$$

従って、粒子の外側における速度  $u_i^{(0)}$  と圧力  $p^{(0)}$  は、式 (D.11)(D.12) と同様に、それぞれ、以下のように書き表される。

$$u_i^{(0)} = \left( \delta_{ik} - \lambda a \left( \frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{x_i x_k}{r^3} \right) - \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) a^3 \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right) \right) V_k \quad (D.23)$$

$$p^{(0)} = \frac{2a\lambda x_i}{r^3} V_i \quad (D.24)$$

式 (D.24) より  $p^{(0)}$  が並進減圧係数  $C_{TPR}$  に及ぼす影響は、ストークス流の場合の議論より 0 となる。

次に、以下のように書き表される  $O(Re^1)$  の方程式を考える。

$$\partial_i u_i^{(1)} = 0 \quad (D.25)$$

$$\partial_j (u_i^{(0)} u_j^{(0)}) = -\partial_i p^{(1)} + \nabla^2 u_i^{(1)} \quad (D.26)$$

運動量保存式における粘性項は、ソレノイダルベクトルであり、その発散は 0 である。従って、 $O(Re)$  の運動量保存式の両辺の発散をとると、以下のように変形される。

$$(\partial_i u_j^{(0)})(\partial_j u_i^{(0)}) = -\nabla^2 p^{(1)} \quad (D.27)$$

ここで、 $p^{(1)}$  を以下のように分解する。

$$p^{(1)} = p^{(A)} + p^{(B)}, \quad (D.28)$$

$$\nabla^2 p^{(A)} \neq 0, \quad \nabla^2 p^{(B)} = 0. \quad (D.29)$$

従って、式 (D.27)(D.29) より、以下の関係が成り立つ。

$$(\partial_i u_j^{(0)})(\partial_j u_i^{(0)}) = -\nabla^2 p^{(A)}. \quad (D.30)$$

調和関数である  $p^{(B)}$  を、Legendre 関数を用いて表すと、形式的に以下のように書き表される。

$$p^{(B)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i^{(B)}}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (D.31)$$

このとき、並進減圧に寄与するのは  $p_0^{(B)}$  のみの部分である。しかしながら、オゼーン近似の場合の議論と同様に、 $p_0^{(B)}$  が 0 でない場合、 $p_0^{(B)}$  に対応する速度は、粘性項との対比により

$$u_i^{(1)} \propto O(r^0), \quad u_i^{(1)} \propto O(\log r),$$

となり、 $r \rightarrow \infty$  で  $u_i^{(1)}$  は 0 に漸近しない。従って、

$$p_0^{(B)} = 0,$$

でなくてはならず、 $p^{(B)}$  の並進減圧係数  $C_{TPR}$  に対する貢献は 0 である。

$\nabla^2 p^{(A)}$  は、式 (D.23)(D.30) より、以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} \nabla^2 p^{(A)} = & - \left\{ \lambda^2 a^2 \left( \frac{-2\delta_{kl} r^2 + 8x_k x_l}{r^6} \right) \right. \\ & + 2\lambda \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) a^4 \left( \frac{-18x_k x_l}{r^8} \right) \\ & \left. + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right)^2 a^6 \left( \frac{18\delta_{kl} r^2 + 36x_k x_l}{r^{10}} \right) \right\} V_k V_l. \end{aligned} \quad (D.32)$$

さて、 $O(r^{\alpha-2})$  の 2 階のテンソルは、ラプラス演算を施された  $O(r^\alpha)$  の 2 階のテンソルを用いて以下のように書き表される。

$$\delta_{kl} r^{\alpha-2} = \frac{\delta_{kl}}{n(n+1)} \nabla^2 r^\alpha \quad (D.33)$$

$$x_k x_l r^{\alpha-4} = \frac{1}{(n-2)(n+3)} \nabla^2 \left( \frac{-2\delta_{kl} r^\alpha}{n(n+1)} + x_k x_l r^{\alpha-2} \right). \quad (D.34)$$

従って、式 (D.32) に含まれる 2 階のテンソルに対するラプラス演算の逆写像は以下のように書き表される。

$$(\nabla^2)^{-1} \frac{\delta_{kl}}{r^4} \rightarrow \frac{\delta_{kl}}{2r^2} + (\text{Harmonic Function}),$$

$$(\nabla^2)^{-1} \frac{\delta_{kl}}{r^8} \rightarrow \frac{\delta_{kl}}{30r^6} + (\text{Harmonic Function}),$$

$$(\nabla^2)^{-1} \frac{x_k x_l}{r^6} \rightarrow \frac{\delta_{kl}}{4r^2} - \frac{x_k x_l}{4r^4} + (\text{Harmonic Function}),$$

$$(\nabla^2)^{-1} \frac{x_k x_l}{r^8} \rightarrow -\frac{\delta_{kl}}{36r^4} + \frac{x_k x_l}{6r^6} + (\text{Harmonic Function}),$$

$$(\nabla^2)^{-1} \frac{x_k x_l}{r^{10}} \rightarrow -\frac{\delta_{kl}}{360r^6} + \frac{x_k x_l}{24r^8} + (\text{Harmonic Function}),$$

上記の関係を用いると、式(D.29)(D.32)より、 $p^{(A)}$ は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} p^{(A)} = & - \left\{ \lambda^2 a^2 \left( \frac{\delta_{kl}}{r^2} - \frac{2x_k x_l}{r^4} \right) \right. \\ & + \lambda \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) a^4 \left( \frac{\delta_{kl}}{r^4} - \frac{6x_k x_l}{r^6} \right) \\ & \left. + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right)^2 a^6 \left( \frac{\delta_{kl}}{2r^6} + \frac{3x_k x_l}{2r^8} \right) \right\} V_l V_k. \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

式(D.35)から、 $r \rightarrow \infty$ で $p^{(A)} \rightarrow 0$ が成り立ち、発散しないことがわかる。式(D.35)の  
関係を用いると、並進減圧係数は、以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} C_{TPR} &= \frac{\int_{|r|=a} ds \operatorname{Re} \left( p^{(A)}(r) - p^{(A)}(q) \Big|_{q \rightarrow \infty} \right)}{\operatorname{Re} V^2 \int_{|r|=a} ds} \\ &= \frac{1}{3} \lambda^2 - \lambda \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{4\lambda^2 - 6\lambda + 3}{12} \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

また、式(D.8)(D.36)から、並進減圧係数を流体と粒子の粘性係数を用いて表すと、以下  
のように書き表される。

$$C_{TPR} = \frac{4\mu_f^2 + 6\mu_f \mu_p + 3\mu_p^2}{48(\mu_f + \mu_p)^2} \quad (\text{D.37})$$

式(D.37)から、 $Re \rightarrow 0$ の極限では、並進減圧係数は0ではなく、ある一定値に漸近する  
ことがわかる。この結果は、Stokes方程式やOseen方程式を解いた結果と異なっている。  
式(D.37)より、気泡と固体粒子の場合の並進減圧係数は、それぞれ、以下のように書き  
表される。

$$C_{TPR} = \frac{1}{12}, \quad (\text{D.38})$$

$$C_{TPR} = \frac{1}{16}. \quad (\text{D.39})$$

有次元化すると、粒子表面上での平均圧力  $\bar{p}_s$  は以下のように書き表される。

$$\bar{p}_s = p_0 - C_{TPR}(\rho_f V^2) \quad (D.40)$$

ここで、 $p_0$  は無限遠における圧力、 $\rho_f$  は流体の密度を、 $V$  は粒子と流体との相対速度である。

### ポテンシャル流 (渦度なし流れ) 中の球形粒子に働く並進減圧係数

ポテンシャル流中の圧力は

$$p - p_0 = -\rho_f \frac{a^6}{8} \left( \frac{\partial_k^2}{r^6} + \frac{3x_k x_l}{r^8} \right) V_k V_l \quad (D.41)$$

である。この式を表面積分することによって、並進減圧係数は以下のように求まる (例えば、Lamb, 1932)。

$$C_{TPR} = 1/4 \quad (D.42)$$

### 中間レイノルズ数における粒子に働く並進減圧の直接数値シミュレーション

本節では Direct Numerical Simulation (DNS) を行い、中間レイノルズ数での粒子に働く並進減圧を求める。球周りの NS 方程式の解法やパラメタの設定条件については、Appendix B で行った DNS と同じである。Appendix B では、球形気泡と固体粒子に対する抗力係数を調べ、Mei *et al.* (1994) や Mei (1993) の式と精度よく一致することを示している。従って、計算手法は妥当である。

### 粒子運動によって誘起される速度・境界層の厚さについて

粒子によって誘起される速度場に関して、半径方向の速度成分は、以下のように球面調和関数展開によって表される。

$$u_r(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{1n} \cos(\theta) - u_n^{(r)}(r)) Y_n(\theta). \quad (D.43)$$

周方向の速度成分については、連続の式より以下のように表される。

$$u_\theta(r, \theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 u_n^{(r)}(r)) Y_n^1(\theta) \quad (D.44)$$

ここで、球面調和関数は

$$Y_n(\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos\theta), \quad Y_n^1(\theta) = \sqrt{\frac{(2n+1)}{2\pi n(n+1)}} P_n^1(\cos\theta). \quad (D.45)$$

とし、Legendre 関数、Legendre 陪関数は、

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \quad P_n^1(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{dP_n(x)}{dx}, \quad (D.46)$$

である。また、 $u_n^{(r)}(r)$  は  $n$  次の半径方向速度の球面調和関数展開係数である。球面調和関数の直交性より、 $u_n^{(r)}(r)$  は以下の方程式で記述される。

$$u_n^{(r)}(r) = \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_n(\theta) (\delta_{1n} \cos(\theta) - u_r(r, \theta)). \quad (D.47)$$

ここで、粒子半径 ( $a$ ) と粒子が誘起する速度を用いて、以下に示されるように速度の展開係数をスケールリングする。

$$\bar{x} = x/a \quad (D.48)$$

$$\bar{u}_n^{(r)}(\bar{x}) = \frac{u_n^{(r)}(x)}{u_1^{(r)}(a)} \quad (D.49)$$

球面調和関数の 1 次の展開係数に対応する  $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{x})$  は、粒子の進行方向の速度成分を表し、速度境界層の厚さと関連がある。

レイノルズ数が極限状態にある場合の  $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{x})$  について考えると、ポテンシャル流では、

$$\bar{u}_1^{(r)}(\bar{x}) = \bar{x}^{-3} \quad (D.50)$$

低レイノルズ数では、

$$\bar{u}_1^{(r)}(\bar{x}) = 2\lambda\bar{x}^{-1} + (1-2\lambda)\bar{x}^{-3} \quad (D.51)$$

と書き表される。ただし、 $\lambda$  は式 (D.8) で示される、分散相と連続相の粘性係数の関数である。 $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{x})$  の計算結果について、図 D-2(球形固体粒子) と図 D-3(球形気泡) に示す。

図 D-2, D-3 より、低いレイノルズの場合、球形固体粒子や球形気泡が誘起する速度分布は、ともに、ストークス方程式の解とよく一致することがわかる。また、図 D-3 より、高いレイノルズの場合、球形気泡の  $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{x})$  の減衰過程はポテンシャル流の解に近い様子が示されている。それに対し、図 D-2 より、固体粒子の  $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{x})$  の減衰過程は、レイノルズが高くなってもポテンシャル流の解に漸近しないことがわかる。この違いをもたらす原因について、気泡の流線はレイノルズ数によらず剥離しないために物体前後での対称性が高いのに対し、固体粒子の流線は高レイノルズで剥離し、物体後方で循環し、非対称性が強くなるためであると考えられる。次節では、本節での  $\bar{u}_1^{(r)}(\bar{x})$  の挙動に関する考察を踏まえて、球形気泡や球形固体粒子に働く並進減圧の特徴について議論する。

## 球形粒子に働く並進減圧

粒子に働く並進減圧係数とレイノルズ数の関係を図 D-4 に示す。図 D-4 より、気泡の場合、レイノルズ数  $Re$  の増大に伴い、並進減圧係数  $C_{TPR}$  が単調増加する様子が示されている。気泡の場合、低い  $Re$  での  $C_{TPR}$  は、Stokes 方程式や Oseen 方程式を用いた解 ( $=0$ ) でなく、NS 方程式の  $Re$  摂動展開式を用いた理論解 (式 (D.38)) に近いことがわかる。また、高い  $Re$  での気泡の境界層はポテンシャル流に近いことが図 D-3 によって示されたが、図 D-4 から、 $C_{TPR}$  についてもポテンシャル流におけるの理論解 (式 (D.42)) に漸近している。

図 D-4 から、固体粒子の場合、低い  $Re$  での  $C_{TPR}$  は、気泡の場合と同様に、Stokes 方程式や Oseen 方程式を用いた解 ( $=0$ ) よりも、NS 方程式の  $Re$  摂動展開式を用いた理論解 (式 (D.39)) に近い。しかしながら、気泡の場合とは異なり、高レイノルズ数での固体粒子の  $C_{TPR}$  は、 $Re$  の増大に伴い、単調増加せずに、 $Re = 100$  付近で極大値をとり、それよりも大きなレイノルズ数は減少している。従って、固体粒子の  $C_{TPR}$  は高レイノルズ数でポテンシャル流の理論解に漸近しないことがわかる。

気泡に働く抗力係数について、ストークス流  $Re \rightarrow 0$  では、

$$C_D = \frac{16}{Re}$$

に漸近し、高レイノルズ数では Levich (1949) の散逸抵抗理論より

$$C_D = \frac{48}{Re}$$

に漸近する。また、気泡に働く並進減圧係数は、本研究での理論解析結果 (式 (D.38)) より、 $Re \rightarrow 0$  で、

$$C_{TPR} = \frac{1}{12}$$

高レイノルズ数で、

$$C_{TPR} = \frac{1}{4}$$

にそれぞれ漸近する。以上より、高レイノルズ数と低レイノルズ数の極限における、並進減圧係数と抗力係数の比は、ともに、

$$\frac{C_{TPR}}{C_D} = \frac{Re}{192} \quad (D.52)$$

である。このことから、中間レイノルズ数における並進減圧係数と抗力係数との比についてもまた、 $Re/192$  で整理できるのか調べる。図 D-5 のシンボルは、本計算によって得られた球形気泡に対する  $C_{TPR}/C_D$  とレイノルズ数との関係である。また、図中の線  $Re/192$  の線は、高レイノルズ数と低レイノルズ数の極限における、 $C_{TPR}/C_D$  の理論値を直線で

結んだものである。図 D-5 より、 $C_{TPR}/C_D$  は、全てのレイノルズ数に渡って、 $C_{TPR}/C_D$  の理論値にほぼ同一の値となることがわかる。この知見をもとに、より詳細な考察を次節で行う。

固体粒子に働く抗力係数は、ストークス流  $Re \rightarrow 0$  で、

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

に漸近する。また、固体粒子に働く並進減圧係数は、本研究での理論解析結果 (式 (D.39)) より、 $Re \rightarrow 0$  では、

$$C_{TPR} = \frac{1}{16}$$

である。従って、 $Re \rightarrow 0$  における並進減圧係数と抗力係数との比は

$$\frac{C_{TPR}}{C_D} = \frac{Re}{384} \quad (D.53)$$

と書き表される。図 D-4 より、固体粒子の場合の並進減圧係数はレイノルズ数が約 100 以下で、レイノルズ数に伴い単調増加であり、それを越えると減衰することがわかった。ここでは、式 (D.53) で書き表される低レイノルズ数での固体粒子の並進減圧係数の理論が、どの程度のレイノルズ数域までが適用できるのか、また、抗力係数と並進減圧係数の関係が中間レイノルズ数域ではどのような挙動を調べる。図 D-6 には、本計算によって得られた固体粒子に対する、 $C_{TPR}/C_D$  とレイノルズ数との関係を示す。この図より、レイノルズ数が約 2 までについては、低レイノルズ数域の理論と概ね一致しており、

$$C_{TPR}/C_D \propto Re$$

であることがわかる。また、図 D-6 よりレイノルズ数が高い場合には、 $C_{TPR}/C_D$  のレイノルズ数に対する勾配が緩慢になり、レイノルズ数が約 20 では、

$$C_{TPR}/C_D \propto Re^{0.7}$$

レイノルズ数が約 200 では、

$$C_{TPR}/C_D \propto Re^{0.4}$$

であることが示される。

## 球形気泡に働く並進減圧と抗力の関係に関する考察

図 D-5 に示されたように、気泡に働く並進減圧係数と抗力係数はレイノルズを用いて式 (D.52) のように整理される。ここでは、式 (D.52) の関係が、NS 方程式から直接導かれるものなのかを調べるとともに、球形気泡周囲の渦度と速度の関係について導く。

定常状態を仮定すると、運動量保存式は、以下のように書き表される。

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{D.54})$$

上式は、以下のように変形される。

$$-\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left( \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + p \right) = 0. \quad (\text{D.55})$$

上式の半径方向成分は以下のように書き表される。

$$-u_\theta \omega_\phi + \nu \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \omega_\phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + p \right) = 0. \quad (\text{D.56})$$

さて、半径方向速度  $u_r$ 、周方向速度  $u_\theta$ 、圧力  $p$ 、渦度  $\omega_\phi$  を以下のように Legendre 関数、Legendre 陪関数を用いて展開する。

$$u_r(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{rn}(r) P_n(\cos \theta) \quad (\text{D.57})$$

$$u_\theta(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\theta n}(r) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{D.58})$$

$$p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r) P_n(\cos \theta) \quad (\text{D.59})$$

$$\omega_\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\phi n}(r) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{D.60})$$

以下のように連続の式が記述されることから、

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{D.61})$$

周方向速度の展開係数  $u_{\theta n}$  は以下のように書き表される。

$$u_{\theta n}(r) = -\frac{1}{n(n+1)r} \frac{d}{dr} (r^2 u_{rn}(r)). \quad (\text{D.62})$$

また、以下のように渦度が記述されることから、

$$\omega_\phi(r, \theta) = \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \quad (\text{D.63})$$

渦度の展開係数  $\omega_{\phi n}$  は以下のように書き表される.

$$\omega_{\phi n}(r) = -\frac{1}{n(n+1)} \left( r \frac{d^2}{dr^2} + 4 \frac{d}{dr} - \frac{(n+2)(n-1)}{r} \right) u_{rn}(r). \quad (D.64)$$

境界条件に関して, 気泡の表面上での自由滑べり条件を課すと, 以下に示される関係が成り立つ.

$$S_{r\theta} = \frac{1}{2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\} = 0 \quad (r = a). \quad (D.65)$$

また, 運動学的条件より, 以下に示される関係が成り立つ.

$$u_r = 0 \quad (r = a). \quad (D.66)$$

式 (D.58)(D.60) (D.65)(D.66) より,  $\omega_\phi$  と  $u_\theta$  の展開係数は以下のように書き表される.

$$\omega_{\phi n} = \frac{2u_{\theta n}}{a} = 2 \frac{\partial u_{\theta n}}{\partial r} \quad (r = a). \quad (D.67)$$

式 (D.57)~(D.60) の関係を用いると, 半径方向の運動量保存式 (D.56) は, 以下のよう  
に書き表される.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ - \left( \sum_{m=1}^{\infty} u_{\theta m}(r) P_m^1(\cos \theta) \right) \omega_{\phi n}(r) P_n^1(\cos \theta) + \nu \frac{n(n+1)}{r} \omega_{\phi n}(r) P_n(\cos \theta) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_{rn}(r) P_n(\cos \theta) \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} u_{rm}(r) P_m(\cos \theta) \right) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_{\theta n}(r) P_n^1(\cos \theta) \right\} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} u_{\theta m}(r) P_m^1(\cos \theta) \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r) P_n(\cos \theta) \right\} \\ = & 0. \end{aligned} \quad (D.68)$$

式 (D.18) から, 並進減圧は圧力の 0 次の展開係数  $p_0$  と関連がある. Legendre 関数の直交性を用いて式 (D.68) の 0 次のモードを抽出すると, 以下に示される関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(n+1)}{2n+1} u_{\theta n}(r) \omega_{\phi n} \\ & + \frac{d}{dr} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} \{u_{rn}(r)\}^2 + \frac{n(n+1)}{2n+1} \{u_{\theta n}(r)\}^2 \right) + 2p_0(r) \right\} \\ = & 0. \end{aligned} \quad (D.69)$$

ここで, 主流速度を  $V$  と記述し, 式 (D.69) を  $r \in [a, \infty)$  の区間で積分することによって, 以下に示される関係を得る.

$$\begin{aligned} & - \int_a^\infty dr \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(n+1)}{2n+1} u_{\theta n}(r) \omega_{\phi n}(r) \right) \\ & + V^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \{u_{\theta n}(a)\}^2 + 2(p_0(\infty) - p_0(a)) \\ = & 0. \end{aligned} \quad (D.70)$$

上式より、並進減圧係数  $C_{TPR}$  は以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} C_{TPR} &= \frac{p_0(\infty) - p_0(a)}{V^2} \\ &= \frac{1}{V^2} \int_a^\infty dr \left( \sum_{n=1}^\infty \frac{n(n+1)}{2n+1} u_{\theta n}(r) \omega_{\phi n}(r) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} + \frac{1}{2V^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{n(n+1)}{2n+1} \{u_{\theta n}(a)\}^2. \end{aligned} \quad (D.71)$$

さて、定常状態において、単位時間当たりに失うポテンシャルエネルギーが場全体のエネルギー散逸率と釣り合うといった散逸抵抗理論 (例えば Stone, 1993 参照) に基づくと、気泡に働く抗力  $F$  と主流速度  $V$  との関係は以下のように書き表される。

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = FV = \int_V dV 2\nu S_{ij} S_{ij}. \quad (D.72)$$

上式におけるひずみ速度の 2 乗は、連続の式を用いて以下のように変形される。

$$\begin{aligned} S_{ij} S_{ij} &= \frac{1}{2} \omega_k \omega_k + (\partial_j u_i)(\partial_j u_i) \\ &= \frac{1}{2} \omega_k \omega_k + \partial_i \{(u_j \partial_j) u_i\}. \end{aligned} \quad (D.73)$$

従って、式 (D.72) は、以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} FV &= \int_V dV \nu \omega_k \omega_k + \int_V dV 2\nu \partial_i \{(u_j \partial_j) u_i\} \\ &= \nu \int_V dV \omega_\phi^2 - 2\nu \int_S dS n_i (u_j \partial_j) u_i. \end{aligned} \quad (D.74)$$

式 (D.74) の右辺第 2 項の被積分部分は、球形気泡表面上で、以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} n_i \{(u_j \partial_j) u_i\} &= \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ &= u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} \quad (r=a). \end{aligned} \quad (D.75)$$

式 (D.66) (D.67) より、球形気泡表面上での上式は以下のように書き表される。

$$n_i \{(u_j \partial_j) u_i\} = -\frac{a}{4} \omega_\phi^2 \quad (r=a). \quad (D.76)$$

従って、式 (D.74) は以下のように書き表される。

$$FV = \nu \int_V dV \omega_\phi^2 + \frac{\nu a}{2} \int_S dS \omega_\phi^2 \quad (D.77)$$

この式から、球形気泡に働く抗力  $F$  は、渦度場のみによって記述されることがわかる。式 (D.77) の積分操作に関し、以下のように展開される関数  $f(r, \theta)$  を考えると、

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) P(\cos \theta), \quad (D.78)$$

体積積分, 表面積分はそれぞれ以下のように書き表される.

$$\begin{aligned} \int_V dV f(r, \theta) &= 2\pi \int_a^\infty dr \int_0^\pi d\theta r^2 \sin \theta P_0(\cos \theta) f(r, \theta) \\ &= 4\pi \int_a^\infty dr r^2 f_0(r), \end{aligned} \quad (D.79)$$

$$\begin{aligned} \int_S dS f(r, \theta) &= 2\pi a^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_0(\cos \theta) f(r, \theta) \Big|_{r=a} \\ &= 4\pi a^2 f_0(r) \Big|_{r=a}. \end{aligned} \quad (D.80)$$

ここで, 渦度の 2 乗を以下に示されるように展開する.

$$\{\omega_\phi^2\}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\omega_\phi^2\}_n(r) P_n(\cos \theta). \quad (D.81)$$

渦度の自乗量の 0 次の展開係数  $\{\omega_\phi^2\}_0$  は, 以下のように書き表される.

$$\begin{aligned} \{\omega_\phi^2\}_0(r) &= \frac{\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_0(\cos \theta) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\phi n}(r) P_n^1(\cos \theta) \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{\phi m}(r) P_m^1(\cos \theta) \right)}{\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_0(\cos \theta) P_0(\cos \theta)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\phi n}(r)^2 \int_0^\pi d\theta P_n^1(\cos \theta) P_n^1(\cos \theta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \omega_{\phi n}(r)^2. \end{aligned} \quad (D.82)$$

式 (D.79) (D.80) (D.82) の関係を用いると, 式 (D.77) は以下のように書き表される.

$$FV = 4\pi\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \int_a^\infty dr (r\omega_{\phi n}(r))^2 + 2\pi\nu a^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \omega_{\phi n}(a)^2. \quad (D.83)$$

上式の  $FV$  を用いて抗力係数  $C_D$  を記述すると, 以下のように示される.

$$C_D = \frac{4(FV)}{(\pi\nu a) ReV^2} \quad (D.84)$$

式 (D.67) (D.71) (D.84) をまとめると, 抗力係数  $C_D$  と並進減圧係数  $C_{TPR}$  はそれぞれ以下のように書き表される.

$$C_D = \frac{16}{a ReV^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \int_a^\infty dr (r^2 \omega_{\phi n}(r))^2 + \frac{8a^2}{ReV^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \omega_{\phi n}(r)^2 \Big|_{r=a} \quad (D.85)$$

$$C_{TPR} = \frac{1}{V^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \int_a^\infty dr u_{\theta n}(r) \omega_{\phi n}(r) - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{8V^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \omega_{\phi n}(r)^2 \Big|_{r=a} \quad (D.86)$$

さて、図 D-5 には、式 (D.52) の関係が広いレイノルズ数に渡って近似的に成り立つことが示されていた。ここで、式 (D.52) の関係を式 (D.85)(D.86) に適用すると、以下に示される関係を得る。

$$V_{\text{trans}} + V_{\text{rot}} + S_{\omega\omega} \sim 6. \quad (\text{D.87})$$

ここで、 $V_{\text{trans}}$ ,  $V_{\text{rot}}$ ,  $S_{\omega\omega}$  はそれぞれ、周方向速度と渦度の体積積分、渦度の 2 乗の体積積分、渦度の 2 乗の表面積分の影響であり、以下のように書き表される。

$$V_{\text{trans}} = \frac{1}{V^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \int_a^{\infty} dr \, 12u_{\theta n}(r)\omega_{\theta n}(r) \quad (\text{D.88})$$

$$V_{\text{rot}} = -\frac{1}{V^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \int_a^{\infty} dr \, \frac{r^2 \omega_{\theta n}(r)^2}{a} \quad (\text{D.89})$$

$$S_{\omega\omega} = \frac{a^2}{V^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \omega_{\theta n}(r)^2 \Big|_{r=0} \quad (\text{D.90})$$

以上の結果より、式 (D.85) と式 (D.86) の右辺は、一見すると似た形式で記述されており、両者の間には何らかの相関がある可能性が示唆される。しかしながら、式 (D.87) ~ (D.90) に示された関係が、気泡表面上での自由滑り条件の下、NS 方程式の解として成り立つ必然性は不明である。図 D-5 に示された式 (D.52) の関係を NS 方程式から直接導き出すことは困難である。

さて、並進運動する球形気泡における式 (D.87)~(D.90) の関係を確認するために、図 D-7 に  $V_{\text{trans}}$ ,  $V_{\text{rot}}$ ,  $S_{\omega\omega}$  とレイノルズ数の関係を示す。ここでは、Appendix B で使った直接数値シミュレーションの結果を利用している。なお、式 (D.88)~(D.90) の算出は、まず半径方向速度を Legendre 関数の  $n \in [1, 9]$  の次数で展開し、式 (D.62)(D.64) の関係を用いることで、行っている。まず、図 D-7 から、 $O(1) < Re$  において、渦度と周方向速度の積の体積積分の影響  $V_{\text{trans}}$  はレイノルズ数が高いほど減衰するのに対して、渦度の 2 乗の表面積分の影響  $S_{\omega\omega}$  は逆に増大することがわかる。また、全てのレイノルズ数に対して負の値をとる渦度の 2 乗の体積積分の影響  $V_{\text{rot}}$  は  $V_{\text{trans}}$ ,  $S_{\omega\omega}$  に比べると小さい値であることが示される。また、レイノルズ数の変化に伴う  $V_{\text{trans}} + V_{\text{rot}} + S_{\omega\omega}$  の変化量は、 $V_{\text{trans}}$ ,  $V_{\text{rot}}$ ,  $S_{\omega\omega}$  それぞれの変化量に比べて十分に小さい。従って、 $V_{\text{trans}}$ ,  $V_{\text{rot}}$ ,  $S_{\omega\omega}$  の和は、式 (D.87) で書き表されているように、全てのレイノルズ数に渡ってほぼ一定値 6 であるといった、興味深い結果が、図 D-7 からも示される。

## まとめ

- 球形粒子に働く並進減圧を,  $0 < Re \ll 1$  の条件の下で理論的に求めた. ストークス近似・オゼーン近似を適用した場合には, 並進減圧は 0 と見積もられるのに対して, NS 方程式をストークス摂動展開した式を適用した場合には,  $Re \rightarrow 0$  で  $C_{TPR}$  が有限値 ( $O(Re^0)$ ) に漸近することを示した.
- 並進減圧係数のレイノルズ数依存性を, 直接数値シミュレーションによって調べた.

## - Clean bubble :

$C_{TPR}$  は低レイノルズ数でストークス摂動展開式を用いた理論解に漸近する. また, 高レイノルズ数でポテンシャル流の理論解に漸近する.  $C_{TPR}$  と  $C_D$  との間には, 以下の関係が成り立つ.

$$\frac{C_{TPR}}{C_D} \sim \frac{Re}{192}$$

さらに, この知見を基に, NS 方程式を展開することによって, 周方向速度と渦度の体積積分, 渦度の 2 乗の体積積分, 渦度の 2 乗の表面積分, の間に興味深い関係が成り立つことを示した.

## - 固体粒子 :

$C_{TPR}$  は低レイノルズ数でストークス摂動展開式を用いた理論解に漸近する. 中間レイノルズ数で球の後流の剥離の影響を受ける.

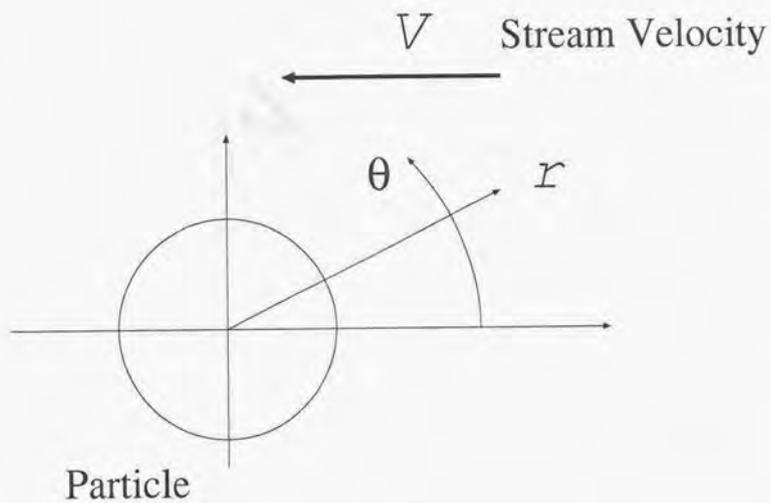


Fig. D-1 Schematic of present study

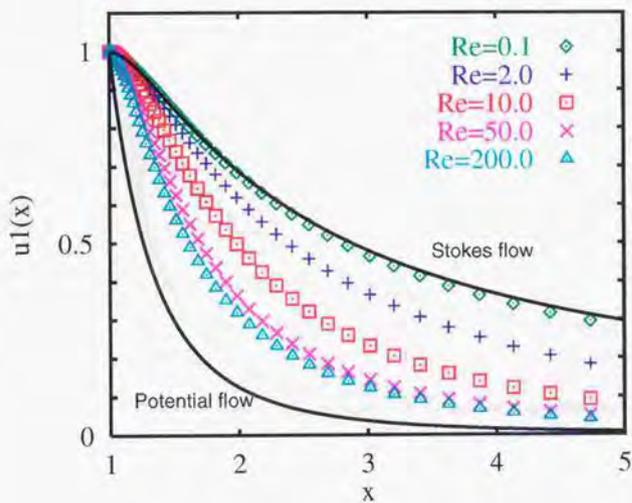


Fig. D-2  $\tilde{u}_1^{(r)}(\tilde{x})$  versus  $x$  of a rigid particle for various Reynolds number conditions.  
 ( $r_{max} \sim 300$ ,  $N_\theta=180$ ,  $N_r=100$ )

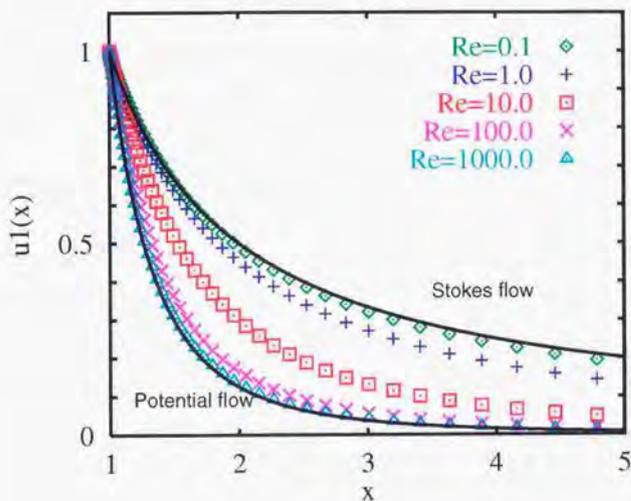


Fig. D-3  $\tilde{u}_1^{(r)}(\hat{x})$  versus  $x$  of a spherical bubble for various Reynolds number conditions.  
 ( $r_{max} \sim 300$ ,  $N_\theta=180$ ,  $N_r=100$ )

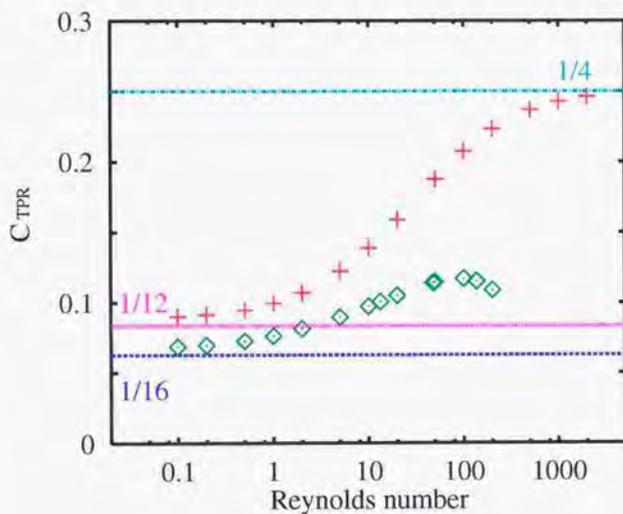


Fig. D-4 Translational pressure reduction coefficient versus Reynolds number.

( $\diamond$ : present DNS of solid particle;  $+$ : Present DNS of clean bubble; Line of  $C_{TPR} = 1/4$ : analytical solution of potential flow; Line of  $C_{TPR} = 1/12$ : analytical solution of spherical bubble for  $Re \ll 1$ ; Line of  $C_{TPR} = 1/16$ : analytical solution of spherical rigid particle for  $Re \ll 1$ )

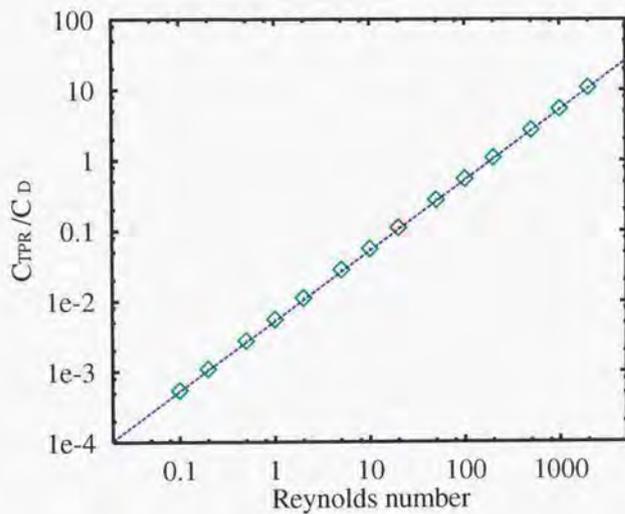


Fig. D-5  $C_{TPR}/C_D$  versus Reynolds number. (○: present DNS of a clean bubble; -: Theoretical solution for both Stokes and potential flow ( $Re/192$ ))

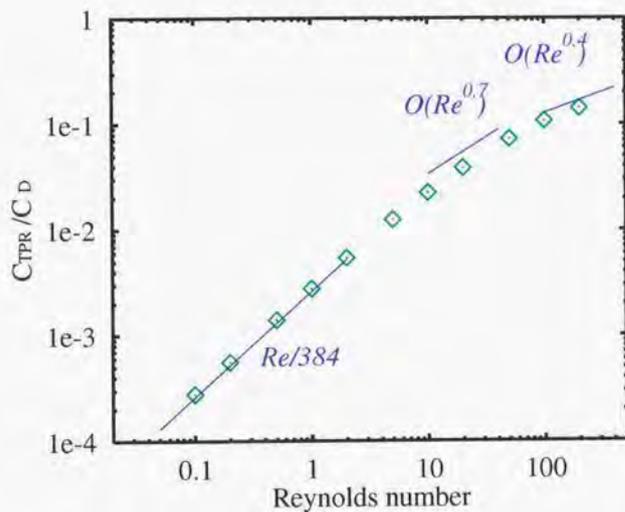


Fig. D-6  $C_{TPR}/C_D$  versus Reynolds number. ( $\diamond$ : present DNS of a rigid particle; —: Theoretical solution for Stokes flow ( $Re/384$ ),  $O(Re^{0.7})$  at  $Re \sim 20$  and  $O(Re^{0.4})$  at  $Re \sim 200$ .)

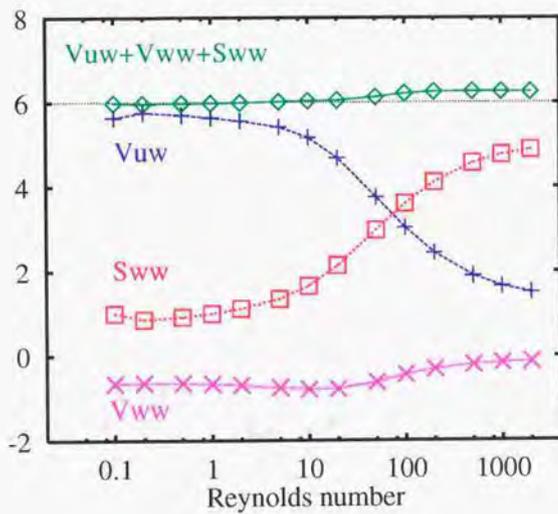


Fig. D-7  $V_{uw}$ ,  $V_{ww}$  and  $S_{ww}$ , versus Reynolds number. (See Eqns. (D.87)~(D.90))

## Appendix E

### 球形粒子が誘起する平均速度場の評価

はじめに

分散体(粒子や気泡)を含む流れでは、分散体が並進運動することにより、粒子近傍で粒子速度に近く、十分遠方で0となる速度場が誘起される。その速度場の分布は、境界条件やレイノルズ数に依存する。本章では、単一粒子が誘起する速度場の影響領域を評価する。

平均操作について

$\langle \cdot \rangle$  を流体位置における時空間に渡ったアンサンブル平均操作、 $u_i$  を粒子によって誘起された速度場とし、 $\langle u_i \rangle$  を評価する。粒子濃度  $\alpha$  が低い場合、すなわち粒子間の相互作用が小さい場合の粒子の誘起する速度場の影響領域は、粒子中心からの距離を  $r$  とすると、以下のように示されるものとする。

$$a \leq r \leq \alpha^{-1/3} a \quad (\text{E.1})$$

このとき、 $\langle u_i \rangle$  は単一粒子周りの速度  $u_i$  を用いて、以下のように近似される。

$$\langle u_i \rangle \sim \bar{u}_i \quad (\text{E.2})$$

ここで、

$$\alpha = \frac{a^3}{R^3} \quad (\text{E.3})$$

である。 $r \in [a, R]$  の球殻上での平均操作  $\bar{\cdot}$  を記述すると、例えば、適当な関数  $f(r, \theta, \phi)$  に対する平均値  $\bar{f}$  は以下のように書き表される。

$$\bar{f} = \frac{\int_a^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta f(r, \theta, \phi)}{\frac{4}{3} \pi a^3 (\alpha^{-1} - 1)}, \quad (\text{E.4})$$

ポテンシャル流中の  $\bar{u}_i$ 

無限静止流体中で粒子が誘起する速度を  $u_i$ , 粒子の並進速度を  $V_i$  と書き表すと, 以下のような関係が成り立つ.

$$u_i = -\frac{a^3}{2} \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right) V_k \quad (\text{E.5})$$

上記の方程式は, 粒子重心位置を中心点とした任意の球殻面で表面積分を施されると 0 になる. 従って,  $\bar{u}_i$  は以下のように書き表される.

$$\bar{u}_i = 0. \quad (\text{E.6})$$

ストークス流中の  $\bar{u}_i$ 

ストークス流の場合, 並進速度を  $V_i - u_i^{(\infty)}$ , 粒子がない場合の周囲の速度勾配を  $\partial_j u_i^{(\infty)}, \partial_j \partial_k u_i^{(\infty)} \dots$  と記述する. ここでは, 粒子周り速度の空間微分の影響 ( $R |\partial_j u_i^{(\infty)}|, R^2 |\partial_j \partial_k u_i^{(\infty)}| \dots$ ) に比べ, 並進速度  $|V_i - u_i^{(\infty)}|$  が同じオーダー, もしくは, 卓越している場合を考える. このとき, 粒子が誘起する  $\sigma_{ij}^{(p)}$  は,  $a/R$  を摂動パラメタとおくと, 以下のように展開される.

$$\begin{aligned} |u_i - u_i^{(\infty)}| &= O\left(\left(\frac{a}{R}\right)^0 |V_i - u_i^{(\infty)}|\right) + O\left(\left(\frac{a}{R}\right)^1 R |\partial_j u_i^{(\infty)}|\right) \\ &\quad + O\left(\left(\frac{a}{R}\right)^2 R^2 |\partial_j \partial_k u_i^{(\infty)}|\right) \\ &\quad + o\left(\left(\frac{a}{R}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

ここで, 粒子周りのストークス流れであることを考えると,  $O(a^1)$  の右辺第 2 項は, 奇数次の等方テンソルで記述されることから, 式 (E.5) で示される平均操作を施すと 0 になる. 従って,

$$|u_i - u_i^{(\infty)}| = O\left(\left(\frac{a}{R}\right)^0 |V_i - u_i^{(\infty)}|\right) + o\left(\left(\frac{a}{R}\right)^1\right) \quad (\text{E.8})$$

の関係が成り立つ. ここでは,  $O\left((a/R)^0\right)$  に対する,  $\bar{u}_i$  を, 無限静止流体中で粒子が誘起する速度  $u_i$  を粒子の並進速度  $V_i$  を用いて評価する.

流体と粒子の粘性係数をそれぞれ,  $\mu_f, \mu_p$  と書き表し, 以下のように示される,  $\lambda$  を定義する.

$$\lambda = \frac{2\mu_f + 3\mu_p}{4\mu_f + 4\mu_p}. \quad (\text{E.9})$$

このとき、粒子の誘起する速度場  $u_i$  は以下のように書き表される。

$$u_i = \left\{ \lambda a \left( \frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{x_i x_k}{r^3} \right) + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) a^3 \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right) \right\} V_k \quad (\text{E.10})$$

以下の関係を用いると、

$$\int_r dS \left( \frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{x_i x_k}{r^3} \right) = 4\pi r^2 \times \frac{4\delta_{ik}}{3r}, \quad (\text{E.11})$$

$$\int_s dS \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right) = 0, \quad (\text{E.12})$$

$$\int_a^R 4\pi r^2 \frac{4\delta_{ik}}{3r} = \frac{8\pi\delta_{ik}}{3} (R^2 - a^2) \quad (\text{E.13})$$

平均速度は以下のように評価される。

$$\bar{u}_i = 2\lambda \frac{\alpha^{1/3} - \alpha}{1 - \alpha} V_i \quad (\text{E.14})$$

を得る。従って、ストークス流中の  $\bar{u}_i$  について、固体粒子の場合 ( $\lambda = 3/4$ ) は、

$$\bar{u}_i = \frac{3}{2} \frac{\alpha^{1/3} - \alpha}{1 - \alpha} V_i \quad (\text{E.15})$$

球形気泡の場合 ( $\lambda = 1/2$ ) は、

$$\bar{u}_i = \frac{\alpha^{1/3} - \alpha}{1 - \alpha} V_i \quad (\text{E.16})$$

と見積もられる。

$\bar{u}_i$  に関する、計算と理論との比較中間レイノルズ数域における挙動

実際の分散体の誘起する平均速度場は、粒子体積率が高い場合には粒子間の相互作用により、粒子の誘起する速度場が単一粒子の場合とは異なってくる。従って、上述した議論は粒子濃度が低いときのみ有効である。ただし、本章で分散体の誘起する平均速度場を評価する際に、粒子体積率の影響は球形粒子を中心とする球殻面半径と粒子径との比のみによって考慮されており、粒子体積率が高い場合には、粒子の近傍での速度分布によって決定される。従って、粒子体積率が高い場合の  $\bar{u}_i$  に対する議論は、実際の分散体の誘起する平均速度場とは物理的に異なるものの、粒子近傍の速度分布の性質を明らかにする上で重要である。そこで、本節では、 $\bar{u}_i$  の評価には広い粒子体積率に渡って行うのが適当であると考え、その理論・計算結果について示す。

図 E-1, E-2 には単一粒子速度場によって見積もられる平均速度の粒子の進行方向成分  $\bar{u}_z$  と粒子体積率  $\alpha$  との関係で示され、それぞれ、球形気泡、固体粒子の場合である。

また、図 E-1, E-2 には、ポテンシャル流の場合の  $\bar{u}_x$  (式 (E.6)) とストークス流れの場合の  $\bar{u}_x$  (式 (E.14)(E.15)(E.16)) が示されている。球形気泡の  $\bar{u}_x$  と  $\alpha$  の関係について、図 E-1 から、低レイノルズ数ではストークス流れの解に、高レイノルズ数ではポテンシャル流の解にそれぞれ漸近することが示される。また、レイノルズ数が高いほど、粒子の誘起する平均速度は単調に小さくなることが示される。気泡表面上での境界が自由滑り条件で与えられる場合、気泡表面上の速度は滑りを許すので、図 E-1 より、 $\alpha$  が 1 近くでも有限の値を持つ。球形固体粒子の  $\bar{u}_x$  と  $\alpha$  の関係について、図 E-2 より、気泡の場合と同様低レイノルズ数ではストークス流れの解に、漸近する様子が示される。これに対し、高レイノルズ数ではポテンシャル流の解に漸近しないことが示される。これは、固体粒子の表面での速度滑りが 0 であり、 $\alpha \rightarrow 1$  で、 $\bar{u}_x$  が粒子の速度に近づくのに対してポテンシャル流の解では全ての  $\alpha$  で  $\bar{u}_x = 0$  であり、当然である。また、図 E-2 より気泡の場合と同様にレイノルズ数が高いほど、粒子の誘起する平均速度は単調に小さくなることが示される。固体粒子の場合、高レイノルズ数では剥離が起きるためその後流の影響は十分遠方まで効いてくることが知られている。しかし、図 E-2 に示された範囲のレイノルズ数では、レイノルズ数が高いほど、後流が遠方まで伸びていく影響よりも、境界層の厚さが薄くなり粒子の影響領域が狭くなる効果の方が強く、その結果、粒子の誘起する平均速度は単調に小さくなる。従って、粒子の剥離渦の影響について、式 (E.4) のような 1 次のモーメントによる速度の平均操作で記述することは適当でなく、より高次のモーメントとして表現する必要がある。

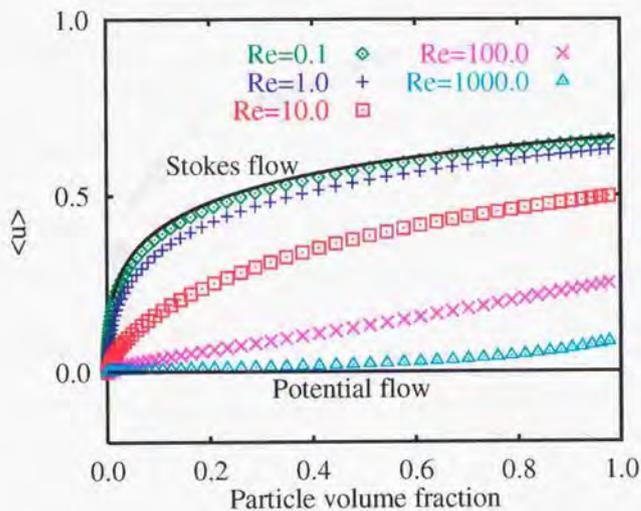


Fig. E-1  $\langle u_x \rangle$  versus  $\alpha$  (DNS results of a flow around a clean bubble for various Reynolds number conditions)

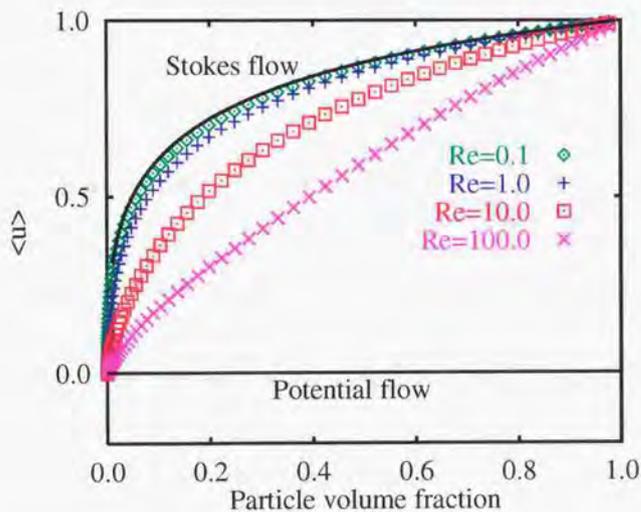


Fig. E-2  $\langle u_x \rangle$  versus  $\alpha$  (DNS results of a flow around a rigid particle for various Reynolds number conditions)

## Appendix F

### 球形粒子が誘起するバルク乱れの評価

#### はじめに

分散体(粒子や気泡)を含む流れでは、分散体が並進運動することにより、境界条件に応じた速度場が形成される。この速度場に対して時空間に渡る平均化操作を施すことにより、乱れエネルギーに相当する2次のモーメント量が求まる。このような、分散体の並進運動によって誘起される乱れは、その生成機構が一般的な単相乱流の乱れとは異なっていることから、区別して、「疑似乱れ(PseudoTurbulence)」と呼ばれている(例えば、Lance & Battaile, 1991; 村井, 1996)。疑似乱れに関する理論的研究として、Biesheuvel & van Wijngaarden (1984) は粒子の並進運動・体積運動によって誘起される応力を「バルク応力テンソル」と定義し、これをポテンシャル流中の単一球形粒子の速度場を用いて評価している。そして、バルクの乱れエネルギーが  $1/4 \times (\text{ポイド率}) \times \text{粒子速度の2乗}$  で表されること、また、粒子の進行方向とその垂直方向に対する乱れが、4:3であることを示している。また、Lance & Battaile (1991) の格子乱流中における気泡流の実験によると、気泡がもたらす乱れが、Biesheuvel & vanWijngaarden (1984) の理論結果と整合することを示している。しかし、気泡レイノルズ数について、Biesheuvel & van Wijngaarden (1984) の解析では高い場合の理論(渦無し流れ)に基づかれていること、また、Lance & Battaile (1991) の実験では、 $O(10^3)$  であることを考慮すると、いずれの場合も本論文の第3章、第4章で議論した気泡レイノルズ数に比べ、非常に高い値である。また、本研究では、主に気液界面の境界条件に滑りなし条件を課しており、渦度の生成が重要である。従って、渦度なしの流れを想定したポテンシャル理論を用いた Biesheuvel & van Wijngaarden (1984) の解析結果とは異なる「疑似乱れ」が生成されていると考えられる。

本章では、粒子体積率が低く一様な場を対象として、単一粒子が誘起するバルク応力について評価し、レイノルズ数や境界条件の影響について調べる。まず、はじめに、Biesheuvel & van Wijngaarden (1984) の方法にならって、ポテンシャル流中における単一粒子の速

度場から、粒子の誘起するバルク応力テンソルを導出する過程を示す。そして、同様な過程を経て、任意の粘性比の場合におけるストークス流の場合の粒子が誘起するバルク応力について評価する。最後に、DNSの結果をもとに、球形固体粒子と球形気泡の場合の分散体が誘起するバルク応力について算出する。

### バルク応力テンソルの定義とその近似方法

粒子の速度場が誘起するバルク応力  $\sigma_{ij}^{(p)}$  は以下のように書き表される。

$$\sigma_{ij}^{(p)} = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \quad (\text{F.1})$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$  は流体位置における時空間に渡ったアンサンブル平均操作、 $u_i$  は粒子によって誘起された速度場である。粒子濃度  $\alpha$  が低い場合、すなわち粒子間の相互作用が小さい場合の粒子の誘起する速度場の影響領域は、粒子中心からの距離を  $r$  とすると、以下のよう示されるものとする。

$$a \leq r \leq \alpha^{-1/3} a \quad (\text{F.2})$$

このとき、 $\sigma_{ij}^{(p)}$  は単一粒子周りの速度  $u_i$  を用いて、以下のように近似される。

$$\sigma_{ij}^{(p)} \sim \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (\text{F.3})$$

ここで、

$$\bar{\cdot} = \frac{a^3}{R^3} \quad (\text{F.4})$$

である。また、 $\overline{\cdot}$  は  $r \in [a, R]$  の球殻上での平均操作であり、例えば、適当な関数  $f(r, \theta, \phi)$  に対する平均値  $\bar{f}$  は以下のように書き表される

$$\bar{f} = \frac{\int_a^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta f(r, \theta, \phi)}{\frac{4}{3} \pi a^3 (\alpha^{-1} - 1)}, \quad (\text{F.5})$$

である。

### ポテンシャル流中の $\sigma_{ij}^{(p)}$

本節では、Biesheuvel & van Wijngaarden (1984) の手法にならって、ポテンシャル流中における単一粒子の速度場から、粒子の誘起するバルク応力テンソルを導出する過程を示す。無限静止流体中で粒子が誘起する速度を  $u_i$ 、粒子の並進速度を  $V_i$  と書き表すと、以下のような関係が成り立つ。

$$u_i = -\frac{a^3}{2} \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right) V_k \quad (\text{F.6})$$

従って,  $u_i u_j$  は以下のように書き表される.

$$\begin{aligned} u_i u_j &= \frac{a^6}{4} \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right) \left( \frac{\delta_{jl}}{r^3} - \frac{3x_j x_l}{r^5} \right) V_k V_l \\ &= \frac{a^6}{4} \left( \frac{\delta_{ik} \delta_{jl}}{r^6} - \frac{3\delta_{ik} x_j x_l + 3\delta_{jl} x_i x_k}{r^8} + \frac{9x_i x_j x_k x_l}{r^{10}} \right) V_k V_l \end{aligned} \quad (F.7)$$

$r = \text{const.}$  において, 表面積分を行うと, 以下のように書き表される.

$$\begin{aligned} \int_r dS u_i u_j &= 4\pi r^2 \frac{a^6}{4} \left( \frac{\delta_{ik} \delta_{jl}}{r^6} - \frac{\delta_{ik} \delta_{jl} r^2 + \delta_{jl} \delta_{ik} r^2}{r^8} + \frac{3(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk})}{5r^{10}} \right) V_k V_l \\ &= \frac{\pi a^6}{5r^4} (-2\delta_{ik} \delta_{jl} + 3\delta_{ij} \delta_{kl} + 3\delta_{il} \delta_{jk}) V_k V_l \\ &= \frac{\pi a^6}{5r^4} (3\delta_{ij} |V|^2 + V_i V_j) \end{aligned} \quad (F.8)$$

さらに, 半径方向に対して,  $r: a \rightarrow R$  で積分すると, 以下のように書き表される.

$$\int_a^R dr \int_r dS u_i u_j = \frac{\pi a^6}{15} (a^{-3} - R^{-3}) (3\delta_{ij} |V|^2 + V_i V_j) \quad (F.9)$$

ポテンシャル流では,  $\bar{n}_i = 0$  であるので, 分散体が誘起するバルク応力テンソル  $\sigma_{ij}^{(p)}$  は, 以下のように見積もられ, Biesheuvel & van Wijngaarden (1984) と同様な解を得る.

$$\sigma_{ij}^{(p)} = \frac{\alpha}{20} (3\delta_{ij} |V|^2 + V_i V_j) \quad (F.10)$$

### ストークス流中の $\sigma_{ij}^{(p)}$

ストークス流の場合, 並進速度を  $V_i - u_i^{(\infty)}$ , 粒子がない場合の周囲の速度勾配を  $\partial_j u_i^{(\infty)}, \partial_j \partial_k u_i^{(\infty)} \dots$  と記述する. ここでは, 粒子周り速度の空間微分の影響 ( $R |\partial_j u_i^{(\infty)}|, R^2 |\partial_j \partial_k u_i^{(\infty)}| \dots$ ) に比べ, 並進速度  $|V_i - u_i^{(\infty)}|$  が同じオーダー, もしくは, 卓越している場合を考える. このとき, 粒子が誘起する  $\sigma_{ij}^{(p)}$  は,  $a/R$  を摂動パラメタとおくと, 以下のように展開される.

$$\begin{aligned} |u_i - u_i^{(\infty)}|^2 &= O\left(\left(\frac{a}{R}\right)^0 |V_i - u_i^{(\infty)}|^2\right) + O\left(\left(\frac{a}{R}\right)^1 |V_i - u_i^{(\infty)}| R |\partial_j u_i^{(\infty)}|\right) \\ &\quad + O\left(\left(\frac{a}{R}\right)^2 R^2 |\partial_j \partial_k u_i^{(\infty)}|^2\right) + O\left(\left(\frac{a}{R}\right)^2 |V_i - u_i^{(\infty)}| R^2 |\partial_j \partial_k u_i^{(\infty)}|\right) \\ &\quad + o\left(\left(\frac{a}{R}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (F.11)$$

ここで, 粒子周りのストークス流れであることを考えると,  $O(a^1)$  の右辺第2項は, 奇数次の等方テンソルで記述されることから, 式(F.5)で示される平均操作を施すと0になる.

従って、

$$|u_i - u_i^{(\infty)}|^2 = O\left(\left(\frac{a}{R}\right)^0 |V_i - u_i^{(\infty)}|^2\right) + o\left(\left(\frac{a}{R}\right)^1\right) \quad (\text{F.12})$$

の関係が成り立つ。ここでは、 $O\left(\left(\frac{a}{R}\right)^0\right)$  に対する、 $\sigma_{ij}^{(p)}$  を、無限静止流体中で粒子が誘起する速度  $u_i$  を粒子の並進速度  $V_i$  を用いて評価する。

流体と粒子の粘性係数をそれぞれ、 $\mu_f, \mu_p$  と書き表し、以下のように示される、 $\lambda$  を定義する。

$$\lambda = \frac{2\mu_f + 3\mu_p}{4\mu_f + 4\mu_p} \quad (\text{F.13})$$

このとき、粒子の誘起する速度場  $u_i$  は以下のように書き表される。

$$u_i = \left\{ \lambda a \left( \frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{x_i x_k}{r^3} \right) + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) a^3 \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right) \right\} V_k \quad (\text{F.14})$$

上式より、 $u_i u_j$  は以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} u_i u_j &= \left\{ \lambda a \left( \frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{x_i x_k}{r^3} \right) + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) a^3 \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \lambda a \left( \frac{\delta_{jl}}{r} + \frac{x_j x_l}{r^3} \right) + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) a^3 \left( \frac{\delta_{jl}}{r^3} - \frac{3x_j x_l}{r^5} \right) \right\} V_k V_l \\ &= \left\{ \lambda^2 a^2 \left( \frac{\delta_{ik} \delta_{jl}}{r^2} + \frac{\delta_{ik} x_j x_l + \delta_{jl} x_i x_k}{r^4} + \frac{x_i x_j x_k x_l}{r^6} \right) \right. \\ &\quad + \lambda \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) a^4 \left( \frac{2\delta_{ik} \delta_{jl}}{r^4} - \frac{2\delta_{ik} x_j x_l + 2\delta_{jl} x_i x_k}{r^6} - \frac{6x_i x_j x_k x_l}{r^8} \right) \\ &\quad \left. + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right)^2 a^6 \left( \frac{\delta_{ik} \delta_{jl}}{r^6} - \frac{3\delta_{ik} x_j x_l + 3\delta_{jl} x_i x_k}{r^8} + \frac{9x_i x_j x_k x_l}{r^{10}} \right) \right\} V_k V_l \quad (\text{F.15}) \end{aligned}$$

ここで、以下に示される関係を用いて、 $\overline{u_i u_j}$  を求める。

$$\int_r dS \left( \frac{\delta_{ik} \delta_{jl}}{r^2} + \frac{\delta_{ik} x_j x_l + \delta_{jl} x_i x_k}{r^4} + \frac{x_i x_j x_k x_l}{r^6} \right) = 4\pi r^2 \left( \frac{26\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}}{15r^2} \right), \quad (\text{F.16})$$

$$\int_r dS \left( \frac{2\delta_{ik} \delta_{jl}}{r^4} - \frac{2\delta_{ik} x_j x_l + 2\delta_{jl} x_i x_k}{r^6} - \frac{6x_i x_j x_k x_l}{r^8} \right) = 4\pi r^2 \left( \frac{4\delta_{ik} \delta_{jl} - 6\delta_{ij} \delta_{kl} - 6\delta_{il} \delta_{jk}}{15r^4} \right), \quad (\text{F.17})$$

$$\int_r dS \left( \frac{\delta_{ik} \delta_{jl}}{r^6} - \frac{3\delta_{ik} x_j x_l + 3\delta_{jl} x_i x_k}{r^8} + \frac{9x_i x_j x_k x_l}{r^{10}} \right) = 4\pi r^2 \left( \frac{-2\delta_{ik} \delta_{jl} + 3\delta_{ij} \delta_{kl} + 3\delta_{il} \delta_{jk}}{5r^6} \right), \quad (\text{F.18})$$

$$\int_a^R dr \left( 4\pi r^2 \left( \frac{26\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}}{15r^2} \right) \right) = 4\pi (R-a) \left( \frac{26\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}}{15} \right), \quad (\text{F.19})$$

$$\int_a^R dr \left( 4\pi r^2 \left( \frac{4\delta_{ik}\delta_{jl} - 6\delta_{ij}\delta_{kl} - 6\delta_{il}\delta_{jk}}{15r^3} \right) \right) = 4\pi \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right) \left( \frac{4\delta_{ik}\delta_{jl} - 6\delta_{ij}\delta_{kl} - 6\delta_{il}\delta_{jk}}{15} \right), \quad (\text{F.20})$$

$$\int_a^R dr \left( 4\pi r^2 \left( \frac{-2\delta_{ik}\delta_{jl} + 3\delta_{ij}\delta_{kl} + 3\delta_{il}\delta_{jk}}{5r^6} \right) \right) = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{R^3} \right) \left( \frac{-2\delta_{ik}\delta_{jl} + 3\delta_{ij}\delta_{kl} + 3\delta_{il}\delta_{jk}}{5} \right). \quad (\text{F.21})$$

よって、 $\overline{u_i u_j}$  は以下のように示される。

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} &= \frac{\alpha^{2/3} - \alpha}{1 - \alpha} \lambda^2 \left( \frac{\delta_{ij}|V|^2}{5} + \frac{27V_i V_j}{5} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha - \alpha^{4/3}}{1 - \alpha} \lambda \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{6\delta_{ij}|V|^2}{5} - \frac{2V_i V_j}{5} \right) \\ &\quad + \alpha \left( \lambda - \frac{1}{2} \right)^2 \left( \frac{3\delta_{ij}|V|^2}{5} + \frac{V_i V_j}{5} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

また、平均速度については、

$$\int_r dS \left( \frac{\delta_{ik}}{r} + \frac{x_i x_k}{r^3} \right) = 4\pi r^2 \times \frac{4\delta_{ik}}{3r}, \quad (\text{F.23})$$

$$\int_r dS \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right) = 0, \quad (\text{F.24})$$

$$\int_a^R 4\pi r^2 \frac{4\delta_{ik}}{3r} = \frac{8\pi\delta_{ik}}{3} (R^2 - a^2) \quad (\text{F.25})$$

の関係を用いて、

$$\bar{u}_i = 2\lambda \frac{\alpha^{1/3} - \alpha}{1 - \alpha} V_i \quad (\text{F.26})$$

を得る。従って、ストークス流の分散体が誘起するバルク応力テンソル  $\sigma_{ij}^{(p)}$  は、以下のように評価される。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(p)} &= \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ &= \lambda^2 \left( \frac{\alpha^{2/3} - \alpha}{5(1 - \alpha)} \delta_{ij}|V|^2 + \frac{7\alpha^{2/3} - 27\alpha + 40\alpha^{4/3} - 27\alpha^{5/3} + 7\alpha^2}{5(1 - \alpha)^2} V_i V_j \right) \\ &\quad + \frac{\alpha - \alpha^{4/3}}{1 - \alpha} \lambda \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{6\delta_{ij}|V|^2}{5} - \frac{2V_i V_j}{5} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3\delta_{ij}|V|^2}{5}+\frac{V_iV_j}{5}\right) \\
= & \lambda^2\left(\frac{\alpha^{2/3}}{5(1+\alpha^{1/3}+\alpha^{2/3})}\delta_{ij}|V|^2+\frac{\alpha^{2/3}(7-13\alpha^{1/3}+7\alpha^{2/3})}{5(1+\alpha^{1/3}+\alpha^{2/3})^2}V_iV_j\right) \\
& +\frac{\alpha}{1+\alpha^{1/3}+\alpha^{2/3}}\lambda\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{6\delta_{ij}|V|^2}{5}-\frac{2V_iV_j}{5}\right) \\
& +\alpha\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3\delta_{ij}|V|^2}{5}+\frac{V_iV_j}{5}\right) \tag{F.27}
\end{aligned}$$

従って、ストークス流中の分散体のバルク応力テンソル  $\sigma_{ij}^{(p)}$  について、固体粒子の場合 ( $\lambda = 3/4$ ) は、

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(p)} = & \frac{9}{80}\left(\frac{\alpha^{2/3}}{1+\alpha^{1/3}+\alpha^{2/3}}\delta_{ij}|V|^2+\frac{\alpha^{2/3}(7-13\alpha^{1/3}+7\alpha^{2/3})}{(1+\alpha^{1/3}+\alpha^{2/3})^2}V_iV_j\right) \\
& -\frac{3\alpha}{40(1+\alpha^{1/3}+\alpha^{2/3})}\left(3\delta_{ij}|V|^2+V_iV_j\right) \\
& +\frac{\alpha}{80}\left(3\delta_{ij}|V|^2+V_iV_j\right) \tag{F.28}
\end{aligned}$$

球形気泡の場合 ( $\lambda = 1/2$ ) は、

$$\sigma_{ij}^{(p)} = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^{2/3}}{5(1+\alpha^{1/3}+\alpha^{2/3})}\delta_{ij}|V|^2+\frac{\alpha^{2/3}(7-13\alpha^{1/3}+7\alpha^{2/3})}{5(1+\alpha^{1/3}+\alpha^{2/3})^2}V_iV_j\right) \tag{F.29}$$

と見積もられる。

シミュレーション結果からを用いた  $\sigma_{ij}^{(p)}$  の算出方法

球座標系  $(r, \theta, \phi)$  に基づく DNS の定常解の結果を用いて、中間レイノルズ数域における  $\sigma_{ij}^{(p)}$  を算出する。ここで、粒子の進行方向を  $x$ 、それに垂直な方向を  $y, z$  を書き表す。 $\sigma_{ij}^{(p)}$  について、その対称性より以下の関係が成り立つ。

$$\sigma_{yy}^{(p)} = \sigma_{zz}^{(p)}, \tag{F.30}$$

$$\sigma_{xy}^{(p)} = \sigma_{yz}^{(p)} = \sigma_{yx}^{(p)} = \sigma_{zy}^{(p)} = \sigma_{xz}^{(p)} = \sigma_{zx}^{(p)} = 0. \tag{F.31}$$

$x, y, z$  のそれぞれの方向に対する速度成分は、以下のように書き表される。

$$u_x(r, \theta) = u_r(r, \theta) \cos \theta - u_\theta(r, \theta) \sin \theta \tag{F.32}$$

$$u_y(r, \theta, \phi) = (u_r(r, \theta) \sin \theta + u_\theta(r, \theta) \cos \theta) \cos \phi \tag{F.33}$$

$$u_z(r, \theta, \phi) = (u_r(r, \theta) \sin \theta + u_\theta(r, \theta) \cos \theta) \sin \phi \tag{F.34}$$

$x$  方向の速度の平均値は、以下のように書き表される。

$$\bar{u}_x = \frac{2\pi \int_a^R dr \int_0^\pi d\theta \sin\theta (u_x(r, \theta))}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - a^3)} \quad (\text{F.35})$$

また、 $y, z$  方向の速度の平均値は、対称性より、0である。

以上の関係を用いて、

$$\sigma_{xx} = \frac{2\pi \int_a^R dr \int_0^\pi d\theta \sin\theta (u_x(r, \theta))^2}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - a^3)} - \bar{u}_x^2 \quad (\text{F.36})$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{\pi \int_a^R dr \int_0^\pi d\theta \sin\theta (u_r(r, \theta) \sin\theta + u_\theta(r, \theta) \cos\theta)^2}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - a^3)} \quad (\text{F.37})$$

$\sigma_{ij}^{(p)}$  に関する、計算と理論との比較中間レイノルズ数域における挙動

実際の分散体の誘起するバルク応力は、粒子体積率が高い場合には粒子間の相互作用により、粒子の誘起する速度場が単一粒子の場合とは異なってくる。従って、式(F.10)で示されるポテンシャル流の  $\sigma_{ij}^{(p)}$  (Biesheuvel & van Wijngaarden, 1984) や式(F.27)で示されるストークス流の  $\sigma_{ij}^{(p)}$  は、粒子濃度が低いときのみ有効である。ただし、本章でバルク応力を評価する際に、粒子体積率の影響は球形粒子を中心とする球殻面半径と粒子径との比のみによって考慮されており(式(F.3)), 粒子体積率が高い場合の式(F.10)(F.27)の値は、粒子の近傍での速度分布によって決定される。従って、粒子体積率が高い場合の  $\sigma_{ij}^{(p)}$  に対する議論は、実際の粒子の誘起するバルク応力とは物理的に異なるものの、粒子近傍の速度分布の性質を明らかにする上で重要である。そこで、本節では、 $\sigma_{ij}^{(p)}$  の評価には広い粒子体積率に渡って行うのが適当であると考え、その理論・計算結果について示す。

球形気泡の場合、レイノルズ数が高いほど、ポテンシャル流の解に漸近することが知られている。そこで、計算手法の検証を兼ねて、高レイノルズ数 ( $Re=100, 500, 2000$ ) における、球形気泡の分散体の誘起するバルク応力についての計算結果と理論値との比較を行う。式(F.10)より、ポテンシャル流中の球形粒子の誘起するバルク応力には以下のような関係が成り立つ。

$$\sigma_{xx}^{(p)} = \frac{\alpha V^2}{5}, \quad (\text{F.38})$$

$$\sigma_{yy}^{(p)} = \sigma_{zz}^{(p)} = \frac{3\alpha V^2}{20}, \quad (\text{F.39})$$

$$\sigma_{xy}^{(p)} = \sigma_{yz}^{(p)} = \sigma_{xz}^{(p)} = \sigma_{yx}^{(p)} = \sigma_{zy}^{(p)} = \sigma_{zx}^{(p)} = \sigma_{zz}^{(p)} = 0. \quad (\text{F.40})$$

従って、粒子の進行方向とその垂直方向に対する乱れの非等方性について以下の関係式を得る。

$$\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)} = \frac{4}{3} \quad (\text{F.41})$$

図 F-1 (a)(b)(c) にはそれぞれ、における、 $\sigma_{xx}^{(p)}$ ,  $\sigma_{yy}^{(p)}$ ,  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  が示されている。図 F-1 のシンボルは数値シミュレーション結果 ( $Re=100, 500, 2000$ )、線はポテンシャル流とストークス流の解を表す。図 F-1 より、レイノルズ数が高いほど、ポテンシャル流の解に近いことが示されており、理論に対して妥当な計算結果が得られていることがわかる。

図 F-2 (a)(b)(c) は、それぞれ球形気泡が誘起するバルク応力に関して  $\sigma_{xx}^{(p)}$ ,  $\sigma_{yy}^{(p)}$ ,  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  の分布であり、ストークス流の理論 (式 (F.29)、青線) と低レイノルズ数 ( $Re=0.1$ ) における数値シミュレーション結果 (シンボル) が示されている。また、図 F-2 中の赤線は参照のためにポテンシャル流の解が示されている。図 F-2 のストークス流の理論解と数値シミュレーション結果とがよく整合していることがわかる。図 F-2 (a)(b) より、気泡の場合には、表面での速度滑りを持つので、気泡近傍でも速度が気泡の並進速度に近づかない。従って、気泡の近くで ( $\alpha \sim 1$ ) バルク応力を評価したときには、0 に漸近せずに有限な値を持つ。また、粒子体積率  $\alpha$  が大きいほど、バルク応力の値  $\sigma_{xx}^{(p)}$ ,  $\sigma_{yy}^{(p)}$  が高いことがわかる。また、図 F-2 (a)(b) から、ポテンシャル流の場合に比べると、粒子体積率が低い場合 ( $\alpha < \text{約} 0.1$ ) の  $\sigma_{xx}^{(p)}$  はポテンシャル流の値に比べて高いのに対して、粒子体積率が高い場合 ( $\alpha > \text{約} 0.1$ ) の  $\sigma_{yy}^{(p)}$  は、ポテンシャル流の値に比べて低い。図 F-2 (c) より、粒子体積率が低い場合、粒子の流れ方向の速度の乱れが、その垂直方向に比べて卓越して大きくなっており、ポテンシャル流よりも乱れの非等方性が強いことがわかる。また、図 F-2 (c) より、粒子体積率が高いほど、ポテンシャル流の  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  の値 (4/3) に漸近する様子が示されている。

図 F-3 は、それぞれ球形固体粒子が誘起するバルク応力に関する  $\sigma_{xx}^{(p)}$ ,  $\sigma_{yy}^{(p)}$ ,  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  の分布であり、ストークス流の理論 (式 (F.28)、青線) と低レイノルズ数 ( $Re=0.1$ ) における数値シミュレーション結果 (シンボル) が示されている。また、図 F-3 中の赤線は参照のためにポテンシャル流の解が示されている。図 F-2 中で示された球形気泡の場合と同様、図 F-3 のストークス流の理論解と数値シミュレーション結果とがよく整合していることがわかる。図 F-3 (a)(b) より、固体粒子の場合には、表面での速度滑りを持たないので、粒子界面に近いほど、速度は粒子速度の並進速度に近づく。従って、粒子の近くで ( $\alpha \sim 1$ ) バルク応力を評価したときには、0 に漸近する。また、粒子体積率  $\alpha$  に対するバルク応力の値  $\sigma_{xx}^{(p)}$ ,  $\sigma_{yy}^{(p)}$  の挙動は、ある粒子体積率 ( $\alpha = \text{約} 0.1$ ) において、極大値をとることが示される。が高いことが示される。また、図 F-2 (a)(b) に示された球形気泡の場合と同様、図 F-3 (a)(b) から、ポテンシャル流の場合に比べると、粒子体積率が低い場合 ( $\alpha < \text{約} 0.1$ ) の  $\sigma_{xx}^{(p)}$  については、ポテンシャル流の値に比べて高いのに対して、粒子体積率が高い場合 ( $\alpha > \text{約} 0.1$ ) の  $\sigma_{yy}^{(p)}$  や、 $\sigma_{xx}^{(p)}$  は、ポテンシャル流の値に比べて低い。図

F-3 (c) より, 気泡の場合と同様に粒子体積率が低い場合については, 粒子の流れ方向の速度の乱れが, その垂直方向に比べて卓越して大きくなっている.  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  の分布について, 気泡の場合と比べると, 固体粒子の方が全ての  $\alpha$  において高い値を有している. このことから, ストークス流の場合, 乱れの非等方性は気泡よりも剛体粒子の方が強いことがわかる. また, 図 F-3(c) より, 気泡の場合とは異なり, 粒子体積率が高いほど,  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  の値はポテンシャル流の値に近くはなるものの,  $\alpha \rightarrow 1$  で漸近していないことがわかる.

図 F-4 (a)(b)(c) は, それぞれ球形気泡が誘起するバルク応力に関して,  $\sigma_{xx}^{(p)}$ ,  $\sigma_{yy}^{(p)}$ ,  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  の分布であり, 様々なレイノルズ数に対する ( $Re=0.1, 1.0, 10.0, 100.0, 1000.0$ ) 計算結果が示されている. 図 F-4 (a)(b) より, レイノルズ数に対する乱れの影響は単調に変化している様子が示されている. また, 粒子体積率が低い場合の乱れの非等方性について, 図 F-4 (c) から,  $0.1 < Re < 10.0$  では  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  がレイノルズ数に対して単調に増加し非等方性が強くなっている様子が示される.  $10 < Re < 100.0$  では, レイノルズ数が高いほど乱れがほぼ等方的なポテンシャル流の解に漸近するために,  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  が小さく, 等方性が強くなっていく.

図 F-5 (a)(b)(c) は, それぞれ球形固体粒子が誘起するバルク応力に関して,  $\sigma_{xx}^{(p)}$ ,  $\sigma_{yy}^{(p)}$ ,  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  の分布であり, 様々なレイノルズ数に対する ( $Re=0.1, 1.0, 10.0, 100.0$ ) 計算結果が示されている. 図 F-5 (a)(b) より, レイノルズ数が高いほど, 乱れのピーク値が高くなることがわかる. また, 粒子体積率が 0 または 1 の極限では, 粒子の誘起する乱れは 0 に漸近する. 図 F-5 (c) から, 球形気泡の場合 (図 F-4 (c)) とは異なり, レイノルズ数が高いほど, 単調に  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  が増加する様子が示され, 球形気泡の場合よりも, 乱れの非等方性が極めて強いことがわかる. この理由について, 固体粒子の場合には, 気泡の場合とは異なり, 後流において剥離渦が形成されることが挙げられる. 従って, 低い粒子体積率であっても, 固体粒子が生み出す乱れの非等方性は後流の影響を強く受けていることがわかる.

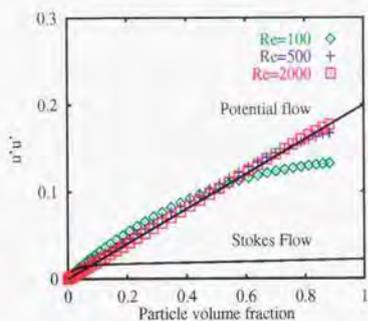
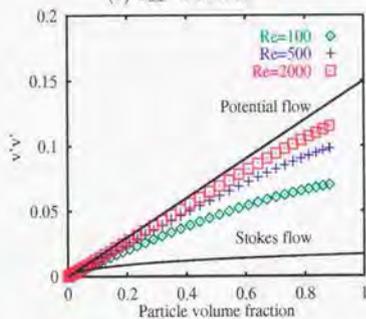
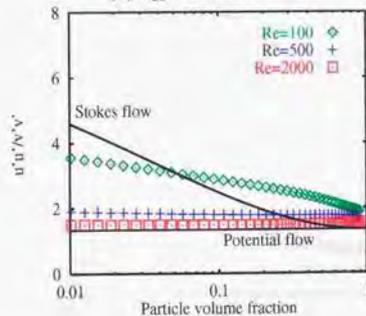
(a)  $\sigma_{xx}^{(p)}$  versus  $\alpha$ (b)  $\sigma_{yy}^{(p)}$  versus  $\alpha$ (c)  $\sigma_{xx}^{(p)} / \sigma_{yy}^{(p)}$  versus  $\alpha$ 

Fig. F-1 Bulk stresses of a flow around a clean bubble for  $Re=100, 500$  and  $2000$ . (Lines correspond to results of potential and Stokes flows)

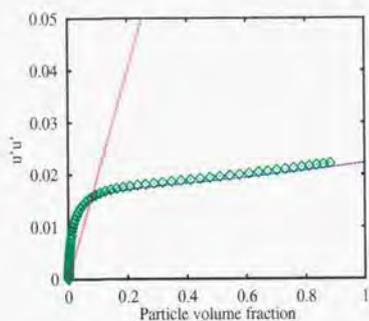
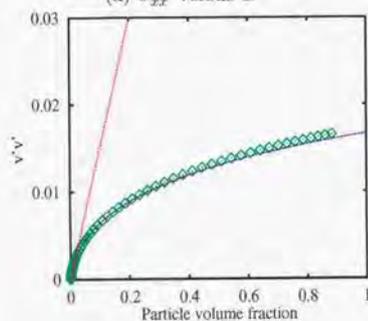
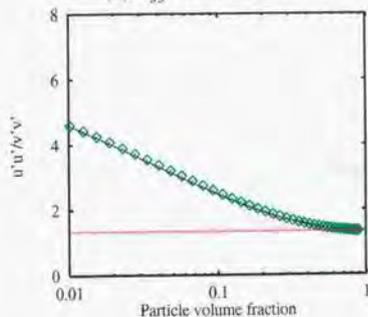
(a)  $\sigma_{xx}^{(p)}$  versus  $\alpha$ (b)  $\sigma_{yy}^{(p)}$  versus  $\alpha$ (c)  $\sigma_{xx}^{(p)} / \sigma_{yy}^{(p)}$  versus  $\alpha$ 

Fig. F-2 Bulk stresses of a flow around a clean bubble. ( $\diamond$ : DNS results for  $Re=0.1$ ; Blue line: Stokes flow; Red line: potential flow)

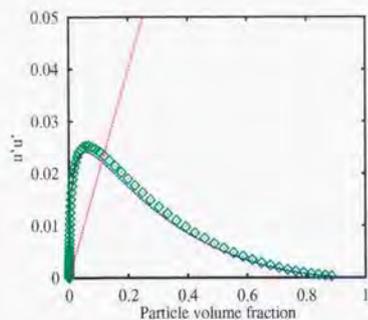
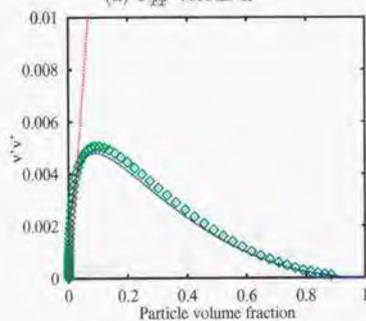
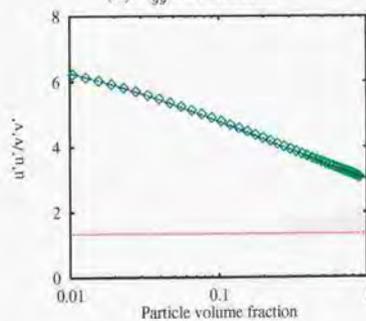
(a)  $\sigma_{xx}^{(p)}$  versus  $\alpha$ (b)  $\sigma_{yy}^{(p)}$  versus  $\alpha$ (c)  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  versus  $\alpha$ 

Fig. F-3 Bulk stresses of a flow around a rigid particle. ( $\diamond$ : DNS results for  $Re=0.1$ ; Blue line: Stokes flow; Red line: potential flow)

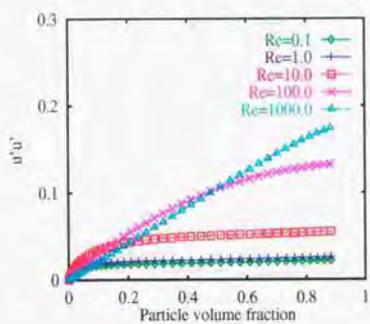
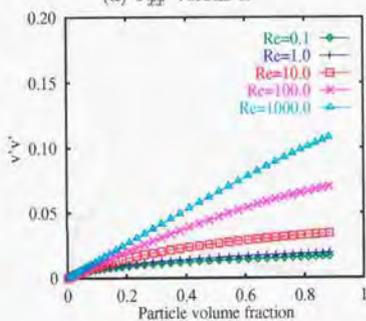
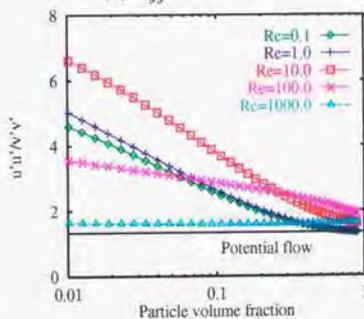
(a)  $\sigma_{xx}^{(p)}$  versus  $\alpha$ (b)  $\sigma_{yy}^{(p)}$  versus  $\alpha$ (c)  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  versus  $\alpha$ 

Fig. F-4 Bulk stresses of a flow around a clean bubble. (DNS results for various Reynolds number conditions)

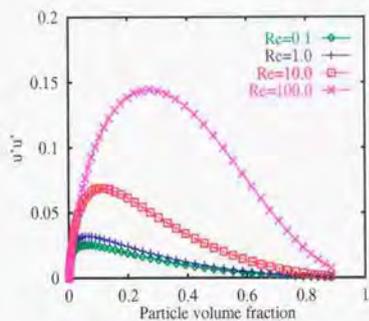
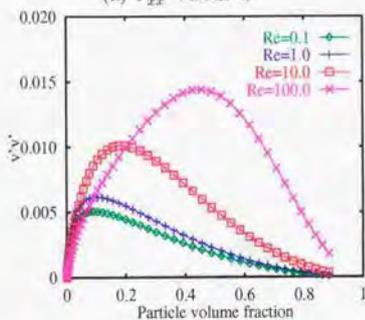
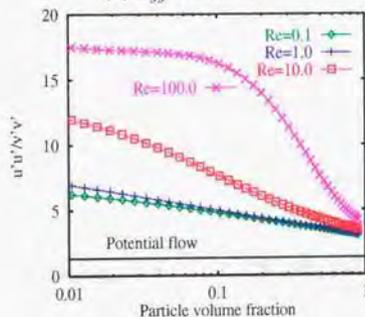
(a)  $\sigma_{xx}^{(p)}$  versus  $\alpha$ (b)  $\sigma_{yy}^{(p)}$  versus  $\alpha$ (c)  $\sigma_{xx}^{(p)}/\sigma_{yy}^{(p)}$  versus  $\alpha$ 

Fig. F-5 Bulk stresses of a flow around a rigid particle. (DNS results for various Reynolds number conditions)

## Appendix G

### 球形粒子近傍速度場のデータベースの構築法

#### はじめに

第4章では、粒子から連続相への運動量輸送に関し、粒子の並進運動によって誘起される粒子近傍の速度場を分散体のサイズや後流を考慮して直接扱っている。その粒子が誘起する速度場は、定常解や平均値を基にデータベース化されている。大規模な気泡流解析への実用性を考えた場合、粒子が誘起する速度場のデータベースを利用して解析を進めるには、できるだけ少ない情報量でデータベースを構築する必要がある。このためには、粒子の誘起する速度場の非等方向性が強いことを考慮して、工夫することが必要である。そこで本研究では、おのおのの粒子が誘起する速度場について軸対称との単純化を行い、以下に示される利点により、球面調和関数展開によって表現する。

- 数少ない情報で速度場を記述することが可能である。
- 球面調和関数の直交性より、特定の球面調和関数の次数に対する速度のモードの算出が解析的に一意に求まる。
- 粒子周りの境界層や粒子に働く粘性抗力が1次の球面調和関数に対する速度のモードのみによって決まる。
- それぞれの球面調和関数に対する速度のモードの2乗和が、粒子の誘起する乱れ運動エネルギーに相当する。
- 球面調和関数に対する速度モードが高次であるほど、低次のものに対して十分に小さくなり、ある程度の次数で打ち切っても大勢に影響が少ない。

速度を球面調和関数展開すると、粒子重心からの距離  $r$  に依存した関数が展開係数として与えられ、その展開係数は  $r$  に対して遠方で減衰する。この関係を利用して、本研究では、球面調和関数による速度の展開係数を  $r$  の負次の多項式によって展開し、半径方向に対しても情報量の縮約をはかる。球面調和関数/多項式展開によって得られる係数はレイノルズ数の関数として表され、データベース化される。

本章では、「球面調和関数の定義」、「速度や速度の空間勾配に対する球面調和関数/多項式展開式の一般化」、「速度の境界条件」、「半径方向速度の抽出法」、「多項式展開のためのフィッティング法」の順で議論を進める。

## 本研究における Legendre 関数, 及び, 球面調和関数の定義

Legendre 関数や球面調和関数について, その定義や記号は書物によってまちまちである. 本研究では、『岩波数学公式 III. 特殊函数 (森口ら, 1960. 岩波書店)』にならい, 以下のように定義されたものを用いる.

$n$  次の Legendre 関数:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (\text{G.1})$$

$n$  次・1 次の Legendre 陪関数:

$$P_n^1(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{dP_n(x)}{dx}. \quad (\text{G.2})$$

球面調和関数

$$Y_n(\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos \theta) \quad (\text{G.3})$$

$$Y_{n1}(\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi n(n+1)}} P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{G.4})$$

球面調和関数について, 以下のような直交性が成り立つ.

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_n(\theta) Y_m(\theta) = \delta_{nm} \quad (\text{G.5})$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{n1}(\theta) Y_{m1}(\theta) = \delta_{nm} \quad (\text{G.6})$$

Legendre 関数を 7 次まで書き下すと以下のように示される。

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= x \\
 P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
 P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
 P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
 P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\
 P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \\
 P_7(x) &= \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)
 \end{aligned}$$

$n$  次・1 次の Legendre 陪関数や後の式 (G.22) で定義される  $Q_n$  の右辺第 1 項の部分は以下のように書き表される。

$$P_n^1(x) = \Pi_n(x, \sqrt{1-x^2}) \quad (\text{G.7})$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_n^1(x) = \Pi_n(x, x) \quad (\text{G.8})$$

ここで導入された  $\Pi_n(x, y)$  を 7 次まで書き下すと以下のように示される。

$$\begin{aligned}
 \Pi_1(x, y) &= y \\
 \Pi_2(x, y) &= 3xy \\
 \Pi_3(x, y) &= \frac{3}{2}(5x^2 - 1)y \\
 \Pi_4(x, y) &= \frac{5}{2}(7x^3 - 3x)y \\
 \Pi_5(x, y) &= \frac{15}{8}(21x^4 - 14x^2 + 1)y \\
 \Pi_6(x, y) &= \frac{21}{8}(33x^5 - 30x^3 + 5x)y \\
 \Pi_7(x, y) &= \frac{7}{16}(429x^6 - 495x^4 + 135x^2 - 5)y
 \end{aligned}$$

軸対称な粒子近傍の速度場の球面調和関数/多項式展開, 及び, 速度の空間微分値の表記

任意の速度場について, 連続の式(発散が0)より, 以下のようなトロイダル場 (Toroidal field)  $\mathbf{T}$  とポロイダル場 (Poloidal field)  $\mathbf{S}$  で記述される (Chandrasekhar, 1961).

$$\mathbf{T} = \nabla \times \left( \frac{\Psi}{r} \mathbf{r} \right) \quad (\text{G.9})$$

$$\mathbf{S} = \nabla \times \nabla \times \left( \frac{\Phi}{r} \mathbf{r} \right) \quad (\text{G.10})$$

ここで,  $\Psi$  と  $\Phi$  は適当なスカラー関数を表す. さて, 粒子が誘起する速度場について軸対称を仮定すると, Chandrasekhar (1961) よりその速度場はポロイダル場のみで記述することができる. このことは, すなわち, 球座標系  $(r, \theta, \phi)$  で速度場を記述した場合, 半径方向速度  $u_r(r, \theta)$  が球面調和関数  $Y_n(\theta)$  と半径  $r$  の関数として表記される展開係数  $u_n^{(r)}(r)$  との積の線形和によって記述可能であることを意味する. また, 速度場がポロイダル場のみで記述可能であることから, 周方向速度  $u_\theta(r, \theta)$  は半径方向速度の展開係数  $u_n^{(r)}(r)$  に対して従属な形で記述することができる.

本研究では, 粒子近傍における速度場について, 半径  $r$  に対しても関数化する必要がある. そこで, 半径方向については, 球面調和関数によって展開された半径方向速度の展開係数  $u_n^{(r)}(r)$  を, さらに,  $r \rightarrow \infty$  で減衰する負次の  $r$  の多項式で展開して書き表す. 半径方向と円周方向速度については, 以下のように示される.

速度:

$$u_r(r, \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(i)} - u_f^{(\infty)}| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} Y_n(\theta), \quad (\text{G.11})$$

$$u_\theta(r, \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(i)} - u_f^{(\infty)}| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{m-2}{\sqrt{2n(n+1)}} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} Y_{n1}(\theta). \quad (\text{G.12})$$

ここで,  $|u_p^{(i)} - u_f^{(\infty)}|$  は粒子と周囲流体との相対速度,  $a$  は粒子半径である. また,  $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  は, 球面調和関数/多項式展開係数であり, 後で示される式 (G.23)(G.33)  $u_1^{(r)}(a)$  でスケールリングされている. 式 (G.11)(G.12) の関係より, 速度の空間微分値は以下のように示される.

速度勾配:

$$\frac{\partial u_r(r, \theta)}{\partial r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(l)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( -m \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m-1} Y_n(\theta) \right), \quad (\text{G.13})$$

$$\frac{\partial u_\theta(r, \theta)}{\partial r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(l)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( -\frac{m(m-2)}{\sqrt{2n(n+1)}} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m-1} Y_{n1}(\theta) \right), \quad (\text{G.14})$$

$$\frac{\partial u_r(r, \theta)}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(l)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( -\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} Y_{n1}(\theta) \right), \quad (\text{G.15})$$

$$\frac{\partial u_\theta(r, \theta)}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(l)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( \frac{m-2}{\sqrt{2n(n+1)}} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} \frac{\partial Y_{n1}(\theta)}{\partial \theta} \right). \quad (\text{G.16})$$

速度のラプラシアン:

$$(\nabla^2 \mathbf{u}(r, \theta)) \cdot \mathbf{e}_r \quad (\text{G.17})$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(l)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( \{(m-2)(m-1) - n(n+1)\} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m-2} Y_n(\theta) \right), \quad (\text{G.18})$$

$$(\nabla^2 \mathbf{u}(r, \theta)) \cdot \mathbf{e}_\theta \quad (\text{G.19})$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(l)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( \frac{m((m-2)(m-1) - n(n+1))}{\sqrt{2n(n+1)}} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m-2} Y_{n1}(\theta) \right) \quad (\text{G.20})$$

ここで,

$$\frac{\partial Y_{n1}(\theta)}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi n(n+1)}} Q_n(\cos \theta), \quad (\text{G.21})$$

$$Q_n(\cos \theta) = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_n^1(\cos \theta) + n(n+1) P_n(\cos \theta). \quad (\text{G.22})$$

である.

$\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  に対する境界条件

球形気泡の表面上での速度滑べりが 0 の場合:

$\tilde{u}_n^{(r)}(\tilde{r})$  を以下のように定義する.

$$\tilde{u}_n^{(r)}(\tilde{r}) = \sum_{m=1}^M \tilde{u}_{nm}^{(r)} \tilde{r}^{-m} \quad (\text{G.23})$$

ここで,  $\tilde{r} = r/a$  である. 連続の式と粒子表面上での滑べり無し条件を課すと,  $\tilde{u}_n^{(r)}(\tilde{r})$  は以下のように書き表される.

$$\tilde{u}_n^{(r)}(\tilde{r}) \Big|_{\tilde{r}=1} = \delta_{n1}, \quad (\text{G.24})$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_n^{(r)}(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=1} = 0. \quad (\text{G.25})$$

上記の関係より,  $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  は以下のように書き表される.

$$\sum_{m=1}^M \tilde{u}_{nm}^{(r)} = \delta_{n1}, \quad (\text{G.26})$$

$$\sum_{m=1}^M (-m \tilde{u}_{nm}^{(r)}) = 0. \quad (\text{G.27})$$

純粋液体中の球形気泡の場合:

$\tilde{u}_n^{(r)}(\tilde{r})$  の境界条件は, 「運動学的条件」と「連続の式」と「気泡表面上でのせん断応力が 0 である条件」により, 以下のように書き表される.

$$\tilde{u}_n^{(r)}(\tilde{r}) \Big|_{\tilde{r}=1} = \delta_{n1}, \quad (\text{G.28})$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{u_\theta}{\tilde{r}} \right) \Big|_{\tilde{r}=1} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r}^2 \tilde{u}_n^{(r)}(\tilde{r}) \right) \right) \Big|_{\tilde{r}=1} = 0. \quad (\text{G.29})$$

上記の関係より,  $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  は以下のように書き表される.

$$\sum_{m=1}^M \tilde{u}_{nm}^{(r)} = \delta_{n1}. \quad (\text{G.30})$$

$$\sum_{m=1}^M \left( -(m+1)(m-2) \tilde{u}_{nm}^{(r)} \right) = 0. \quad (\text{G.31})$$

## 粒子周りの速度場の抽出方法 (球面調和関数展開)

粒子の誘起する速度場について、系全体の粒子周りの半径方向速度が直接数値計算によって与えられている場合に対する、 $\tilde{u}_n^{(r)}(\tilde{r})$  (式 (G.23)) の抽出方法について示す (球面調和関数展開)。球面調和関数の直交性 (式 (G.5)) を用いると、有次元の球面調和関数展開係数  $u_n^{(r)}(r)$  は以下のように記述される。

$$\tilde{u}_n^{(r)}(r) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_n^0(\theta) u_r(r, \theta). \quad (\text{G.32})$$

ここで、 $u_r(r, \theta)$  は、周囲流体に対する粒子の相対速度を表す。また、 $\tilde{u}_n^{(r)}(\tilde{r})$  については、以下のように規格化される。

$$\tilde{u}_n^{(r)}(\tilde{r}) = \frac{\tilde{u}_n^{(r)}(ar)}{u_1^{(r)}(a)} \quad (\text{G.33})$$

 $\tilde{u}_n^{(r)}(r)$  のフィッティング方法 (多項式展開)

本研究では、式 (G.23) に示されるように、 $\tilde{u}_n^{(r)}(r)$  は  $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  を用いて  $r$  の多項式展開される。しかしながら、多項式は直交性を満たさないために、 $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  を一意に決定することはできない。そこで、本研究では粒子表面から、幾つかのサンプル点  $r_j$  をとり、それらのサンプル点における  $\tilde{u}_n^{(r)}(r_j)$  について最小自乗法を行い、 $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  を算出する。したがって、本手法で得られる  $\tilde{u}_n^{(r)}(r)$  の分布について、ある有限な領域までに限っての粒子近傍場での値は妥当な結果であるが、粒子遠方場で  $r$  の何乗で減衰するのかについては正しく算出されない。しかしながら、粒子が流体にもたらす乱れが粒子遠方では粒子近傍に比べて十分に小さいこと、また、本手法では遠方での速度場が十分に減衰するように定式化されていることから、粒子の遠方速度場の距離に対する挙動が正しく得られなくとも問題はないと考える。

$\tilde{u}_n^{(r)}(r)$  が  $r = r_j$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ) において値を持つ場合を考えると、 $r = r_j$  における  $\tilde{u}_n^{(r)}(r)$  を以下のように書き表す。

$$f_{nj} = \tilde{u}_n^{(r)}(r_j), \quad (\text{G.34})$$

評価関数  $\Phi_n$  を以下のように定義する。

$$\Phi_n(\tilde{u}_{n1}^{(r)}, \tilde{u}_{n2}^{(r)}, \dots, \tilde{u}_{nM}^{(r)}) = \sum_{j=1}^J \left\{ \left( \sum_{m=1}^M \tilde{u}_{nm}^{(r)} r_j^{-m} \right) - f_{nj} \right\}^2. \quad (\text{G.35})$$

ここで、 $\Phi_n$  は、実際の  $\tilde{u}_n^{(r)}(r)$  と多項式でフィッティングされた値との誤差の 2 乗和を表す。従って、誤差を最小化するには、評価関数  $\Phi_n$  を停留させることが必要条件である。

停留条件については、以下の式で書き表される。

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial \tilde{u}_{nk}^{(r)}} = 2 \sum_{j=1}^J \left\{ \left( \sum_{m=1}^M \tilde{u}_{nm}^{(r)} r_j^{-m} r_j^{-k} \right) - f_{nj} r_j^{-k} \right\} = 0. \quad (\text{G.36})$$

式 (G.36) を行列形式で表すと、以下のよう示される。

$$\sum_{m=1}^M A_{km} \tilde{u}_{nm}^{(r)} = b_{nk}, \quad (\text{G.37})$$

ここで、 $A_{km}$  と  $b_{nk}$  は、以下のよう書き表される。

$$A_{km} = \sum_{j=1}^J \left( r_j^{-k} r_j^{-m} \right), \quad (\text{G.38})$$

$$b_{nk} = \sum_{j=1}^J \left( f_{nj} r_j^{-k} \right). \quad (\text{G.39})$$

粒子の誘起する速度の展開係数  $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  は、式 (G.37) の行列  $A_{km}$  の逆行列を求め、剛体粒子に対しては式 (G.24)(G.25)、気泡に対しては式 (G.26)(G.27) の境界条件を満たすように、式 (G.37)(G.38)(G.39) を用いて算出される。本研究では、 $A_{km}$  の逆行列を求めるために、 $A_{km}$  を優対角化し、反復法を適用している。

## フィッティングの結果

直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation: DNS) を行い、場全体の半径方向速度  $u_r(r, \theta)$  を求め、式 (G.32) ~ (G.39) で示された関係を用いて粒子の誘起する速度の展開係数  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  を算出する。DNS の手法は、Appendix B で行ったものと同じである。計算領域の半径の大きさ  $r_{max}$  は、約  $300a$  とした。半径方向と円周方向の格子点数は、それぞれ  $N_r \times N_\theta = 100 \times 180$  である。

式 (G.37) における  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  に対する独立な多項式の数 ( $M$ ) は 8 とした。また、 $\bar{u}_n^{(r)}(r)$  に対するサンプル点数 ( $J$ ) は 11 であり、サンプル半径は  $r/a = 1.00, 1.10, 1.35, 1.62, 1.98, 2.41, 2.85, 3.41, 4.13, 5.08$  and  $6.29$  とした。

$\bar{u}_{nm}^{(r)}$  をフィッティングした結果を用いたときの、 $\bar{u}_n^{(r)}(r)$  を図示する。図 G-1 は剛体粒子に対してレイノルズ数をパラメタとしたときの ( $Re = 0.1, 1, 10$ , and  $100$ ) 分布であり、図 G-2 は球形気泡に対する  $Re = 0.1, 1, 10, 100$  and  $1000$  における分布である。図 G-1, G-2 では、ともに、球面調和関数の次数  $n = 1, 2$  and  $3$  に対して示されている。また、図中の線は多項式展開した結果であり、シンボルは DNS の結果である。これらの図より、DNS 結果とフィッティング結果とが精度よく一致していることがわかる。

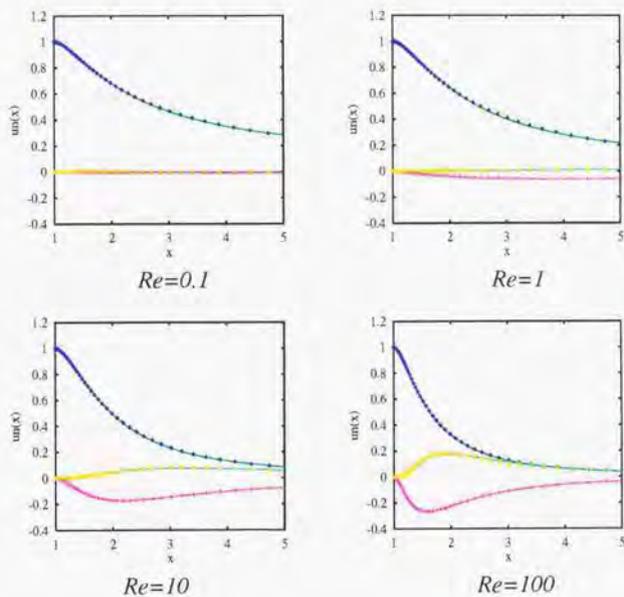


Fig. G-1  $u_n^{(r)}(ax)/u_1^{(r)}(a)$  versus  $x$  of a rigid particle for various Reynolds numbers. ( $r_{max} \sim 300$ ,  $N_\theta=180$ ,  $N_r=100$ ) Lines correspond to the results fitted by polynomials and symbols correspond to the raw data of simulation.

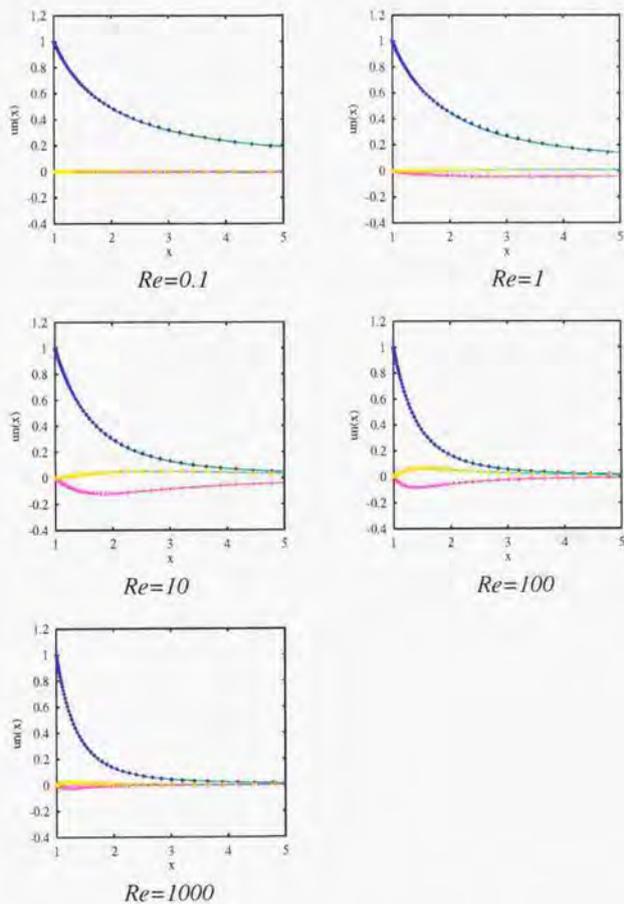


Fig. G-2  $u_n^{(r)}(ax)/u_1^{(r)}(a)$  versus  $x$  of a spherical bubble for various Reynolds numbers. ( $r_{max} \sim 300$ ,  $N_\theta=180$ ,  $N_r=100$ ) Lines correspond to the results fitted by polynomials and symbols correspond to the raw data of simulation.

## Appendix H

### 相対速度・速度勾配テンソルの座標変換

はじめに

第4章で述べたように、本研究では気泡が誘起する相対速度と速度勾配についてデータベース化し (Appendix G 参照)、そのデータベースを用いて、気泡表面で生成される渦度の影響をモデル化している。Appendix G で示されたデータベースの構築法では、気泡の進行方向を軸として軸対称な速度場を仮定している。しかし、粒子の進行方向 (軸方向) は、数値シミュレーションで設定した基底ベクトルの向きとは必ずしも一致しない。また、Appendix G での粒子周りの速度場は、曲線座標系である球座標系を用いて整理されているのに対し、第3章、第4章の数値シミュレーションにおける連続相はカーテシアン座標系として扱っている。従って、座標変換を施すことが必要となる。第4章におけるシミュレーションでは相対速度や速度勾配テンソルを算出の際に、まず、球座標系で記述された速度の空間微分を2次元円筒座標系の「速度勾配テンソル」に変換し、その後、カーテシアン座標系へと座標変換している。本章では、特に曲線座標系の基底ベクトルの向きが変化する影響について注意を払って、相対速度や速度勾配テンソルを座標変換する方法について述べる。

## 相対速度・速度勾配テンソルの軸対称球座標系から軸対称2次元円筒座標系への変換

球座標系を  $(r, \theta, \phi)$  として, 2次元円筒座標系を  $(\xi, \sigma, \phi)$  として表す (図 H-1 参照).  $u_i(r, \theta, \phi)$  を球座標系の相対速度ベクトル (テンソルとしての性質を持つ),  $v_i(\xi, \sigma, \phi)$  を2次元軸対称座標系の速度ベクトルとすると, 速度と速度勾配について, 以下の関係が成り立つ.

$$v_j = a_{jk} u_k \quad (\text{H.1})$$

$$\partial_i v_j = a_{ik} \partial_k (a_{jl} u_l) \quad (\text{H.2})$$

ここで,  $a_{ij}$  は方向余弦であり,  $\bar{i}$  は2次元軸対称座標系の基底,  $j$  は球座標系の基底を表す.

軸対称である場合, 軸対称2次元円筒座標系での速度を以下のように書き表す.

$$v_\xi = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \quad (\text{H.3})$$

$$v_\sigma = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \quad (\text{H.4})$$

軸対称2次元円筒座標系における、速度勾配テンソル  $G_{ij}$  は以下のように書き表される。

$$G_{\xi\xi} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos^2 \theta - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \cos \theta \sin \theta - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\sin^2 \theta}{r} + u_r \frac{\sin^2 \theta}{r} + u_\theta \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \quad (\text{H.5})$$

$$G_{\sigma\xi} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \cos^2 \theta - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\sin^2 \theta}{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} - u_r \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + u_\theta \frac{\sin^2 \theta}{r} \quad (\text{H.6})$$

$$G_{\xi\sigma} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \theta \sin \theta - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sin^2 \theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\cos^2 \theta}{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} - u_r \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} - u_\theta \frac{\cos^2 \theta}{r} \quad (\text{H.7})$$

$$G_{\sigma\sigma} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \sin^2 \theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\cos^2 \theta}{r} + u_r \frac{\cos^2 \theta}{r} - u_\theta \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \quad (\text{H.8})$$

$$G_{\phi\phi} = \frac{v_\sigma}{\sigma} \quad (\text{H.9})$$

相対速度・速度勾配テンソルの軸対称2次元円筒座標系から任意のカーテシアン座標系への変換

$(x, y, z)$  を任意のカーテシアン座標系 (図 H-2 参照),  $w(x, y, z)$  をカーテシアン座標系における相対速度 (ただし,  $|w| = |u_p^{(i)} - u_f^{(j)}|$ ) とすると, 速度と速度勾配テンソルについて, 以下の関係が成り立つ.

$$w_i = a_{ik} v_k \quad (\text{H.10})$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = a_{ik} a_{jl} G_{kl} \quad (\text{H.11})$$

ここで,  $a_{ij}$  は, 方向余弦であり,  $i$  はカーテシアン座標系の基底,  $j$  は2次元軸対称座標系の基底を表す.

2次元軸対称座標系の基底ベクトルをカーテシアン座標系で記述すると以下のように書き表される.

$$e_{\xi i} = \frac{(u_{pi}^{(i)} - u_{fi}^{(j)})}{|u_p^{(i)} - u_f^{(j)}|}$$

$$\tilde{e}_{\sigma i} = (x_i - x_{pi}^{(i)}) - e_{\xi i} e_{\xi j} (x_j - x_{pj}^{(j)})$$

$$e_{\sigma i} = \frac{\tilde{e}_{\sigma i}}{\sqrt{e_{\sigma k} e_{\sigma k}}}$$

$$e_{\phi i} = \epsilon_{ijk} e_{\xi j} e_{\sigma k}$$

なお, 方向余弦は以下のように書き表される.

$$a_{i\xi} = e_{\xi i}, \quad a_{i\sigma} = e_{\sigma i}, \quad a_{i\phi} = e_{\phi i}$$

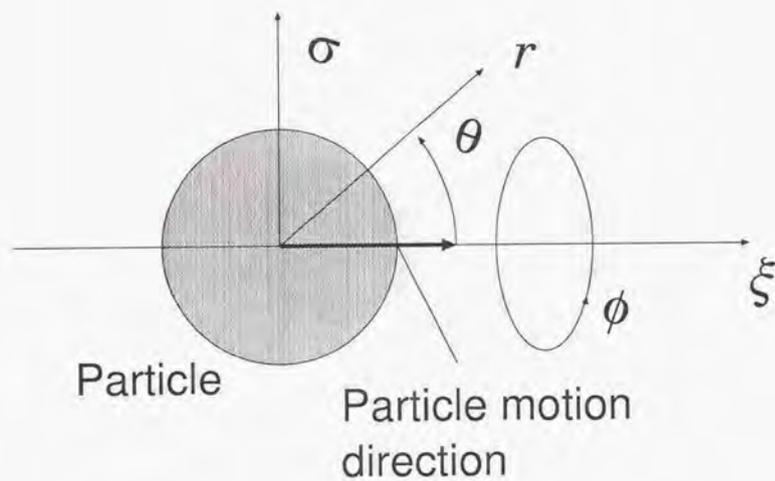


Fig. H-1 Schematic of spherical coordinates  $(r, \theta, \phi)$  and cylindrical coordinates  $(\xi, \sigma, \phi)$ .

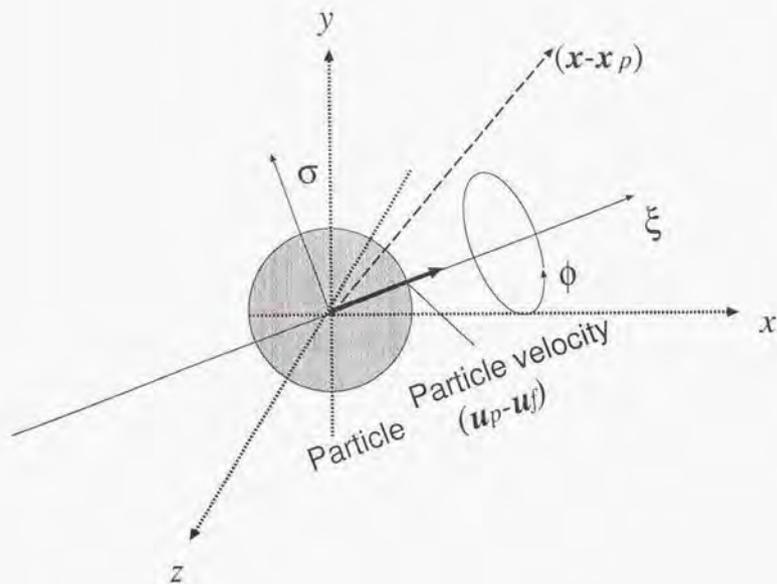


Fig. H-2 Schematic of cylindrical coordinates  $(\xi, \sigma, \phi)$  and Cartesian coordinates  $(x, y, z)$ .

## Appendix I

### 球形粒子近傍速度場のデータベース

$r$  方向速度 (第 4 章, Appendix G 参照):

$$u_r(r, \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |u_p^{(l)} - u_f^\infty| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} Y_n(\theta)$$

独立な多項式の数は  $M = 8$ , 球面調和関数の次数は  $N = 6$ . 幾つかのレイノルズ数に対して, 球形固体粒子と球形気泡の  $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  を表 I-1~I-25 に示す.

Table I-1.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  for a rigid particle for  $Re = 0.1$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 1.558     | -1.525e-1 | -5.195e-3 | -9.990e-3 | -1.021e-2 | -9.907e-3 |
| 2               | -1.559    | 7.882e-1  | 6.350e-2  | 9.239e-2  | 9.642e-2  | 9.180e-2  |
| 3               | 5.495     | -1.665    | -2.114e-1 | -2.754e-1 | -2.910e-1 | -2.739e-1 |
| 4               | -7.866    | 1.520     | 2.277e-1  | 2.857e-1  | 3.083e-1  | 2.841e-1  |
| 5               | 2.237     | -2.490e-1 | 1.935e-2  | 7.053e-3  | -2.800e-4 | 7.481e-3  |
| 6               | 1.789     | -2.932e-1 | -1.005e-1 | -1.076e-1 | -1.137e-1 | -1.073e-1 |
| 7               | 1.511e-1  | -8.092e-2 | -5.573e-2 | -5.628e-2 | -5.713e-2 | -5.626e-2 |
| 8               | -8.045e-1 | 1.330e-1  | 6.222e-2  | 6.408e-2  | 6.756e-2  | 6.398e-2  |

Table I-2.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a rigid particle for  $Re = 0.2$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 1.482     | -2.679e-1 | 7.729e-3  | -1.053e-2 | -1.021e-2 | -9.919e-3 |
| 2               | -1.483    | 1.316     | -1.917e-2 | 9.625e-2  | 9.639e-2  | 9.185e-2  |
| 3               | 6.029     | -2.664    | -1.600e-2 | -2.852e-1 | -2.908e-1 | -2.740e-1 |
| 4               | -8.971    | 2.370     | 3.484e-2  | 2.960e-1  | 3.081e-1  | 2.842e-1  |
| 5               | 2.654     | -4.146e-1 | 6.486e-2  | 4.363e-3  | -2.310e-4 | 7.464e-3  |
| 6               | 2.073     | -4.188e-1 | -7.024e-2 | -1.092e-1 | -1.136e-1 | -1.073e-1 |
| 7               | 1.619e-1  | -9.920e-2 | -5.253e-2 | -5.641e-2 | -5.713e-2 | -5.626e-2 |
| 8               | -9.445e-1 | 1.786e-1  | 5.051e-2  | 6.474e-2  | 6.755e-2  | 6.399e-2  |

Table I-3.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a rigid particle for  $Re = 0.5$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 1.284     | -4.946e-1 | 7.476e-2  | -1.741e-2 | -9.886e-3 | -9.944e-3 |
| 2               | -1.287    | 2.173     | -4.367e-1 | 1.449e-1  | 9.385e-2  | 9.196e-2  |
| 3               | 7.344     | -3.990    | 9.495e-1  | -4.085e-1 | -2.840e-1 | -2.742e-1 |
| 4               | -1.166e+1 | 3.299     | -9.000e-1 | 4.248e-1  | 3.005e-1  | 2.844e-1  |
| 5               | 3.642     | -5.379e-1 | 2.781e-1  | -2.875e-2 | 1.886e-3  | 7.420e-3  |
| 6               | 2.765     | -5.426e-1 | 7.539e-2  | -1.298e-1 | -1.124e-1 | -1.073e-1 |
| 7               | 1.950e-1  | -1.258e-1 | -3.586e-2 | -5.813e-2 | -5.706e-2 | -5.626e-2 |
| 8               | -1.284    | 2.183e-1  | -5.240e-3 | 7.294e-2  | 6.705e-2  | 6.399e-2  |

Table I-4.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a rigid particle for  $Re = 1$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 1.042     | -6.332e-1 | 2.149e-1  | -5.018e-2 | -6.029e-3 | -1.015e-2 |
| 2               | -1.045    | 2.211     | -1.254    | 3.722e-1  | 6.492e-2  | 9.352e-2  |
| 3               | 8.778     | -3.125    | 2.736     | -9.761e-1 | -2.073e-1 | -2.785e-1 |
| 4               | -1.451e+1 | 1.969     | -2.540    | 1.009     | 2.175e-1  | 2.892e-1  |
| 5               | 4.623     | -1.191e-1 | 6.171e-1  | -1.750e-1 | 2.458e-2  | 5.963e-3  |
| 6               | 3.499     | -3.055e-1 | 3.255e-1  | -2.232e-1 | -9.906e-2 | -1.081e-1 |
| 7               | 2.479e-1  | -1.141e-1 | -1.328e-3 | -6.673e-2 | -5.620e-2 | -5.629e-2 |
| 8               | -1.638    | 1.174e-1  | -9.801e-2 | 1.098e-1  | 6.164e-2  | 6.432e-2  |

Table I-5.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a rigid particle for  $Re = 2$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 7.396e-1  | -5.565e-1 | 4.289e-1  | -1.668e-1 | 2.461e-2  | -1.478e-2 |
| 2               | -7.433e-1 | 5.472e-1  | -2.228    | 1.144     | -1.594e-1 | 1.294e-1  |
| 3               | 1.012e+1  | 1.882     | 4.387     | -2.825    | 3.754e-1  | -3.760e-1 |
| 4               | -1.694e+1 | -3.294    | -3.639    | 2.839     | -4.029e-1 | 3.977e-1  |
| 5               | 5.295     | 1.105     | 6.841e-1  | -5.994e-1 | 1.884e-1  | -2.501e-2 |
| 6               | 4.120     | 5.388e-1  | 4.625e-1  | -5.134e-1 | 9.530e-4  | -1.256e-1 |
| 7               | 3.352e-1  | -1.446e-2 | 4.364e-2  | -9.991e-2 | -4.853e-2 | -5.713e-2 |
| 8               | -1.923    | -2.081e-1 | -1.342e-1 | 2.219e-1  | 2.144e-2  | 7.147e-2  |

Table I-6.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a rigid particle for  $Re = 5$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 3.721e-1  | -7.550e-2 | 4.343e-1  | -4.385e-1 | 2.214e-1  | -9.803e-2 |
| 2               | -3.746e-1 | -3.528    | -8.423e-1 | 2.529     | -1.492    | 7.457e-1  |
| 3               | 1.031e+1  | 1.095e+1  | -1.158    | -5.303    | 3.605     | -1.989    |
| 4               | -1.644e+1 | -1.057e+1 | 3.403     | 4.506     | -3.609    | 2.123     |
| 5               | 4.527     | 1.980     | -1.393    | -6.544e-1 | 9.218e-1  | -4.811e-1 |
| 6               | 3.912     | 1.527     | -7.924e-1 | -7.325e-1 | 5.169e-1  | -4.058e-1 |
| 7               | 4.556e-1  | 2.279e-1  | -4.555e-2 | -1.838e-1 | 1.431e-2  | -7.896e-2 |
| 8               | -1.761    | -5.121e-1 | 3.936e-1  | 2.775e-1  | -1.782e-1 | 1.845e-1  |

Table I-7.  $\bar{u}_{nm}^{(c)}$  of a rigid particle for  $Re = 10$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 2.041e-1  | 1.778e-1  | 6.399e-2  | -4.028e-1 | 4.097e-1  | -2.957e-1 |
| 2               | -2.050e-1 | -4.440    | 2.801     | 1.164     | -2.347    | 2.063     |
| 3               | 8.815     | 9.790     | -1.085e+1 | 3.644e-2  | 4.760     | -5.107    |
| 4               | -1.261e+1 | -5.991    | 1.287e+1  | -2.480    | -3.842    | 5.115     |
| 5               | 2.734     | -2.193e-1 | -3.162    | 1.534     | 5.552e-1  | -1.096    |
| 6               | 2.763     | 4.159e-1  | -2.340    | 5.425e-1  | 5.096e-1  | -8.946e-1 |
| 7               | 4.474e-1  | 2.321e-1  | -3.387e-1 | -1.169e-1 | 9.301e-2  | -1.546e-1 |
| 8               | -1.146    | 3.384e-2  | 9.512e-1  | -2.777e-1 | -1.395e-1 | 3.702e-1  |

Table I-8.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a rigid particle for  $Re = 20$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 1.286e-1  | 1.237e-1  | -2.730e-1 | -2.913e-2 | 3.109e-1  | -4.257e-1 |
| 2               | -1.287e-1 | -2.491    | 5.038     | -2.640    | -5.209e-1 | 2.397     |
| 3               | 6.705     | 1.198     | -1.400e+1 | 1.085e+1  | -1.957    | -4.653    |
| 4               | -7.896    | 5.347     | 1.265e+1  | -1.387e+1 | 4.858     | 3.347     |
| 5               | 9.704e-1  | -3.214    | -1.481    | 3.979     | -2.172    | -6.884e-2 |
| 6               | 1.354     | -1.784    | -1.956    | 2.545     | -1.097    | -5.453e-1 |
| 7               | 3.084e-1  | -8.932e-2 | -5.819e-1 | 2.158e-1  | 8.824e-3  | -2.330e-1 |
| 8               | -4.426e-1 | 9.091e-1  | 5.988e-1  | -1.057    | 5.683e-1  | 1.808e-1  |

Table I-9.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a rigid particle for  $Re = 50$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 9.233e-2  | -7.950e-2 | -2.358e-1 | 4.019e-1  | -2.341e-1 | -1.125e-1 |
| 2               | -9.327e-2 | 3.308e-1  | 2.948     | -5.669    | 4.764     | -1.437    |
| 3               | 4.616     | -7.399    | -2.605    | 1.566e+1  | -1.682e+1 | 8.091     |
| 4               | -3.945    | 1.298e+1  | -5.222    | -1.428e+1 | 2.033e+1  | -1.233e+1 |
| 5               | 2.071e-3  | -3.350    | 4.756     | 1.649     | -5.261    | 4.478     |
| 6               | 2.730e-1  | -2.839    | 1.963     | 2.213     | -3.922    | 2.406     |
| 7               | 6.086e-2  | -6.404e-1 | -3.166e-1 | 6.580e-1  | -5.355e-1 | 1.287e-2  |
| 8               | -6.086e-3 | 9.932e-1  | -1.287    | -6.310e-1 | 1.680     | -1.113    |

Table I-10.  $\hat{u}_{nm}^{(r)}$  of a rigid particle for  $Re = 100$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 7.322e-2  | -9.856e-2 | -3.341e-2 | 4.267e-1  | -5.891e-1 | 3.540e-1  |
| 2               | -7.502e-2 | 6.158e-1  | 9.312e-2  | -4.686    | 7.427     | -5.888    |
| 3               | 4.098     | -6.971    | 8.400     | 8.392     | -2.182e+1 | 2.080e+1  |
| 4               | -3.534    | 9.487     | -1.938e+1 | -1.118    | 2.227e+1  | -2.587e+1 |
| 5               | 3.173e-1  | -6.995e-1 | 8.377     | -3.779    | -3.751    | 7.256     |
| 6               | 3.361e-1  | -1.593    | 4.943     | -8.277e-1 | -4.072    | 5.029     |
| 7               | -4.230e-2 | -8.123e-1 | 1.864e-1  | 6.314e-1  | -9.937e-1 | 5.222e-1  |
| 8               | -1.737e-1 | 7.206e-2  | -2.584    | 9.601e-1  | 1.534     | -2.200    |

Table I-11.  $\hat{u}_{nm}^{(r)}$  of a rigid particle for  $Re = 200$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4        | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|
| 1               | 5.217e-2  | 3.082e-2  | 4.643e-2  | 4.236e-1 | -8.812e-1 | 8.565e-1  |
| 2               | -5.375e-2 | -5.649e-1 | -1.315    | -3.580   | 9.362     | -1.047e+1 |
| 3               | 4.521     | -2.883    | 1.463e+1  | 9.875e-1 | -2.417e+1 | 3.339e+1  |
| 4               | -5.063    | 2.981     | -2.758e+1 | 1.178e+1 | 2.066e+1  | -3.880e+1 |
| 5               | 1.202     | 1.979     | 1.024e+1  | -8.755   | -1.152    | 9.543     |
| 6               | 1.012     | 2.236e-1  | 6.703     | -3.879   | -3.477    | 7.638     |
| 7               | -2.585e-2 | -7.203e-1 | 5.825e-1  | 4.810e-1 | -1.388    | 1.138     |
| 8               | -6.447e-1 | -1.046    | -3.313    | 2.542    | 1.046     | -3.301    |

Table I-12.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 0.1$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 1.043     | -1.653e-1 | -7.454e-2 | -7.786e-2 | -7.760e-2 | -7.780e-2 |
| 2               | -1.044    | 1.084     | 7.193e-1  | 7.365e-1  | 7.354e-1  | 7.362e-1  |
| 3               | 3.489     | -2.819    | -2.243    | -2.274    | -2.273    | -2.274    |
| 4               | -4.205    | 3.027     | 2.654     | 2.676     | 2.677     | 2.675     |
| 5               | 1.730     | -6.949e-1 | -6.565e-1 | -6.585e-1 | -6.601e-1 | -6.584e-1 |
| 6               | 9.878e-2  | -5.763e-1 | -5.469e-1 | -5.485e-1 | -5.490e-1 | -5.484e-1 |
| 7               | -1.650e-1 | -1.105e-1 | -1.036e-1 | -1.041e-1 | -1.040e-1 | -1.041e-1 |
| 8               | 5.323e-2  | 2.544e-1  | 2.511e-1  | 2.511e-1  | 2.515e-1  | 2.511e-1  |

Table I-13.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 0.2$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 9.914e-1  | -2.361e-1 | -6.655e-2 | -7.824e-2 | -7.759e-2 | -7.781e-2 |
| 2               | -9.920e-1 | 1.348     | 6.778e-1  | 7.388e-1  | 7.354e-1  | 7.362e-1  |
| 3               | 3.780     | -3.210    | -2.166    | -2.279    | -2.273    | -2.274    |
| 4               | -4.826    | 3.267     | 2.598     | 2.679     | 2.677     | 2.675     |
| 5               | 2.044     | -7.156e-1 | -6.487e-1 | -6.591e-1 | -6.601e-1 | -6.584e-1 |
| 6               | 1.690e-1  | -5.943e-1 | -5.420e-1 | -5.488e-1 | -5.490e-1 | -5.484e-1 |
| 7               | -1.848e-1 | -1.152e-1 | -1.028e-1 | -1.042e-1 | -1.040e-1 | -1.041e-1 |
| 8               | 1.828e-2  | 2.561e-1  | 2.503e-1  | 2.512e-1  | 2.515e-1  | 2.511e-1  |

Table I-14.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 0.5$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 8.530e-1  | -3.746e-1 | -2.601e-2 | -8.293e-2 | -7.728e-2 | -7.783e-2 |
| 2               | -8.539e-1 | 1.773     | 4.740e-1  | 7.655e-1  | 7.335e-1  | 7.363e-1  |
| 3               | 4.494     | -3.725    | -1.800    | -2.332    | -2.269    | -2.274    |
| 4               | -6.328    | 3.517     | 2.340     | 2.721     | 2.673     | 2.675     |
| 5               | 2.790     | -7.161e-1 | -6.158e-1 | -6.660e-1 | -6.594e-1 | -6.585e-1 |
| 6               | 3.408e-1  | -6.079e-1 | -5.200e-1 | -5.527e-1 | -5.487e-1 | -5.485e-1 |
| 7               | -2.303e-1 | -1.216e-1 | -9.842e-2 | -1.047e-1 | -1.039e-1 | -1.041e-1 |
| 8               | -6.545e-2 | 2.547e-1  | 2.469e-1  | 2.519e-1  | 2.514e-1  | 2.511e-1  |

Table I-15.  $\bar{u}_{lm}^{(v)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 1$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 6.837e-1  | -4.602e-1 | 5.518e-2  | -1.037e-1 | -7.417e-2 | -7.815e-2 |
| 2               | -6.848e-1 | 1.802     | 9.609e-2  | 8.811e-1  | 7.148e-1  | 7.383e-1  |
| 3               | 5.203     | -3.422    | -1.168    | -2.555    | -2.230    | -2.278    |
| 4               | -7.767    | 3.152     | 1.929     | 2.890     | 2.642     | 2.679     |
| 5               | 3.467     | -6.317e-1 | -5.779e-1 | -6.920e-1 | -6.537e-1 | -6.592e-1 |
| 6               | 5.088e-1  | -5.671e-1 | -4.880e-1 | -5.681e-1 | -5.456e-1 | -5.488e-1 |
| 7               | -2.676e-1 | -1.179e-1 | -9.019e-2 | -1.072e-1 | -1.036e-1 | -1.041e-1 |
| 8               | -1.429e-1 | 2.446e-1  | 2.438e-1  | 2.548e-1  | 2.508e-1  | 2.512e-1  |

Table I-16.  $\bar{u}_{lm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 2$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 4.794e-1  | -4.255e-1 | 1.688e-1  | -1.700e-1 | -5.361e-2 | -8.256e-2 |
| 2               | -4.803e-1 | 1.070     | -3.102e-1 | 1.227     | 5.952e-1  | 7.653e-1  |
| 3               | 5.682     | -1.712    | -6.739e-1 | -3.185    | -1.991    | -2.335    |
| 4               | -8.608    | 1.860     | 1.752     | 3.333     | 2.454     | 2.726     |
| 5               | 3.769     | -4.720e-1 | -6.187e-1 | -7.446e-1 | -6.223e-1 | -6.683e-1 |
| 6               | 6.122e-1  | -4.551e-1 | -4.873e-1 | -6.056e-1 | -5.280e-1 | -5.534e-1 |
| 7               | -2.740e-1 | -9.370e-2 | -8.185e-2 | -1.152e-1 | -1.011e-1 | -1.046e-1 |
| 8               | -1.797e-1 | 2.294e-1  | 2.513e-1  | 2.599e-1  | 2.472e-1  | 2.523e-1  |

Table I-17.  $\bar{u}_{lm}^{(v)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 5$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 2.443e-1  | -1.742e-1 | 1.796e-1  | -3.003e-1 | 4.760e-2  | -1.329e-1 |
| 2               | -2.444e-1 | -6.665e-1 | 2.534e-1  | 1.706     | 7.037e-2  | 1.055     |
| 3               | 5.172     | 1.216     | -2.399    | -3.732    | -1.055    | -2.909    |
| 4               | -7.160    | 3.307e-1  | 3.354     | 3.448     | 1.823     | 3.169     |
| 5               | 2.811     | -5.284e-1 | -9.144e-1 | -6.466e-1 | -5.636e-1 | -7.373e-1 |
| 6               | 4.414e-1  | -3.820e-1 | -6.532e-1 | -5.912e-1 | -4.770e-1 | -5.944e-1 |
| 7               | -1.936e-1 | -4.561e-2 | -1.060e-1 | -1.278e-1 | -8.754e-2 | -1.111e-1 |
| 8               | -7.061e-2 | 2.502e-1  | 2.853e-1  | 2.435e-1  | 2.423e-1  | 2.600e-1  |

Table I-18.  $\bar{u}_{mm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 10$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 1.404e-1  | -2.074e-2 | 1.633e-2  | -2.804e-1 | 1.190e-1  | -2.169e-1 |
| 2               | -1.403e-1 | -1.164    | 1.532     | 1.169     | -1.072e-1 | 1.458     |
| 3               | 3.960     | 1.145     | -4.860    | -2.192    | -1.074    | -3.553    |
| 4               | -4.437    | 1.196     | 4.865     | 2.013     | 2.138     | 3.522     |
| 5               | 1.385     | -8.726e-1 | -9.171e-1 | -3.744e-1 | -7.299e-1 | -7.271e-1 |
| 6               | 9.886e-2  | -5.280e-1 | -7.498e-1 | -4.387e-1 | -5.318e-1 | -6.154e-1 |
| 7               | -1.063e-1 | -5.161e-2 | -1.568e-1 | -1.066e-1 | -8.095e-2 | -1.236e-1 |
| 8               | 9.924e-2  | 2.958e-1  | 2.703e-1  | 2.105e-1  | 2.671e-1  | 2.560e-1  |

Table I-19.  $\bar{u}_{mm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 20$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 9.096e-2  | -7.931e-3 | -1.356e-1 | -1.357e-1 | 6.698e-2  | -2.441e-1 |
| 2               | -9.119e-2 | -5.791e-1 | 2.266     | 5.596e-2  | 5.473e-1  | 1.364     |
| 3               | 2.651     | -8.729e-1 | -5.504    | -1.143e-2 | -2.768    | -2.972    |
| 4               | -1.805    | 2.999     | 4.506     | 6.637e-1  | 3.629     | 2.761     |
| 5               | 2.139e-1  | -1.028    | -5.252e-1 | -3.919e-1 | -9.791e-1 | -4.921e-1 |
| 6               | -2.364e-1 | -6.928e-1 | -6.300e-1 | -3.522e-1 | -6.857e-1 | -5.164e-1 |
| 7               | -5.948e-2 | -1.121e-1 | -1.802e-1 | -5.633e-2 | -1.071e-1 | -1.227e-1 |
| 8               | 2.367e-1  | 2.938e-1  | 2.034e-1  | 2.279e-1  | 2.968e-1  | 2.225e-1  |

Table I-20.  $\bar{u}_{mm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 50$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 6.402e-2  | -9.575e-2 | -1.502e-1 | -5.030e-4 | -9.847e-2 | -1.240e-1 |
| 2               | -6.472e-2 | 6.010e-1  | 1.706     | -4.727e-1 | 1.620     | 3.774e-1  |
| 3               | 1.473     | -3.298    | -3.365    | 9.698e-2  | -4.565    | -8.388e-1 |
| 4               | 1.318e-1  | 4.146     | 2.386     | 1.546     | 4.385     | 1.217     |
| 5               | -3.479e-1 | -6.698e-1 | -2.288e-1 | -9.115e-1 | -7.400e-1 | -3.877e-1 |
| 6               | -4.575e-1 | -6.824e-1 | -4.043e-1 | -5.377e-1 | -6.847e-1 | -3.857e-1 |
| 7               | -7.841e-2 | -1.987e-1 | -1.217e-1 | -3.689e-2 | -1.615e-1 | -7.700e-2 |
| 8               | 2.802e-1  | 1.972e-1  | 1.779e-1  | 3.165e-1  | 2.438e-1  | 2.183e-1  |

Table I-21.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 100$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 5.290e-2  | -1.433e-1 | -8.682e-2 | -1.688e-2 | -1.450e-1 | -3.878e-2 |
| 2               | -5.332e-2 | 1.098     | 9.463e-1  | 2.195e-2  | 1.626     | -2.718e-2 |
| 3               | 1.054     | -3.852    | -1.754    | -1.435    | -3.946    | -4.697e-1 |
| 4               | 5.261e-1  | 3.880     | 1.569     | 2.908     | 3.360     | 1.476     |
| 5               | -2.249e-1 | -3.202e-1 | -4.539e-1 | -1.051    | -3.956e-1 | -6.888e-1 |
| 6               | -4.654e-1 | -5.677e-1 | -4.000e-1 | -6.728e-1 | -5.290e-1 | -4.720e-1 |
| 7               | -1.227e-1 | -2.212e-1 | -6.088e-2 | -7.969e-2 | -1.578e-1 | -5.326e-2 |
| 8               | 2.337e-1  | 1.265e-1  | 2.399e-1  | 3.254e-1  | 1.878e-1  | 2.739e-1  |

Table I-22.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 200$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 4.470e-2  | -1.547e-1 | -3.908e-2 | -6.969e-2 | -1.185e-1 | -2.738e-2 |
| 2               | -4.427e-2 | 1.225     | 4.885e-1  | 6.090e-1  | 1.173     | 1.508e-1  |
| 3               | 9.011e-1  | -3.661    | -1.132    | -2.658    | -2.705    | -1.278    |
| 4               | 4.331e-1  | 3.319     | 1.677     | 3.502     | 2.364     | 2.424     |
| 5               | 7.336e-2  | -1.450e-1 | -7.814e-1 | -8.603e-1 | -3.433e-1 | -9.142e-1 |
| 6               | -4.048e-1 | -4.737e-1 | -4.933e-1 | -6.707e-1 | -4.408e-1 | -5.960e-1 |
| 7               | -1.671e-1 | -2.097e-1 | -3.028e-2 | -1.276e-1 | -1.207e-1 | -6.721e-2 |
| 8               | 1.639e-1  | 1.002e-1  | 3.105e-1  | 2.748e-1  | 1.905e-1  | 3.083e-1  |

Table I-23.  $\bar{u}_{nm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 500$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 3.718e-2  | -1.393e-1 | -2.409e-2 | -1.112e-1 | -6.925e-2 | -6.563e-2 |
| 2               | -3.540e-2 | 1.128     | 3.621e-1  | 9.767e-1  | 6.832e-1  | 6.146e-1  |
| 3               | 8.914e-1  | -3.122    | -1.307    | -3.088    | -1.799    | -2.357    |
| 4               | 7.989e-2  | 2.798     | 2.272     | 3.272     | 2.082     | 3.103     |
| 5               | 4.610e-1  | -1.751e-1 | -1.017    | -5.317e-1 | -5.864e-1 | -8.418e-1 |
| 6               | -3.042e-1 | -4.353e-1 | -6.041e-1 | -5.682e-1 | -4.791e-1 | -6.314e-1 |
| 7               | -2.102e-1 | -1.753e-1 | -3.412e-2 | -1.539e-1 | -8.007e-2 | -1.056e-1 |
| 8               | 8.031e-2  | 1.220e-1  | 3.528e-1  | 2.046e-1  | 2.483e-1  | 2.837e-1  |

Table I-24.  $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 1000$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 3.372e-2  | -1.227e-1 | -3.269e-2 | -1.159e-1 | -5.304e-2 | -8.770e-2 |
| 2               | -3.111e-2 | 1.015     | 4.303e-1  | 1.006     | 5.545e-1  | 8.100e-1  |
| 3               | 9.270e-1  | -2.801    | -1.627    | -2.931    | -1.723    | -2.644    |
| 4               | -1.628e-1 | 2.646     | 2.593     | 2.925     | 2.309     | 3.071     |
| 5               | 6.714e-1  | -2.904e-1 | -1.026    | -4.080e-1 | -7.594e-1 | -6.861e-1 |
| 6               | -2.440e-1 | -4.510e-1 | -6.344e-1 | -5.072e-1 | -5.418e-1 | -5.899e-1 |
| 7               | -2.302e-1 | -1.512e-1 | -5.072e-2 | -1.509e-1 | -7.079e-2 | -1.223e-1 |
| 8               | 3.600e-2  | 1.557e-1  | 3.476e-1  | 1.819e-1  | 2.845e-1  | 2.491e-1  |

Table I-25.  $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$  of a spherical clean bubble for  $Re = 2000$ 

| $m \setminus n$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1               | 3.171e-2  | -1.089e-1 | -4.525e-2 | -1.098e-1 | -5.123e-2 | -9.601e-2 |
| 2               | -2.850e-2 | 9.235e-1  | 5.223e-1  | 9.540e-1  | 5.497e-1  | 8.692e-1  |
| 3               | 9.613e-1  | -2.595    | -1.886    | -2.705    | -1.855    | -2.634    |
| 4               | -3.346e-1 | 2.615     | 2.738     | 2.694     | 2.557     | 2.877     |
| 5               | 8.081e-1  | -4.099e-1 | -9.585e-1 | -3.923e-1 | -8.433e-1 | -5.705e-1 |
| 6               | -2.031e-1 | -4.786e-1 | -6.300e-1 | -4.830e-1 | -5.844e-1 | -5.443e-1 |
| 7               | -2.423e-1 | -1.334e-1 | -6.758e-2 | -1.404e-1 | -7.324e-2 | -1.266e-1 |
| 8               | 7.345e-3  | 1.875e-1  | 3.273e-1  | 1.826e-1  | 3.004e-1  | 2.250e-1  |

## Appendix J

### 球形粒子表面圧力の球面調和関数展開

表面圧力 (第 4 章参照):

$$p(a, \theta) = \rho_f |u_p^{(l)} - u_f^\infty|^2 \sum_{n=0}^N \tilde{p}_n(a) Y_n(\theta) \quad (\text{J.1})$$

幾つかのレイノルズ数に対し、球面調和関数の次数が  $N = 6$  までの球形固体粒子と球形気泡の  $\tilde{p}_n(a)$  を表 J-1, J-2 に示す。

図 J-1, J-2 には球形固体粒子と球形気泡に対する  $\tilde{p}_n(a)$  とレイノルズ数との関係について、表 J-1, J-2 に基づいて示されている。

Table J-1.  $\bar{p}_n(a)$  of a rigid particle for various Reynolds number conditions

| $Re \setminus n$ | 0         | 1        | 2        | 3        | 4         | 5         | 6        |
|------------------|-----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|----------|
| 0.1              | -2.425e-1 | 6.171e+1 | 8.672e-1 | 3.921e-3 | 7.737e-5  | 4.599e-3  | 8.273e-5 |
| 0.2              | -2.464e-1 | 3.130e+1 | 8.550e-1 | 2.347e-3 | 8.714e-5  | 2.332e-3  | 8.204e-5 |
| 0.5              | -2.570e-1 | 1.304e+1 | 8.270e-1 | 2.460e-3 | 1.414e-4  | 9.690e-4  | 7.829e-5 |
| 1.0              | -2.698e-1 | 6.908    | 7.937e-1 | 4.867e-3 | 2.749e-4  | 4.997e-4  | 7.420e-5 |
| 2.0              | -2.882e-1 | 3.794    | 7.501e-1 | 1.129e-2 | 5.444e-4  | 2.091e-4  | 7.228e-5 |
| 5.0              | -3.176e-1 | 1.854    | 6.855e-1 | 3.068e-2 | 8.299e-4  | -2.644e-4 | 1.093e-4 |
| 10.0             | -3.445e-1 | 1.157    | 6.417e-1 | 5.559e-2 | 3.284e-4  | -9.810e-4 | 2.537e-4 |
| 20.0             | -3.721e-1 | 7.730e-1 | 6.084e-1 | 8.805e-2 | -1.108e-3 | -2.381e-3 | 6.321e-4 |
| 50.0             | -4.057e-1 | 5.025e-1 | 5.774e-1 | 1.389e-1 | -3.378e-3 | -6.815e-3 | 1.951e-3 |
| 100.0            | -4.145e-1 | 3.891e-1 | 5.522e-1 | 1.818e-1 | -3.051e-3 | -1.437e-2 | 4.256e-3 |
| 200.0            | -3.858e-1 | 3.139e-1 | 5.118e-1 | 2.245e-1 | 6.427e-3  | -2.947e-2 | 8.692e-3 |

Table J-2.  $\bar{p}_n(a)$  of clean bubble for various Reynolds number conditions

| $Re \setminus n$ | 0         | 1        | 2        | 3        | 4         | 5         | 6         |
|------------------|-----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 0.1              | -3.134e-1 | 4.238e+1 | 5.265e-1 | 4.625e-3 | 4.596e-5  | 3.174e-3  | 4.678e-5  |
| 0.2              | -3.175e-1 | 2.140e+1 | 5.261e-1 | 5.167e-3 | 4.780e-5  | 1.602e-3  | 4.626e-5  |
| 0.5              | -3.298e-1 | 8.805    | 5.271e-1 | 9.810e-3 | 5.877e-5  | 6.573e-4  | 4.551e-5  |
| 1.0              | -3.465e-1 | 4.592    | 5.309e-1 | 1.805e-2 | 6.463e-5  | 3.293e-4  | 4.504e-5  |
| 2.0              | -3.723e-1 | 2.463    | 5.404e-1 | 3.312e-2 | -5.543e-5 | 1.050e-4  | 4.823e-5  |
| 5.0              | -4.248e-1 | 1.144    | 5.706e-1 | 6.813e-2 | -1.656e-3 | -3.972e-4 | 1.101e-4  |
| 10.0             | -4.805e-1 | 6.679e-1 | 6.148e-1 | 1.055e-1 | -6.856e-3 | -1.135e-3 | 3.885e-4  |
| 20.0             | -5.482e-1 | 3.957e-1 | 6.825e-1 | 1.437e-1 | -1.928e-2 | -1.273e-3 | 1.208e-3  |
| 50.0             | -6.442e-1 | 1.928e-1 | 8.029e-1 | 1.716e-1 | -4.606e-2 | 4.389e-3  | 2.302e-3  |
| 100.0            | -7.102e-1 | 1.068e-1 | 9.009e-1 | 1.636e-1 | -6.384e-2 | 1.477e-2  | 2.795e-4  |
| 200.0            | -7.616e-1 | 5.687e-2 | 9.868e-1 | 1.355e-1 | -6.978e-2 | 2.554e-2  | -5.228e-3 |
| 500.0            | -8.047e-1 | 2.372e-2 | 1.068    | 8.925e-2 | -5.971e-2 | 3.153e-2  | -1.289e-2 |
| 1000.0           | -8.226e-1 | 1.205e-2 | 1.106    | 5.945e-2 | -4.586e-2 | 2.912e-2  | -1.540e-2 |
| 2000.0           | -8.328e-1 | 6.814e-3 | 1.129    | 3.754e-2 | -3.230e-2 | 2.352e-2  | -1.480e-2 |

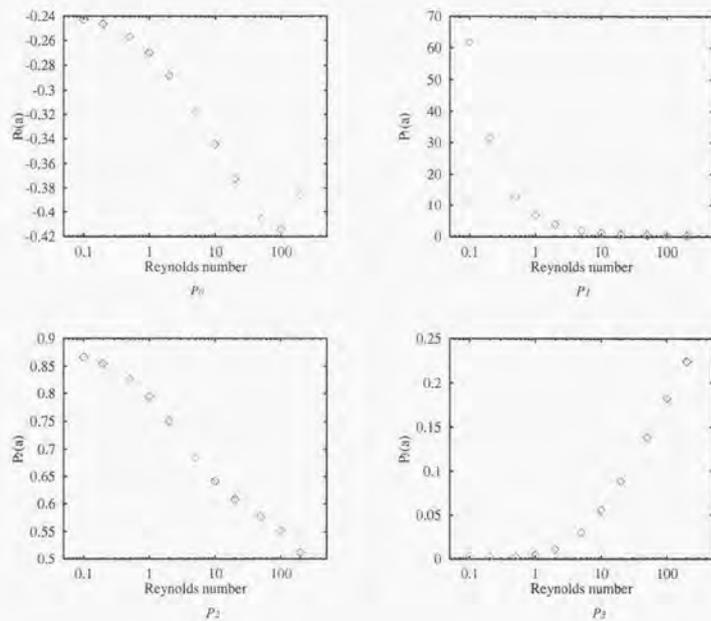


Fig. J-1  $\bar{p}_n(\alpha)$  versus Reynolds number for a rigid particle  
( $n = 0, 1, 2$  and 3)

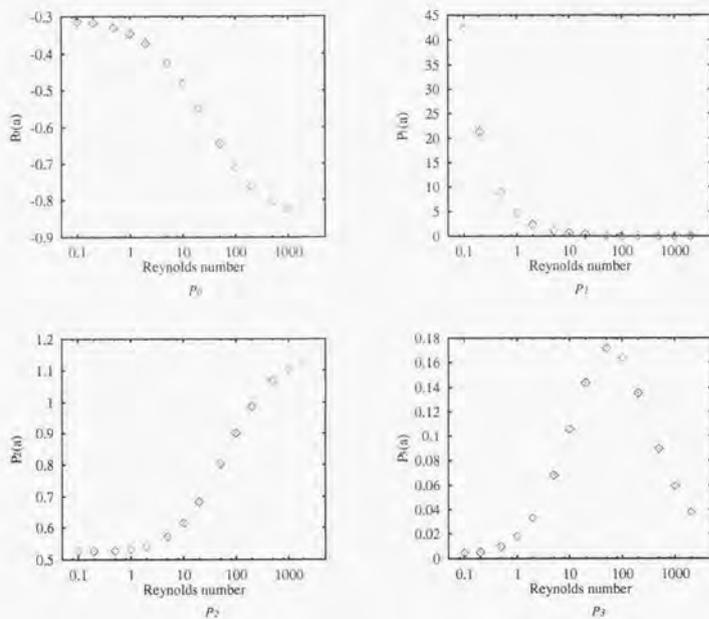


Fig. J-2  $\hat{p}_n(a)$  versus Reynolds number for a clean bubble  
 ( $n = 0, 1, 2$  and 3)

