

渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式による
乱流混合層の解析

立花 繁

博士論文

渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式による
乱流混合層の解析

平成 11 年 12 月 17 日

指導教官 久保田弘敏 教授
67101 立花繁

目次

第1章 序論	1
1.1 はじめに	1
1.2 乱流のフラクタル性	2
1.3 乱流理論の分類	5
1.3.1 予言的理論と記述的理論	5
1.3.2 乱流瞬時量を扱う理論	6
1.3.3 乱流統計量を扱う理論	7
1.4 研究の背景	10
1.4.1 混合層の種類	10
1.4.2 実験による研究	11
1.4.3 DNSによる研究	12
1.4.4 渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式による研究	12
1.5 研究の目的	13
第2章 渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式	16
2.1 理論の概要	16
2.1.1 導出のあらすじ	16
2.1.2 乱流統計理論における位置付け	17
2.2 第一原理から導出された乱流の現象論的支配方程式	18
2.2.1 Reynolds 平均方程式	18
2.2.2 一般化された Kármán-Howarth 方程式	19
2.3 変数分離と打ち切り条件の導入	19
2.3.1 変数分離と打ち切り条件	19
2.3.2 乱流ゆらぎ方程式 (g -表示)	20
2.4 渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式	21
2.4.1 変数変換	21
2.4.2 渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式	21
2.4.3 渦空間と孤立波解	22
2.4.4 位相速度 c について	23
第3章 乱流混合層の支配方程式	25
3.1 平均流の方程式	25
3.2 4次元ゆらぎ方程式	26

第4章	孤立波解の存在検証	27
4.1	重み関数の決定	27
4.2	モデル方程式の導出	28
4.3	モデル方程式の解析解	31
第5章	4次元ゆらぎ方程式の数値計算	35
5.1	計算の手法と条件	35
5.2	乱流統計量と孤立波解の関係式	37
5.2.1	二重相関 (乱流強度, レイノルズ応力)	37
5.2.2	三重相関	38
5.2.3	二点相関と乱流渦のスケール	38
5.3	計算結果	45
5.3.1	乱流統計量	45
5.3.2	孤立波解	46
5.4	比較1 —— 位相速度 c の違いによる比較	60
5.5	比較2 —— 他計算との比較	72
5.6	結果とその検討	75
第6章	結論	76
付録A	空間/時間発展の乱流混合層の相似と相違	78
付録B	変数分離の計算詳細	79
付録C	自己相似座標の導入	82
付録D	モデル方程式の具体形	84
付録E	圧縮性流れのゆらぎ方程式	90
	謝辞	92
	参考文献	93

目 次

1.1 軸対称乱流ジェットの可視化写真	3
1.2 軸対称乱流ジェットのフラクタル解析結果	4
1.3 ミクロな領域のフラクタル解析	4
1.4 瞬時速度の計測値	5
1.5 理論の分類と特徴	9
1.6 空間的に発達する乱流混合層	14
1.7 時間的に発達する仮想乱流混合層	14
1.8 乱流混合層の可視化写真 1	15
1.9 乱流混合層の可視化写真 2	15
2.1 渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式導出の流れ	22
2.2 乱流渦の軌跡	24
4.1 エネルギースペクトルの実験値	30
4.2 $\Phi(D_1) = 0$ の判別式 C/A	32
4.3 $\Phi(D_1) = 0$ の実数解	32
4.4 モデル方程式の孤立波解 q_1	33
4.5 モデル方程式の孤立波解 q_2	33
4.6 モデル孤立波解による乱流強度	34
4.7 モデル孤立波解によるレイノルズ応力	34
5.1 $Y-Z$ 面でみた等渦度線図	41
5.2 実験による渦構造間のスケール	42
5.3 渦構造の模式図	42
5.4 平均流速のスパン方向分布	43
5.5 二点相関と渦構造のスケール	44
5.6 流れ方向乱流強度	47
5.7 鉛直方向乱流強度	47
5.8 スパン方向乱流強度	48
5.9 レイノルズ応力	48
5.10 圧力の乱流強度	49
5.11 三重相関	49
5.12 三重相関	50
5.13 一平行流乱流混合層の実験による三重相関	50

5.14	二点相関 R_{uu}	51
5.15	二点相関 R_{uv}	51
5.16	流れ方向乱流強度 (初期値との比較)	52
5.17	鉛直方向乱流強度 (初期値との比較)	52
5.18	スパン方向乱流強度 (初期値との比較)	53
5.19	レイノルズ応力 (初期値との比較)	53
5.20	$\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_1 ($\sigma_3 = 0.56, \sigma_2$: integrated)	54
5.21	$\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_2 ($\sigma_3 = 0.56, \sigma_2$: integrated)	54
5.22	$\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_3 ($\sigma_3 = 0.56, \sigma_2$: integrated)	55
5.23	$\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_4 ($\sigma_3 = 0.56, \sigma_2$: integrated)	55
5.24	$\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_1 ($\sigma_1 = 0, \sigma_2$: integrated)	56
5.25	$\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_2 ($\sigma_1 = 0, \sigma_2$: integrated)	56
5.26	$\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_3 ($\sigma_1 = 0, \sigma_2$: integrated)	57
5.27	$\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_4 ($\sigma_1 = 0, \sigma_2$: integrated)	57
5.28	$\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_1 ($\eta = 0, \sigma_2$: integrated)	58
5.29	$\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_2 ($\eta = 0, \sigma_2$: integrated)	58
5.30	$\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_3 ($\eta = 0, \sigma_2$: integrated)	59
5.31	$\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_4 ($\eta = 0, \sigma_2$: integrated)	59
5.32	流れ方向乱流強度 (Taylor 仮説との比較)	61
5.33	鉛直方向乱流強度 (Taylor 仮説との比較)	61
5.34	スパン方向乱流強度 (Taylor 仮説との比較)	62
5.35	レイノルズ応力 (Taylor 仮説との比較)	62
5.36	圧力の乱流強度 (Taylor 仮説との比較)	63
5.37	三重相関 (Taylor 仮説との比較)	63
5.38	三重相関 (Taylor 仮説)	64
5.39	二点相関 R_{uu} (Taylor 仮説との比較)	65
5.40	二点相関 R_{uv} (Taylor 仮説との比較)	65
5.41	$\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_1 (Taylor 仮説, $\sigma_3 = 0.56, \sigma_2$: integrated)	66
5.42	$\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_2 (Taylor 仮説, $\sigma_3 = 0.56, \sigma_2$: integrated)	66
5.43	$\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_3 (Taylor 仮説, $\sigma_3 = 0.56, \sigma_2$: integrated)	67
5.44	$\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_4 (Taylor 仮説, $\sigma_3 = 0.56, \sigma_2$: integrated)	67
5.45	$\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_1 (Taylor 仮説, $\sigma_1 = 0, \sigma_2$: integrated)	68
5.46	$\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_2 (Taylor 仮説, $\sigma_1 = 0, \sigma_2$: integrated)	68
5.47	$\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_3 (Taylor 仮説, $\sigma_1 = 0, \sigma_2$: integrated)	69
5.48	$\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_4 (Taylor 仮説, $\sigma_1 = 0, \sigma_2$: integrated)	69
5.49	$\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_1 (Taylor 仮説, $\eta = 0, \sigma_2$: integrated)	70
5.50	$\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_2 (Taylor 仮説, $\eta = 0, \sigma_2$: integrated)	70
5.51	$\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_3 (Taylor 仮説, $\eta = 0, \sigma_2$: integrated)	71
5.52	$\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_4 (Taylor 仮説, $\eta = 0, \sigma_2$: integrated)	71
5.53	流れ方向乱流強度 (他計算法との比較)	73

5.54 鉛直方向乱流強度 (他計算法との比較)	73
5.55 スパン方向乱流強度 (他計算法との比較)	74
5.56 レイノルズ数応力 (他計算法との比較)	74

表 目 次

1.1 様々な乱流現象のフラクタル次元	3
2.1 第一原理と現象論の対応	17
2.2 変数変換のまとめ	21

記号表

$a_j, \tilde{a}_j, \hat{a}_j$: それぞれ $\alpha, \tilde{\alpha}, \hat{\alpha}$ における変数 a_j
\bar{A}	: 平均操作, $\tau^{-1} \int^\tau A dt$
c	: 位相速度
$E_1(k_1)$: 波数 k_1 に対するエネルギー・スペクトル
f	: ボルツマン関数
g_j	: 二点相関の変数分離変数 (式 (2.9, 2.11) が定義, $j = 1, 2, 3, 4$)
G_j	: g_j を周期成分分離したもの (式 (2.16) が定義, $j = 1, 2, 3, 4$)
h_j	: 三点相関の変数分離変数 (式 (2.12) が定義, $j = 1, 2, 3$)
i	: 虚数単位
k	: 波数座標
$(NS)_0 = 0$: (非圧縮) 連続の式
$(NS)_j = 0$: (非圧縮) Navier-Stokes 方程式 ($j = 1, 2, 3$)
p	: 平均圧力
p'	: 圧力ゆらぎ
q_j	: G_j をフーリエ変換したもの (式 (2.17) が定義, $j = 1, 2, 3, 4$)
q^*	: q の複素共役
R	: レイノルズ数
R.P.	: 実部 (Real Part)
s	: 渦座標
\underline{u}	: 流速の瞬時値, $\underline{u} = \underline{u} + \underline{u}'$
\underline{u}	: 平均流速
\underline{u}'	: 速度ゆらぎ
u_c	: 速度差で無次元化された $U_c, u_c = U_c/\Delta U$
$U_{+\infty}$: スプリッタープレート上方の一樣流速
$U_{-\infty}$: スプリッタープレート下方の一樣流速
U_c	: 上下一様流の算術平均, $U_c = (U_{+\infty} + U_{-\infty})/2$
ΔU	: 上下一様流の速度差, $\Delta U = U_{+\infty} - U_{-\infty} $
x, \tilde{x}, \hat{x}	: それぞれ 1 点目, 2 点目, 3 点目の位置ベクトル
α	: 混合層成長率
δ	: 混合層厚さ, $\delta = \alpha x_1$
η	: 自己相似座標, x_2/δ
μ	: 動粘性係数
ρ	: 密度
σ	: 混合層厚さで無次元化された渦座標, $\sigma = s/\delta$
$\chi(\eta)$: ガウス分布, $\exp(-\eta^2/2)$
ω	: 変数分離定数
$\Omega(A)$: 渦空間についての積分操作, $(2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} A d\sigma$

添字

- j : 変数 g_j, h_j, G_j, q_j について $j = 1, 2, 3$ が速度ゆらぎ, $j = 4$ が圧力ゆらぎ
 $+\infty$: スプリッタープレート上方の一様流
 $-\infty$: スプリッタープレート下方の一様流

略記

- DNS : Direct Numerical Simulation
LES : Large Eddy Simulation
RANS : Reynolds Averaged Navier-Stokes equation

方程式の名称

瞬時値 :

Navier-Stokes 方程式 (一般形, 3 次元 (\mathbf{x}))

平均流 :

Reynolds 平均方程式 (一般形, 3 次元 (\mathbf{x}))

↓

乱流混合層の平均流方程式 (自己相似形, 1 次元 (η))

レイノルズ応力テンソル :

一般化された Kármán-Howarth 方程式 (一般形, 6 次元 ($\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}$))

↓

渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式 (変数分離後の一般形, 6 次元 (\mathbf{x}, \mathbf{s}))

↓

4 次元ゆらぎ方程式 (変数分離後の自己相似形, 4 次元 (η, σ))

(乱流混合層の渦変数を含んだ Euler 方程式)

第1章

序論

1.1 はじめに

Reynolds^[1, 2]の円管内流れの研究とレイノルズ応力という概念の提唱をもって乱流の系統的研究の始まりと見ると、それから一世紀が過ぎたことになる。この間、乱流のメカニズム解明に向けて多くの研究がなされ様々な知識や概念が蓄積されてきた。しかし、いまだ完全な解明には至っておらず、乱流は古典力学最後の未解決問題と呼ばれている。実験による研究が主導してきたなかで、近年の計算機性能の急速な発展に伴い1980年代から数値計算による研究が盛んに行われるようになった。

未知の現象を解明しようとするならば、そこに用いられる理論は予言的(predictive)なものでなければならない。予言的であるためには、理論のフォーマリズムに実験結果に合わせて調整するような半経験的パラメータを含まないことが必要条件となる。乱流理論の中でこの条件をみたしているのは、直接シミュレーションと乱流統計理論に限られる。これらは前者が乱流瞬時量を、後者が乱流統計量を扱っているという点で対照的な立場にある。

直接シミュレーション(Direct Numerical Simulation; 以下, DNS)は、Navier-Stokes方程式が乱流の瞬時値について成立すると考える立場である。乱流の最小渦が捉えられるくらい微小な計算格子でNavier-Stokes方程式を時間発展的に計算する。この方法は「数値実験」と称されるくらい計算精度が高く信頼されている。しかしながら計算時間や計算容量の問題から、現実的な計算の実行はレイノルズ数 $R \sim 10^4$ が限界というのが共通の認識となっている。また、二平板間乱流のように流れ方向に周期境界条件を課すことのできる現象には向いているが、本論文で扱うような空間的に発達する流れへの適用は極めて困難となる。

乱流統計理論は、レイノルズ平均方程式とレイノルズ応力テンソルの支配方程式を連立して解く方法である。もともと無限に連立している方程式系が、打ち切り条件の導入によって閉じられる。Taylor^[3]によって一様等方性乱流について問題提起され、Kármán and Howarth^[4]

がその支配方程式を導出したのが始まりである。しかしながら、一様等方性という非現実的設定に問題があったのに加えて、提案された様々な打ち切り条件の導入法にも問題がありうまくいかなかった。そのような状況の中、Tsuge^[10, 13]は第一原理に基盤を置く方程式系を導き出し、それに変数分離法を適用することで、これらの問題点を同時に解決した。すなわち、剪断乱流のような現実の流れに適用可能な点、流れの条件に影響されることがない普遍的な打ち切り条件が導入されたという点で Kármán-Howarth 方程式の問題点をクリアした。本論文ではこの Tsuge^[10, 13] による渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式を乱流混合層に適用し、流れの構造を解析する。

1.2 乱流のフラクタル性

この節では、乱流の複雑性の根源と言えるフラクタルについて触れる。フラクタルとは、図 1.1 のようなギザギザな曲面又は曲線が、どこまで拡大してみても自己相似的にギザギザである性質を言う。曲面の至るところで微分不能なのである。その曲面の表面を解像度(最小目盛) r の面積要素で覆うことを考え、 r を小さくしていくとき、表面を覆うのに必要な面積要素の数 N と r との間に次のような関係:

$$N = r^{-D} \quad (1.1)$$

が成り立つ。 $D(= \log N / \log(1/r))$ はフラクタル次元と呼ばれる。乱流現象は、積分スケールから乱流の最小渦と言われるコルモゴロフスケールに到るまで、広範囲に渡ってフラクタルが続いている。図 1.1 は、軸対称乱流ジェットのレーザーシートによる切り口の可視化写真で、図 1.2 はこれをフラクタル解析した結果である^[6]。直線部分の存在が自己相似性を実証しており、この領域でフラクタルになっている。ノズル直径のオーダーからコルモゴロフスケールのオーダーまでフラクタルが続いていることがわかる。図 1.3 は円管後流ウエイクについて、コルモゴロフスケール付近のミクロな領域をフラクタル解析したものである^[6]。図中、 η がコルモゴロフスケール、 η_b が分子拡散の特性スケールである。可視化に用いた染料のシュミット数 Sc が $Sc \sim 10^3$ であることは、拡散が粘性散逸に比べてはるかにゆっくりとしていることを表す。このような場合、図のように二重のフラクタル構造を持つのである。この結果は、染料が流体の運動を正確に追従しているということ、この乱流のフラクタル性の終点がコルモゴロフスケールであると特定してよいことを保証する。乱流はおおよそ 2.36 という次元を持つフラクタルであることが報告されている(表 1.1)。この界面の時間に

伴う変化が乱流の瞬時速度であるから、速度計測値 (図 1.4) がフラクタル的にゆらぐことは明らかである。



図 1.1: 軸対称乱流ジェットの可視化写真^[6]

表 1.1: 様々な乱流現象のフラクタル次元^[6]

Flow	Scale range between η and L			Scale range between* η and η_0
	Method of measurement			
	1-D cuts ^b	2-D images	3-D images	
Round jet	2.36	2.36	2.36	2.7 ($Sc = 1930$) ^c
Plane wake	2.40	2.36	2.36	2.7 ($Sc = 1930$)
Plane mixing layer	2.39	2.34	—	—
Boundary layer	2.40	2.38	—	—

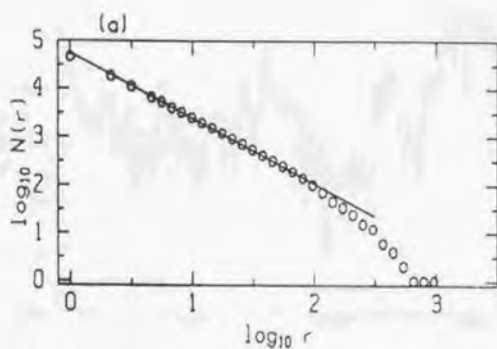


図 1.2: 軸対称乱流ジェット (図 1.1) のフラクタル解析結果^[6]

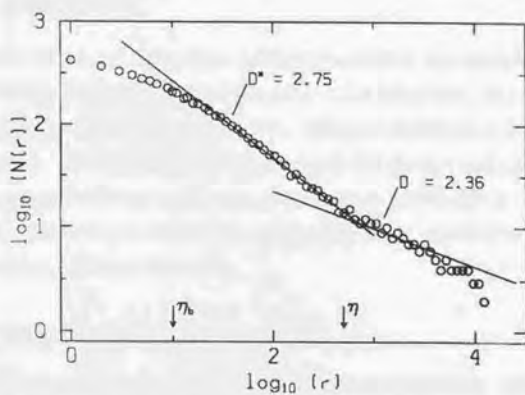


図 1.3: ミクロな領域のフラクタル解析^[5]

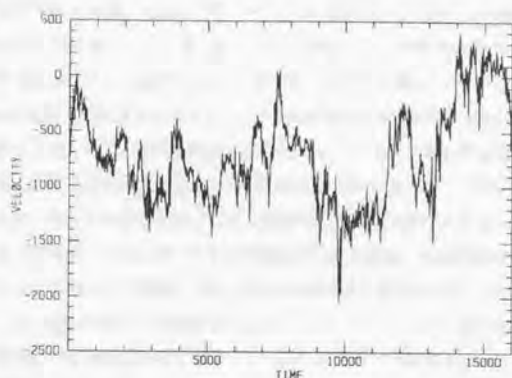


図 1.4: 瞬時速度の計測値^[7]

1.3 乱流理論の分類

未知の現象の解明という目的にかなった理論について議論するのが本論文の主旨である。そのような理論は予言的なものでなければならぬことを改めて強調したい。そのためにこの節では乱流理論の分類を行う。まず、予言的、記述的という言葉のここでの意味について述べる (1.3.1 節)。次に理論を乱流の瞬時物理量を扱う立場 (DNS と LES; 1.3.2 節) と統計物理量を扱う立場 (乱流統計理論と RANS モデル; 1.3.3 節) の二つに分類する。1.2 節との関わりで言えば、前者はフラクタルな量そのものを扱う理論であり、後者は平均操作によりフラクタルを平滑化した量を扱う理論である。

1.3.1 予言的理論と記述的理論

理論には何らかの仮定が必ず含まれている。その仮定が恣意的な場合、理論は決して予言的になり得ない。‘恣意的’な仮定とは、実験結果に合わせるような調整パラメータを含むような仮定のことを言う。そのような仮定を含んでいる場合、それは‘記述的’な理論である。

仮定が恣意的でない場合、理論は「予言的」になり得る。この場合、理論が予言的かどうかは、仮定の正当性にかかっている。仮定の正当性は、その理論から打ち出される矛盾のない結果の蓄積によってのみ証明される。例えば、あまり意識されていないが、DNSでは「Navier-Stokes 方程式が乱流を記述する」という仮定を含んでいる^[12]。Navier-Stokes 方程式は微分方程式である。微分方程式で記述されるためには、微小にゆらぐ乱流の瞬時量も細かくみれば時間と空間に滑らかな関数となっていなければならない。この時、本当に滑らかになっているのか、なっているならばどこまで細かく見れば滑らかになるのか、という疑問が湧いてくるはずである。DNS という方法が提案された当初は、乱流の最小渦であるコルモゴロフスケールより細かく分解能で見れば乱流の瞬時値も滑らかであろうと「信じられていた」だけで、この疑問に対する明確な答えは出ていなかった。フラクタル解析によって乱流ゆらぎのギザギザの終点がコルモゴロフスケールであることが証明され、広く認識されるようになったのは、DNS が十分に市民権を得てからのことであった。（実験による直接証明は図 1.3 である。）すなわち、実際に計算してみてもどのような流れも矛盾なく記述できるとすれば、その仮定は正しかったということになるのである。仮定が正しいことの根拠を探すのは後回しになる場合が多い。しかし、根拠を得たことで仮定の正当性はより堅固なものになる。

このような観点から、乱流理論を予言的なものと記述的なものとに分類することができる。双方とも実験で知られた現象を正しく再現できることが要求される。しかし、未知の現象を解こうというときに記述的な理論は適用することができない。適用しても信頼性を持たないからである。予言的な理論である DNS では、比較的低いレイノルズ数領域で精密な計算を行い、計算結果をデータベース化する。そのデータは乱流の微細渦構造の解析や乱流モデルの検証に使われる。実用利用には、記述的な理論である乱流モデルが用いられる。このように、理論の普遍性と現実問題の実行可能性とが対極に位置しているのが乱流理論の現状である。本論文で扱う渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式による方法は、これら両方を同時に指向したものである（図 1.5）。

1.3.2 乱流瞬時量を扱う理論

乱流の瞬時物理量を扱う理論の代表として DNS がある。DNS は近年の計算機技術の著しい発展とともに 1980 年代から試みられてきた。最も有名なものは、Kim, Moin and Moser^[13] による二平板間乱流の計算である。Kim et al は $Re = 3300$ という比較的低いレイノルズ数

についてDNSを実行した。その結果は、当時の実験結果の中で最も信頼の高かった Kreplin and Eckelmann^[14]の実験値と壁近傍領域でズレを示した。しかし、後に西野と笠木^[34]の3次元画像処理流速計による精密な実験結果が Kim et al の結果によく一致したことで、DNS計算の正確さが証明された。このため、DNSは数値実験という捉え方がなされている。しかし、この方法をそのまま高レイノルズ数にまで適用させようとするとう問題が生じる。DNSの立場は、Navier-Stokes 方程式が乱流の瞬時値について成り立つと仮定してそれを解く、というものである。当然、計算に用いる格子の刻み幅には、現象を十分に解像できる分解能が要求される。1.2節で述べた乱流のフラクタル性からその格子幅はコルモゴロフスケール以下でなくてはならない。計算領域全域の3方向 (x_1, x_2, x_3) にコルモゴロフスケール幅で格子を刻むことを考えると、格子点数(～計算容量) n はレイノルズ数 R の増加に伴って次式のよう増加する。

$$n \sim R^{3/4} \quad (1.2)$$

このように、レイノルズ数の増加に伴い最小渦のスケールが小さくなることに起因する困難性は small eddy difficulty と呼ばれる。実際上DNSで計算を実行できる限界は $R \sim O(10^4)$ であることが共通の認識となっている。このため、計算格子のサイズで分解可能な渦はNavier-Stokes 方程式を直接解き、格子サイズ以下の渦についてモデル化する Large Eddy Simulation(以下、LES)と呼ばれる方法が提案され、より高いレイノルズ数への適用が図られている。

1.3.3 乱流統計量を扱う理論

乱流の統計物理量を扱う理論として、乱流統計理論とRANSモデルがある。乱流統計理論は方程式の打ち切り条件(closure condition)が恣意的なものでない限り予言的であり得る(詳細は次章)。この意味で渦変数を含んだNavier-Stokes 方程式は、予言的理論の必要条件をみたしている。実際に予言的であるかどうかは、1.3.1節で述べたように、仮定(ここでは打ち切り条件)の正当性にかかっている。それは現象を解いた結果で判断されるものである。RANSは、Reynolds Averaged Navier-Stokes equation(Reynolds 平均方程式)の略語である。RANSモデルとは、Reynolds 平均方程式に未知数として含まれるレイノルズ応力テンソルをモデル化するもので、そのモデル化には恣意的なパラメータが含まれるので記述的な理論である。Reynolds 平均方程式とレイノルズ応力の方程式を連立して解くという手法

的性質が似ているので、二者は混同されやすい。そこで共通点と相違点とを明確にしておきたい。

共通しているのは、今述べた手法的な点と統計量を扱っている点である。統計量を扱うことの利点は計算の実用可能性にあらわれる。フラクタル的なゆらぎを平滑化した量を扱うので計算格子解像度の要求がDNSに比べて緩いことや、扱う量そのものが最終的に必要とされる量(平均流速や乱流統計量)に直結していることは、計算の省力性に大きく貢献している。また、本論文のように自己相似性を導入できることもその良い例と言える。

一方、渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式の持つ以下の性質が、RANS モデルとの決定的な違いである。

1. 方程式が第一原理に基盤を置くこと
2. 理論のフォーマリズムに半経験的調整パラメータが一切含まれないこと

ここで、1. について強調しておきたいことがある。後に 2.2 節で述べるが、第一原理に基づいてレイノルズ応力テンソルの支配方程式を導き出すと、Kármán-Howarth 方程式を一般化した形の 6 次元 $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$ 方程式に帰着する(式 2.7, 2.8)。このことは次のことを意味する。Reynolds 平均方程式という 3 次元方程式の中では、レイノルズ応力テンソル $\overline{u_j'(\mathbf{x})u_i'(\mathbf{x})}$ は 3 次元空間内の点 (\mathbf{x}) の値として要求されるが、その値は 6 次元空間 $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$ で定義される $\overline{u_j'(\mathbf{x})u_i'(\tilde{\mathbf{x}})}$ という相関の 2 点を一致させる $(\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x})$ ことでのみ決定されるのである。全ての RANS モデルはこの要請を無視した方程式から出発している。また、レイノルズ応力がどの程度正確に計算されているかを評価せずに、平均流のみを議論する場合がほとんどである。ここにも相違点がある。

上に述べてきた特徴から、渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式は予言性と実用性の両方を同時に指向しているということが言える。

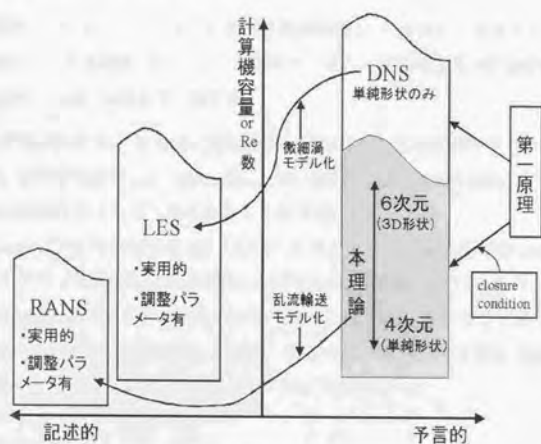


図 1.5: 理論の分類と特徴

1.4 研究の背景

図 1.6 のように速度差のある平行流の界面で混合が空間的に発達する流れを乱流混合層 (Turbulent Mixing Layer) という。幾何学的に基礎的な流れでありながら、固定境界を持たない流れの性質を余すところなく備えているため、研究が盛んに行われてきた。他の自由剪断乱流と同様に、研究の焦点は、流れが自己相似性を持つかどうか、持つならばその自己相似性はユニークなものかどうかを調べることにある。乱流混合層が自己相似的であるためには、流れが十分に発達した領域で次の性質:

1. 混合層厚さ δ が $\delta = \alpha x_1$ のように流れ方向の距離 x_1 に比例して成長する
2. 代表長さ δ 、代表速度 ΔU によって無次元化された平均流速及び乱流統計量の値が $\eta = x_2/\delta : \text{const.}$ の線上で一致する

を持つことが要求される。 η は自己相似座標と呼ばれる。自己相似性がユニークなものであるならば、混合層成長率 (α : spreading rate) の値が、適切な無次元化の下で流れの条件 (初期条件や速度比) によらず一定になることが予想される。

また、Roshko^[24]の可視化写真 (図 1.8, 1.9) に見るような組織的渦構造 (coherent eddy structure) のメカニズム解明に焦点を置いた研究も盛んに行われている。

以下では、まず乱流混合層の種類について触れ (1.4.1 節)、続いてこれまでに行われている乱流混合層の実験による研究 (1.4.2 節)、DNS による研究 (1.4.3 節)、渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式による研究 (1.4.4 節) について順に述べる。

1.4.1 混合層の種類

一般に混合層といえば図 1.6 に示す流れを指し、本論文でもこの流れを扱っているが、実験や計算によっては別の定義による混合層が扱われる場合がある。混同を避けるため、その区分けをここで明確にしておく。

二つの観点から別定義の混合層が考えられる。

一つは、時間的に発達する混合層 (temporally developing mixing layer) である。これは図 1.7 に示すように対向する平行流が x_2 方向へ '時間的' に発達する混合層である。この流れは実験することのできない仮想的混合層であるが、後に述べるように DNS では境界条件に制約があるため、この混合層を扱っている。

もう一つは、一平行流の混合層 (single stream mixing layer) である。これは、平行流と静止流体の間で形成される混合層のことで、図 1.6 で $U_{+\infty} = 0$ とした流れのことである。二平行流間の混合層に比べて条件設定がしやすいため、乱流混合層の実験的研究はこの流れから始まった。

以上の意味で本論文で扱う流れを正確に言うならば、'二平行流' 間の '空間的' に発達する混合層 (two-stream spatially developing mixing layer) ということになる。

1.4.2 実験による研究

Liepmann and Laufer^[18]による一平行流乱流混合層の研究が、自由剪断乱流の自己相似性を実験的に示した初めての例である。その後、乱流ジェットやウエイクとともに、本論文で扱う二平行流間の乱流混合層についても実験的研究が盛んに行われ^[20, 21, 22]、この流れが自己相似性を持つことが証明されている。

しかしながら、個々の実験によって、混合層成長率 (α) の値やレイノルズ応力のピーク値に相違がある。

例えば混合層成長率は、

$$\hat{\alpha} = \frac{U_{+\infty} + U_{-\infty}}{2(U_{+\infty} - U_{-\infty})} \frac{d\delta}{dx_1} = \frac{U_c}{\Delta U} \frac{d\delta}{dx_1} \quad (1.3)$$

のように無次元化することで、速度差や速度比によらず一定値になると考えられている。ところが実験によってその値に食い違いがあり、いまだに共通した値は得られていない。この食い違いには様々な要因が考えられる。例えば、速度比、スプリッタープレートの形状、一様流中の乱流強度、スプリッタープレート上における境界層の初期状態 (乱流か層流か) の影響が挙げられる。中でもスプリッタープレート上における境界層の初期状態の違いが混合層の発達に与える影響が大きいと考えられている。

Bell and Mehta^[21]は、この境界層の初期状態の違いによる影響を調べるために、層流境界層から出発した場合 (untripped case) と乱流境界層から出発した場合 (tripped case) の 2 ケースについて実験を行っている。更にそれ以前の実験では行われていなかったスパン方向への平均操作を初めて行い、流れの 3 次元性による影響を除去している。これら 2 ケースの混合層成長率には差異があった (untripped case: $\alpha = 0.023$, tripped case: $\alpha = 0.019$)。その理由として、層流から始まった混合層は初期状態を忘れにくく、十分発達した状態に到達し

ていないのだとしている。彼らの結論は、もっと後方まで実験できるようになれば、それらは一致するだろうというものである。本論文では、十分に発達した状態に到達していると考えられる Bell and Mehta^[21]の実験結果 (tripped case) と主に比較を行う。

1.4.3 DNS による研究

DNS では流れ方向に周期的な流れを扱うことがほとんどで、空間的に発達する混合層を乱流領域まで解くことはできない¹。この流れを忠実に再現しようとする、流れ方向に周期境界条件が使えないため半無限に大きな計算領域が必要となる。そのような巨大な計算領域に微小な格子を刻んで計算を実行するのは極めて困難である。そこで代替として時間的に発達する混合層 (図 1.7) を計算している^[10]。計算それ自体は精度の高いものであるが、この流れは混合層が流れ方向に「空間的に」発達する現実の流れと異なり、実験が不可能である。この思考実験的混合層から得られる知見を用いて、現実の混合層についてアナログ的な議論をすることはできる。DNS^[16, 17]では、時間 (t) と空間 (x_1) を結ぶある関係式 ($t = x_1/U_c$) を導入することで、Bell and Mehta^[21]の実験と比較している。しかし、それはあくまでもアナロジーの域を脱し得ないことを忘れてはならない (付録 A 参照)。

1.4.4 渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式による研究

詳細は第 2 章で述べるが、渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式は乱流ゆらぎ (レイノルズ応力テンソル) の支配方程式である。この方程式は平均した量を扱っているので自己相似座標を用いて記述することができる (付録 C 参照)。そして、その自己相似方程式の解が捕まることが自己相似解 ($x_1 \rightarrow \infty$ における漸近解) の証明になる。自己相似性を持つことは方程式がレイノルズ数に依存しないことと等価である。したがって乱流混合層の場合、この方程式は渦変数を含んだ Euler 型方程式となる。渦変数は 3 次元の独立変数であり、自己相似座標 η と合わせてこの方程式は 4 次元で記述される。ブリチチゴ^[36]は、この 4 次元ゆらぎ方程式から鉛直方向の渦変数を省略した 3 次元の計算を実行している。計算結果については DNS の結果とともに 5.5 節で本論文の結果と比較している。

¹最近、流れ方向にのみ有限差分法を適用することで空間発展の混合層を解く試みがおこなわれている (宮内, 1999; private communication) が、現在のところ遷移領域までで、完全発達した乱流まで到達していない。

1.5 研究の目的

渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式の特徴の一つは、渦空間の境界条件が流れの幾何形状によらず遠方で解がゼロという斉次境界条件で与えられることにある。渦空間の遠方 ($|s| \rightarrow \infty$) は無限に大きな渦構造に対応しており、この境界条件はそのようなスケールの渦構造は存在しないことを反映している。そして解が渦空間に‘孤立波’として存在することを示唆している。乱流統計量のような物理量は、孤立波解を渦空間全域で積分することから求められる。平均流の方程式と渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式との連立計算から、平均流速とレイノルズ応力テンソルを同時に決定するのがシナリオである。本論文ではそのステップとして、平均流速は実験値から与えることで渦変数を含んだゆらぎ方程式のみを扱い、正確なレイノルズ応力テンソルを決定することに主眼を置いている。RANS モデルとの決定的な違いは、方程式が第一原理に基盤を置くこと、及び理論のフォーマリズムに半経験的調整パラメータが一切含まれていないことである。

乱流混合層の他にこれまでに渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式が適用された例として、ベナール対流^[20]と乱流平面火炎^[14]がある。これらの適用例は、ブリチチゴの場合と同様にその現象に対して最も一般的な方程式からいくつかの渦変数を省略した計算であった。

以上をふまえて、本研究の目的は次のようにまとめられる。

1. DNS では扱いが困難な流れの典型例として空間的に発達する乱流混合層を扱うこと
2. 渦空間に解が孤立波として存在することを確かめること
3. これまで実行されたことのない渦変数全てを含んだゆらぎ方程式の計算を実行すること
4. 計算結果を実験値や他の計算法による結果と比較し、その妥当性を検討すること

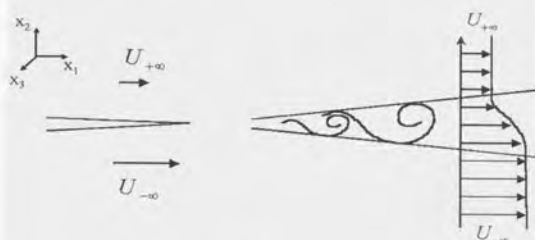


図 1.6: 空間的に発達する乱流混合層

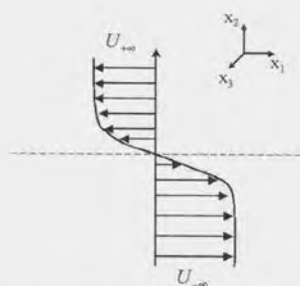


図 1.7: 時間的に発達する仮想乱流混合層

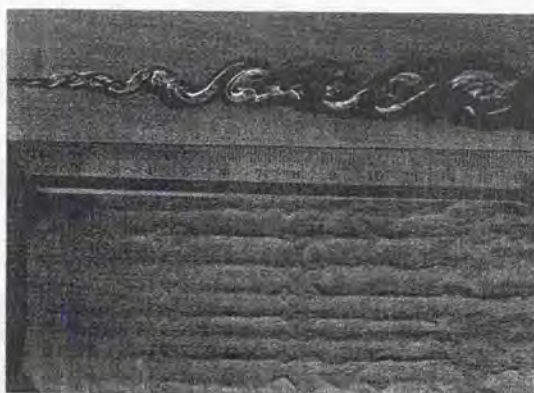


図 1.8: 乱流混合層の可視化写真 (露光時間: $1-2\mu s$)^[26]

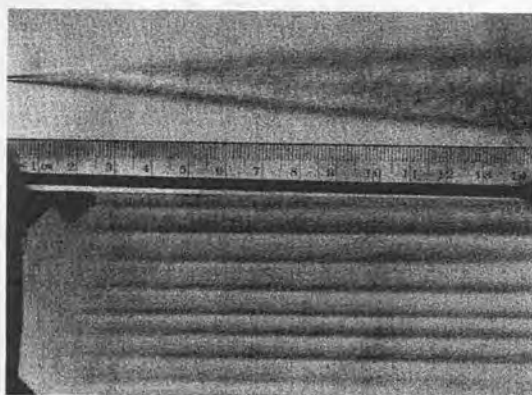


図 1.9: 乱流混合層の可視化写真 (露光時間: $2s$)^[26]

第2章

渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式

この章では本論文で扱う Tsuge^[10, 13]の渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式の導出過程を追う (2.1~2.4 節)。また、そこに新しく登場する渦変数と孤立波解 (2.4.3 節)、乱流渦の位相速度 (2.4.4 節) についても述べる。特に断らない限り非圧縮性流体のみを扱っているものとする。

2.1 理論の概要

2.1.1 導出のあらすじ

渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式は、第一原理から一意的に導き出される乱流の現象論的支配方程式を変数分離して得られる。‘第一原理’とは、流体を N 個の分子 (1mol であればアボガドロ数個) の連続体とみなし、それら分子のニュートン力学と数学的確率論のみを信頼して、連続体空間での支配方程式を導き出す立場を言う。‘一意的’とは、現象論的方程式 (例えば Navier-Stokes 方程式) と矛盾しなければよいと考えれば、幾通りでもモデル方程式を立てることができるのに対して、この立場では方程式が第一原理から唯一に定められることを指している。第一原理からの方程式系は、 N 粒子系の力学方程式であることを反映して N コの連立方程式を形成する。したがって、方程式系をどこかで閉じる必要性が生じる。Tsuge^[10, 13]は二点、三点の乱流相関に変数分離を施すことで、ある普遍的な打ち切り条件を導入した。変数分離後の方程式は Navier-Stokes 方程式を次元拡張した形となる。そこに新しく登場する変数 s は、乱流渦構造の大きさをあらわすので渦変数と呼ばれている。

表 2.1: 第一原理と現象論の対応

Particles	BBGKY Hierarchy	→	Phenomenology
N	Liouville Eq.		
⋮	⋮		
⋮	$(f_i = \int f_N dz_{i+1} \cdots dz_N; \text{integral operation})$		
⋮	⋮		
2	2-particle Eq. (without tertiary chaos)	→	Generalized Kármán-Howarth Eq.
	$D(f_{ii}) = J_2(f_{iii})$	→	$\hat{u}'_i(NS)_j + u'_j(NS)_i = 0 \quad (4.1)$
1	1-particle Eq. (without binary chaos)	→	Reynolds Averaged Navier-Stokes Eq.
	$D(f) = J(f_{ii})$	→	$(NS)_j = 0 \quad (4.2)$
Turbulent ↑			
Laminar	Boltzmann Eq. (with binary chaos)	→	Navier-Stokes Eq.
	$D(f) = J(ff)$	→	$(NS)_j = 0 \quad (4.3)$

2.1.2 乱流統計理論における位置付け

この理論は乱流統計理論の枠組みに入る。乱流統計理論は、Taylor^[3] によって一様等方性乱流について問題提起されたのが始まりで、Kármán and Howarth^[4] によってその支配方程式が導出された。しかしそれは、格子乱流にしか成り立たない‘一様性’という仮定と、格子乱流についても成り立たない‘等方性’という非現実的仮定とによっており、実用上重要な剪断乱流には適用できないという欠点を有していた。加えて、提案された様々な打ち切り条件の導入法にも問題があり、うまくいかなかった。これに対して Tsuge^[10, 13] は変数分離法を用いて剪断乱流も扱うことができる方程式を提案した。その式に一様かつ等方という仮定を導入すると Kármán-Howarth 方程式と一致する^[10]。これらのことから、Tsuge^[10, 13] の方程式は Kármán-Howarth 方程式を一般化したものと言うこともできる。

2.2 第一原理から導出された乱流の現象論的支配方程式

表 2.1 にみるように, Boltzmann 方程式に流体モーメントをとって展開すると, 層流の Navier-Stokes 方程式 (4.3) が導出される^[26, 27, 28]. この際, '分子は衝突するまでお互いの存在を知らない' という 2 分子混沌仮説 (binary molecular chaos: $f_{11} = ff$) が導入されている. 乱流の場合にもこの仮説が成り立つのだろうか, という疑問がこの理論の出発点である. この仮説を導入せずに二点分布関数をそのままの形で残し, BBGKY 階級理論最下層の 1 粒子方程式に流体モーメントをとると, Reynolds 平均方程式 (4.2) が導出される^[9]. すなわち '乱流では 2 分子は相関を持つ' としたことが, Reynolds 平均方程式におけるレイノルズ応力テンソルの登場につながっている. 次の階層の 2 粒子方程式からは, このレイノルズ応力テンソルを決定する方程式 (4.1) が導出される^[8, 13]. 前述したようにこの式に一様性と等方性を導入すると, Kármán-Howarth 方程式と一致する^[4, 10]. したがって, 式 (4.1) は Kármán-Howarth 方程式を剪断乱流にも適用できる形に一般化したものと言うこともできる. この式が渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式のおおもとである. 以下, その具体形を見ていく.

2.2.1 Reynolds 平均方程式

Reynolds 平均方程式 (4.2) の具体形は以下ようになる.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial x_r} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_r^2} \right) u_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} = - \frac{\partial \tau_{jl}}{\partial x_l}. \quad (2.5)$$

ここで,

$$\tau_{jl} \equiv \overline{u'_j(\mathbf{x}, t) u'_l(\mathbf{\bar{x}}, t)}_{\mathbf{\bar{x}}=\mathbf{x}} \quad (2.6)$$

である. 記号 ($\overline{\quad}$) は, コルモゴロフ長を l_K , 流れの特性長を l とするとき $l_K^3 \ll \delta V \ll l^3$ であるような体積 δV についての平均をあらわす. 式 (2.4) が連続の式, (2.5) が運動量保存式である. これらは現象論でよく知られている方程式であるが, 第一原理から出発しても同じ形が得られることは, Tsugé and Sagara^[9]によって示された. この式には一つ高次の統計量, レイノルズ応力テンソル τ_{jl} , が未知数として含まれている. この新たな未知量 τ_{jl} の支配方程式が次節の方程式である.

2.2.2 一般化された Kármán-Howarth 方程式

式 (4.1) の具体形は次のようになる。

$$\frac{\partial \overline{u_r' \tilde{u}_l'}}{\partial x_r} = \frac{\partial \overline{u_j' \tilde{u}_l'}}{\partial \tilde{x}_r} = 0, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial x_r} + \tilde{u}_r \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_r} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_r^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_r^2} \right) \overline{u_j' \tilde{u}_l'} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_l' p'} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} \overline{u_j' p'} \right) \\ & + \frac{\partial u_j}{\partial x_r} \overline{u_r' \tilde{u}_l'} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial \tilde{x}_r} \overline{u_j' \tilde{u}_r'} + \frac{\partial}{\partial x_r} \overline{u_j' u_r' \tilde{u}_l'} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_r} \overline{u_j' \tilde{u}_r' u_l'} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

式 (2.7) が (ゆらぎの) 連続の式, (2.8) が (ゆらぎの) 運動量保存式である。現象論的方程式と矛盾しなければ良いという考え方に立てば、レイノルズ応力について原理的には無限次のモデル方程式を作ることが可能である。これに対して、第一原理に基づけば方程式が式 (2.7, 2.8) の形に限定されるということが重要である。

Reynolds 平均方程式の場合と同様に、式 (2.8) には 1 つ高次の 3 重相関が未知数として含まれている。このように非線形項を通して 1 次高い相関が未知数として含まれているために、方程式は事実上無限に連立する、方程式系をここで閉じるために、次節のような変数分離と打ち切り条件が導入される。

2.3 変数分離と打ち切り条件の導入

2.3.1 変数分離と打ち切り条件

二点相関に次のような変数分離を施す。

$$\begin{aligned} \overline{u_j'(x, t) u_l'(\tilde{x}, t)} &= \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(x, k, t) g_l^*(\tilde{x}, k, t) dk \\ &= \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(x, k, t) g_l(\tilde{x}, \tilde{k}, t) \delta(k + \tilde{k}) dk d\tilde{k}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

l は現象の幾何学的特性長である。式 (2.9) で、レイノルズ応力が対称テンソルであるという要請と等価な次の関係：

$$g_j^*(k) = g_j(-k) \quad (2.10)$$

を用いている。変数分離の変数 g_j は複素関数であり、 g_j^* は g_j の複素共役をあらわす。同様に速度-圧力間の乱流相関は次のように変数分離される。

$$\overline{u_j'(x, t) p'(\bar{x}, t)} = \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(x, k, t) g_4(\bar{x}, \bar{k}, t) \delta(k + \bar{k}) dk d\bar{k}. \quad (2.11)$$

$g_j (j = 1, 2, 3)$ が各方向の速度ゆらぎ、 g_4 が圧力ゆらぎに対応する変数分離変数である。

式(2.9)に倣って三点相関を次のように変数分離する。

$$\overline{u_j'(x, t) u_r'(\bar{x}, t) u_l'(\bar{x}, t)} = \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} h_j(k) \hat{h}_r(\bar{k}) \hat{h}_l(\bar{k}) \delta(k + \bar{k} + \bar{k}) dk d\bar{k} d\bar{k}, \quad (2.12)$$

ここで、 $h(\bar{x}, \bar{k})$ を $\hat{h}(\bar{k})$ と簡略的に表記した。

k は波数ベクトルである。 g_j, h_j は変数分離変数で、速度の次元を持っている。それ自身は物理量をあらわさないが、式(2.9)、(2.12)のようにその積を波数空間全域にわたって積分することで物理量(乱流相関)と結び付いている。

ここで次のような仮定を導入して方程式系を閉じる。

打ち切り条件

$$\hat{h}_j = g_j \quad (2.13)$$

二点相関を記述する変数分離変数 g_j と三点相関の変数分離変数 h_j との関数形が等しい、というこの打ち切り条件が、理論に含まれる唯一の仮定である。この仮定が恣意的ではあり得ないことは、変数分離という純粋な数学の中での仮定であること、換言すれば対象とする流れによって調整するような物理的要素がどこにも入っていないことから明らかである。前述(1.3節)したように、仮定の正当性は、この条件から得られた解が圧縮性の有無、反応性の有無に関わらず乱流現象を普遍的に説明するということによってのみ証明されると言うほかない。この理論は半経験的調整パラメータを含まないので、その成否の判断はいまいさを含まないことが特徴といえる。

2.3.2 乱流ゆらぎ方程式 (g -表示)

一般化された Kármán-Howarth 方程式 (2.7, 2.8) に変数分離 (2.9, 2.12) と打ち切り条件 (2.13) を導入すると次の方程式が導出される (導出の詳細計算は付録 B 参照)。

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial x_r} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_r^2}\right) g_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_r} g_r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g_4}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_r} l^3 \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k} - \hat{\mathbf{k}}) g_r(\hat{\mathbf{k}}) d\hat{\mathbf{k}} = i\omega g_j. \quad (2.15)$$

ここで、 ω は周波数の次元をもつ変数分離定数である。

2.4 渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式

2.4.1 変数変換

微積分方程式 (2.15) を扱いやすい微分方程式に変換するために、次の 2 段階の変数変換を施す。

周期成分とその振幅とに分離 ($g \rightarrow G$) :

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \quad (2.16)$$

フーリエ変換 ($G \rightarrow q$) :

$$G_j(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} l^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}} q_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}, t) d\mathbf{s} \quad (2.17)$$

表 2.2 に変数変換をまとめた。 c_j は乱流渦の位相速度をあらわす (2.4.4 節後述)。

表 2.2: 変数変換のまとめ

従属変数	g_j	\rightarrow	G_j	\rightarrow	q_j
独立変数	$\frac{\partial}{\partial x_j}$	\rightarrow	$\frac{\partial}{\partial x_j} + ik_j$	\rightarrow	$\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial s_j}$
変数分離定数	$i\omega$	\rightarrow	$ic_j k_j$	\rightarrow	$c_j \frac{\partial}{\partial s_j}$

2.4.2 渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式

変数変換の結果、物理空間 ($\mathbf{x}; 3D$) と渦空間 ($\mathbf{s}; 3D$) で記述される 6 次元の Navier-Stokes 型方程式が導出される。これが渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式である。

$$\partial_j q_j = 0, \quad (2.18)$$

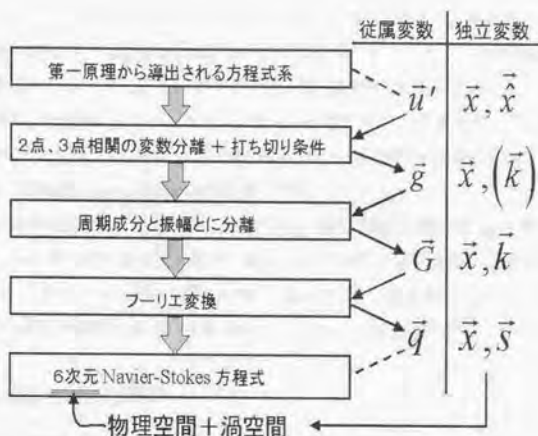


図 2.1: 渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式導出の流れ

$$\left(-c_r \frac{\partial}{\partial s_r} + \frac{\partial}{\partial t} + u_r \partial_r - \nu \partial_r^2\right) q_j + \frac{1}{\rho} \partial_j q_s + \frac{\partial u_j}{\partial x_r} q_r + \partial_r q_j q_r = 0. \quad (2.19)$$

ここで,

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial s_j}. \quad (2.20)$$

図 2.1 に方程式導出の流れをまとめた.

2.4.3 渦空間と孤立波解

変数分離式 (2.9) を s -空間で書くと次のようになる.

$$\overline{u_j'(\mathbf{x}) u_l'(\hat{\mathbf{x}})} = \frac{1}{(2\pi l)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q_j(\mathbf{x}, s) q_l(\hat{\mathbf{x}}, s + \Delta \mathbf{x}) ds. \quad (2.21)$$

ここで, $\Delta \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ とおいた.

これが乱流統計量と孤立波解とを結ぶ関係式である. と同時にこの式そのものが変数 s の定義といってよい. 式 (2.18, 2.19) の孤立波解をこの式によって s -面全域で積分することから二点相関が決定される. 二点を一致 ($\Delta \mathbf{x} = 0$) させれば, レイノルズ応力テンソルが得ら

れる。二点の相関は乱流渦の構造と密接なつながりがある。例えば、乱流混合層の縦渦の大きさはスパン方向への二点相関 $\overline{u_2' u_2'}(\Delta z)$ から知ることができる(5.2.3節後述)。このように s は渦構造のスケールをあらわすので、渦変数(渦空間)と呼んでいる。

二点相関は二点を離していく ($|\Delta x| \rightarrow \infty$) と、いずれゼロに減衰する。言い換えればお互いの点は関知し合わなくなる。二点に相関があることを広義の乱流渦と定義すれば、相関がなくなるまでの距離 $|\Delta x|_0$ が渦の大きさを与える。

式(2.21)にみるように二点相関は s -面で Δx だけ離れた位置の解 q_j の積から決まるので、 $|\Delta x| \rightarrow \infty$ すなわち渦空間の遠方 ($|s| \rightarrow \infty$) で解はゼロになるような分布をしているはずである。このことから解 q_j が渦空間に「孤立波」として存在することがわかる。また、孤立波解の分布する領域の幅は、ほぼ $|\Delta x|_0$ になることも予想できる。

2.4.4 位相速度 c について

表2.2からわかるように、 c は変数分離定数 ω から非分散公式 $\omega = k \cdot c$ を通して得られ、乱流渦の位相速度をあらわす。位相速度は可視化実験から求めることができる。図2.2は、可視化写真(図1.8)にみるような大規模な渦構造の軌跡を追ったものである。図中の直線の傾きが渦の伝播速度 c の大きさをあらわす。傾きの平均値が上下平行流の算術平均 ($|c| = U_c = (U_\infty + U_{-\infty})/2$) となることが報告されている^[24]。

一方、微細渦の速度は、Taylorの仮説、すなわち乱流渦はローカルな平均流に乗って動くというのがよい近似だとされている。しかし、位相速度 c は、もともと変数分離定数 ω の変換によって得られたものであるから、位置に依存するTaylorの仮説に基づいた c を用いることは変数分離に違反することになる。

本来 c の値は流れの固有値として決定されるべきものである。しかし、複雑な流れの場合に、具体的にをどのようにしてそれを決定するのかは課題として残っている。

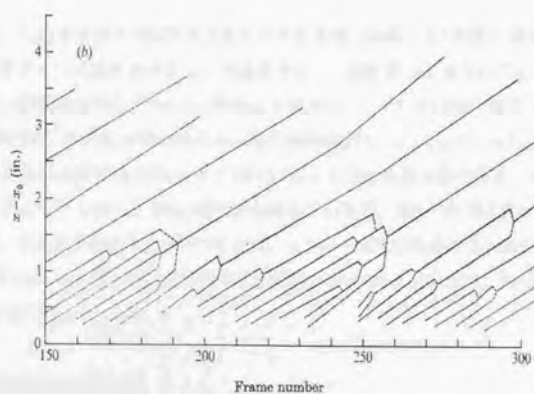


図 2.2: 乱流渦の軌跡^[24]

第3章

乱流混合層の支配方程式

この章では、乱流混合層の支配方程式を自己相似座標で記述する(付録C参照)。無次元化には、代表長さとして混合層厚さ δ 、代表速度として速度差 ΔU を用いている。Reynolds 平均方程式と渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式から、それぞれ平均流の方程式(3.1節)とゆらぎの方程式(3.2節)が導出される。自己相似座標は、 $\eta = x_2/\delta = x_2/\alpha x_1$ という形をしている。混合層成長率 α はオーダー $O(1/100 \sim 1/50)$ の微小量である。平均流方程式、ゆらぎ方程式ともに $O(1)$ と $O(\alpha)$ の項から成っているが、 $O(\alpha)$ の項は微小であることから省略した。自己相似性があるということは、レイノルズ数に依存しない解をもつことを意味する(付録C)。したがって、渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式は、この場合、渦変数を含んだ Euler 方程式となる。

3.1 平均流の方程式

自己相似座標で記述された平均流方程式は、次のような常微分方程式になる。

平均流の方程式:

$$-\eta \frac{du}{d\eta} + \frac{1}{\alpha} \frac{dv}{d\eta} = 0, \quad (3.1)$$

$$-\eta u \frac{du}{d\eta} + \frac{1}{\alpha} v \frac{du}{d\eta} + \frac{1}{\alpha} \frac{d\tau}{d\eta} = 0. \quad (3.2)$$

τ はレイノルズ応力で、ゆらぎ方程式(3.6,3.7)によって決まる孤立波解 q_1, q_2 から次のように計算される。

$$\tau(\eta) \equiv \frac{\overline{u_1'(\eta)u_2'(\eta)}}{\Delta U^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q_1(\eta, \sigma) q_2(\eta, \sigma) d\sigma. \quad (3.3)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1/\Delta U \\ v &= u_2/\Delta U \\ \eta &= x_2/\delta \\ \sigma &= s/\delta \\ \delta &= \alpha x_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

境界条件:

$$\left. \begin{aligned} u &\rightarrow U_{+\infty}/\Delta U \quad \text{as } \eta \rightarrow +\infty \\ u &\rightarrow U_{-\infty}/\Delta U \quad \text{as } \eta \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

3.2 4次元ゆらぎ方程式

自己相似座標で記述されたゆらぎ方程式は、次のような定常4次元 (η, σ) の Euler 型方程式になる。

4次元ゆらぎ方程式:

$$\partial_r q_r = 0, \quad (3.6)$$

$$q_r \partial_r q_j + (u - c) \partial_1 q_j + \partial_j q_4 + \delta_{j1} \frac{du}{d\eta} q_2 = 0. \quad (3.7)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \partial_1 &\equiv \partial/\partial \sigma_1 \\ \partial_2 &\equiv \partial/\partial \sigma_2 + \partial/\partial \eta \\ \partial_3 &\equiv \partial/\partial \sigma_3 \\ c &= c_1/\Delta U \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

境界条件:

$$\left. \begin{aligned} (q, q_4) &\rightarrow 0 \quad \text{as } |\sigma| \rightarrow \infty \\ (q, \partial q_4/\partial \eta) &\rightarrow 0 \quad \text{as } |\eta| \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

偶奇性:

式 (3.6, 3.7) から解 q_j は σ_3 について以下のような偶奇性を持っていることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} q_1, q_2, q_4 &: \sigma_3 \text{ に偶関数} \\ q_3 &: \sigma_3 \text{ に奇関数} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

α の扱い:

ゆらぎの方程式には α が陽的にあらわれない。したがって、 α の値は平均流との連立計算を行って初めて決定されるものであることがわかる。以下の章では、連立計算の第一段階として、平均流速は既知として実験から誤差関数で与える^[21]ことで、ゆらぎ方程式のみを扱っている。よって、 α の値も実験値 ($\alpha = 0.019$) を用いていることになる。

第4章

孤立波解の存在検証

4次元ゆらぎ方程式(3.6.3.7)に解が孤立波として存在し得るのか、という根本的な疑問を検証するのがこの章の目的である。エネルギースペクトルの $-5/3$ 乗則をヒントに孤立波形の重み関数 $B(\sigma)$ を定め(4.1節)、そのまわりで式(3.6.3.7)をモーメント展開すると、最終的に一つの代数方程式に帰着する(4.2節)。この方程式に実数解が存在すれば、それがモデル孤立波解の存在を証明することになる(4.3節)。

4.1 重み関数の決定

解 q_j にある重み関数 $B(\sigma)$ のまわりに級数展開することを考えたい。 $B(\sigma)$ は、次の手順で決められる。波数空間でエネルギースペクトル

$$E_1(k_1) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{k}) dk_2 dk_3 = (k_0^2 + k_1^2)^{-\zeta} \quad (4.1)$$

をみたすような関数として

$$E(\mathbf{k}) = (k_0^2 + k^2)^{-\zeta-1} \quad (4.2)$$

を考える。ここで、 $k = |\mathbf{k}|$ である。また、 k_0 は特性長の逆数をあらわし、ここでは $k_0 = 1.5$ としている。 ζ はエネルギースペクトル E_1 の実験にあわせて選ぶ定数で、以下では $\zeta = 1$ としている。きわめて大きいレイノルズ数ではコルモゴロフの $-5/3$ 乗則に合わせて $\zeta = 5/6$ と取るべきであるが、ここでは計算の便利さを優先した(図4.1参照)。

一方、変数分離(2.9)の形から、 $E \sim q^2$ であることがわかる。そこで、 $E^{1/2}$ をフーリエ変換することで渦空間 σ で定義される孤立波形の関数 $B(\sigma)$ を求める。すなわち、

$$q_j(\sigma) \sim B(\sigma) \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \sigma} E^{1/2}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{2\pi^2}{\sigma} e^{-k_0 \sigma} \quad (4.3)$$

から,

$$B(\sigma) = \frac{e^{-k_0\sigma}}{\sigma} \quad (4.4)$$

と決定した. ここで, $\sigma = |\sigma|$ である. (積分計算の詳細は付録 D 参照)

4.2 モデル方程式の導出

次に, 以下のようなモーメント方程式を考える.

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(\sigma) \left\{ \begin{array}{l} \text{式 (3.6)} \\ \text{式 (3.7)} \end{array} \right\} d\sigma = 0. \quad (4.5)$$

モーメント関数 $M(\sigma)$ には, 偶奇性 (3.10) を考慮した上で, 低い次数から 3 つずつ次のように選ぶ.

$$M(\sigma) = \begin{cases} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3^2) & \text{for 式 (3.6)} \\ (1, \sigma_1, \sigma_2) & \text{for 式 (3.7); } j=1, 2 \\ (\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_3\sigma_2) & \text{for 式 (3.7); } j=3 \end{cases} \quad (4.6)$$

この操作により, 連続の式 (3.6) は, 式 (4.7)~(4.9) のように変換される.

連続の式:

$$\Omega(q_1) - \Omega'(\sigma_1 q_2) = 0, \quad (4.7)$$

$$\Omega(q_2) - \Omega'(\sigma_2 q_2) = 0, \quad (4.8)$$

$$2\Omega(\sigma_3 q_3) - \Omega'(\sigma_3^2 q_2) = 0. \quad (4.9)$$

ここで,

$$\Omega(q) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q \, d\sigma. \quad (4.10)$$

また,

$$\Omega' \equiv d\Omega/d\eta. \quad (4.11)$$

したがってレイノルズ応力は

$$\overline{u_j u_l} = \Omega(q_j q_l) \quad (4.12)$$

のようにあらわすこともできる.

同様にして運動量保存の式も各方向 ($j = 1, 2, 3$) にモーメントの数 (今の場合は 3) ずつ得られる (式 (4.13)~(4.21)).

運動量保存式:

式 (3.7; $j = 1$) より,

$$\Omega'(q_1 q_2) + u' \Omega(q_2) = 0, \quad (4.13)$$

$$(u - c) \Omega(q_1) + \Omega(q_1^2) - \Omega(q_2^2) - \Omega'(\sigma_1 q_1 q_2) - u' \Omega(\sigma_1 q_2) = 0, \quad (4.14)$$

$$\Omega'(\sigma_2 q_1 q_2) - \Omega(q_1 q_2) + u' \Omega(\sigma_2 q_2) = 0. \quad (4.15)$$

式 (3.7; $j = 2$) より,

$$\Omega(q_2^2) + \Omega(q_4) = 0, \quad (4.16)$$

$$(u - c) \Omega(q_2) + \Omega(q_1 q_2) - \Omega'(\sigma_1 q_2^2) - \Omega'(\sigma_1 q_4) = 0, \quad (4.17)$$

$$\Omega(\sigma_2 q_2^2) + \Omega(\sigma_2 q_4) = 0. \quad (4.18)$$

式 (3.7; $j = 3$) より,

$$\Omega'(\sigma_3 q_2 q_3) - \Omega(q_3^2) + \Omega(q_2^2) = 0, \quad (4.19)$$

$$(u - c) \Omega(\sigma_3 q_3) + \Omega(\sigma_3 q_1 q_3) - \Omega'(\sigma_1 \sigma_3 q_2 q_3) + \Omega(\sigma_1 q_3^2) + \Omega(\sigma_1 q_4) = 0, \quad (4.20)$$

$$\Omega'(\sigma_2 \sigma_3 q_2 q_3) - \Omega(\sigma_3 q_2 q_3) - \Omega(\sigma_2 q_3^2) + \Omega(\sigma_2 q_2^2) = 0. \quad (4.21)$$

ここで, u は平均流速, c は位相速度 ($c = u_c$; 2.4.4 節) をあらわしている.

σ についての展開:

式 (4.16~4.18, 4.20) から圧力ゆらぎ q_4 の項を消去した後, q_j ($j = 1 \sim 3$) を重み関数 $B(\sigma)$ のまわりに次のように展開する.

$$\left. \begin{aligned} q_1(\eta, \sigma) &= B(\sigma) (U_0(\eta) + \sigma_1 U_1(\eta) + \sigma_2 U_2(\eta)) \\ q_2(\eta, \sigma) &= B(\sigma) (V_0(\eta) + \sigma_1 V_1(\eta) + \sigma_2 V_2(\eta)) \\ q_3(\eta, \sigma) &= B(\sigma) (\sigma_3 (W_0(\eta) + \sigma_1 W_1(\eta) + \sigma_2 W_2(\eta))) \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

η についての展開:

平均流を次のように誤差関数であらわす^[21].

$$\left. \begin{aligned} u(\eta) &= u_c + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\eta \chi(\eta) d\eta \\ \chi(\eta) &= e^{-\eta^2/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

すると、式 (4.22) 中の展開係数 U_j, V_j, W_j は $\eta \sim 0$ 付近で次のように近似することができる。($\eta \sim 0$ では $u - u_c \sim \eta \chi(\eta)$ が成り立つ。)

$$\left. \begin{aligned} U_0(\eta) &= C_0 \eta \chi(\eta), & U_1 &= C_1 \chi(\eta), & U_2 &= C_2 \chi(\eta), \\ V_0(\eta) &= D_0 \eta \chi(\eta), & V_1 &= D_1 \chi(\eta), & V_2 &= D_2 \chi(\eta), \\ W_0(\eta) &= E_0 \chi(\eta), & W_1 &= E_1 \eta \chi(\eta), & W_2 &= E_2 \eta \chi(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

(4.22, 4.24) をまとめると、結局次のような級数展開をしたことになる。

$$\left. \begin{aligned} q_1(\eta, \sigma) &= B(\sigma) \chi(\eta) (C_0 \eta + C_1 \sigma_1 + C_2 \sigma_2) \\ q_2(\eta, \sigma) &= B(\sigma) \chi(\eta) (D_0 \eta + D_1 \sigma_1 + D_2 \sigma_2) \\ q_3(\eta, \sigma) &= B(\sigma) \chi(\eta) \sigma_3 (E_0 + E_1 \sigma_1 \eta + E_2 \sigma_2 \eta) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

モデル方程式:

級数展開 (4.25) をモーメント方程式に代入すると、9 コの未知数 $C_\alpha, D_\alpha, E_\alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2$) を決める 9 元連立方程式が得られる。この連立方程式から D_1 以外の変数を消去することができ、最終的に D_1 を決める 1 つの代数方程式が導出される。(この式的具体形は煩雑なためここには載せない。付録 D の式 (D.3) を参照されたい。)

$$\Phi(D_1) = 0. \quad (4.26)$$

この代数方程式に実数解が存在すれば、それがモデル孤立波解の存在を証明する。

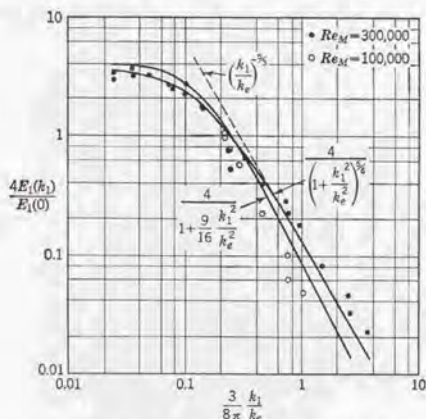


図 4.1: エネルギースペクトルの実験値^[29]

4.3 モデル方程式の解析解

図 4.2 中の縦軸 C/A は D_1 の代数方程式 (4.26) の判別式をあらわしている (具体形は付録 D の (D.8) 式参照). C/A が正の範囲 $[-0.603; -0.555]$ で D_1 は実数解として存在し得る. この領域で解を探索した結果, $D_1 \simeq -0.564$ という一つの実数解が求まった (図 4.3 のゼロ点). この実数解の存在そのものが孤立波解の存在を証明している. したがって, 孤立波解の存在を確認するという本章の目的は, ここで達せられたことになる.

残り 8 コの展開係数の値は, 解 D_1 から順次求められる (付録 D). これらを式 (4.25) に還元することで孤立波解の解析表示が与えられる. 図 4.4, 4.5 に, 例として $(\sigma_2, \sigma_3) = (0, 0.5)$ における孤立波解 q_1 と q_2 を示した.

孤立波解が得られれば, 式 (2.21) から乱流統計量を求めることができる. ただし, 単純化したモデル方程式なので, 実験値との定量的な一致は期待できない. (定量的比較は次章ゆらぎ方程式の直接計算で行う.) それにも関わらず, 流れ方向乱流強度は実験結果をよくあらわしている (図 4.6). レイノルズ応力は, オーダー的には妥当な値であるが, ピークを二つ持つような食い違いが生じている (図 4.7). 式 (4.25) からわかるように, ここで行った級数展開は $O(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^3, \eta^2)$ 以下の項を省略している. 展開の項数を増やし, 精度を向上させることでこのようなズレは修正されるものと考えられる.

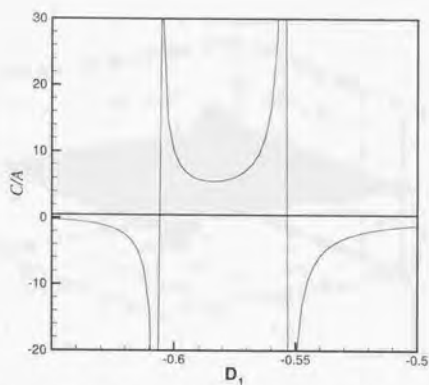


図 4.2: $\Phi(D_1) = 0$ の判別式 C/A (正の範囲 $[-0.603 : -0.555]$ が実数解の存在可能な範囲をあらわす。)

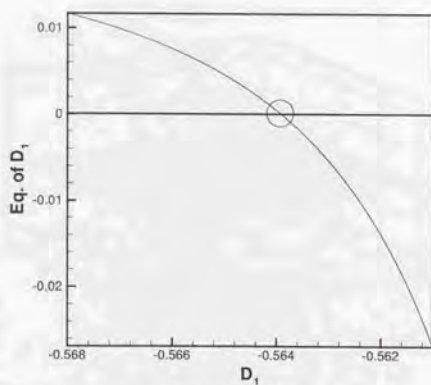


図 4.3: $\Phi(D_1) = 0$ の実数解 (ゼロをよぎる位置, $D_1 \approx -0.564$)

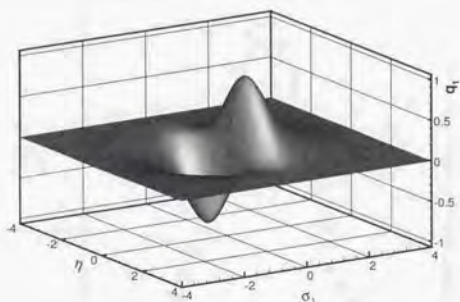


図 4.4: モデル方程式の孤立波解 q_1 ($\eta - \sigma_1$ 面, $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0.5$)

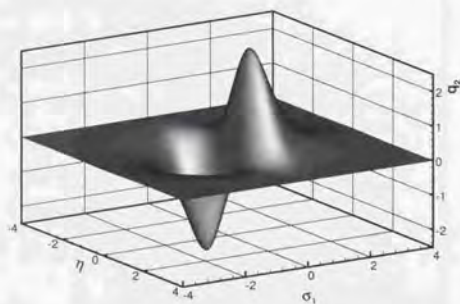


図 4.5: モデル方程式の孤立波解 q_2 ($\eta - \sigma_1$ 面, $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0.5$)

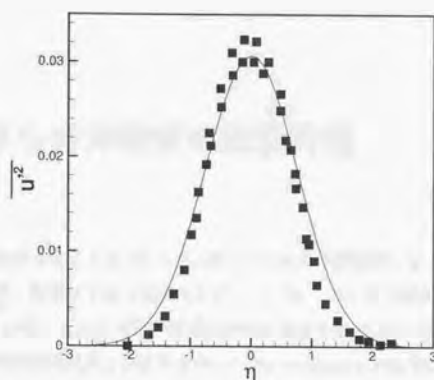


図 4.6: モデル孤立波解による乱流強度 — :present model , ■:実験^[21]

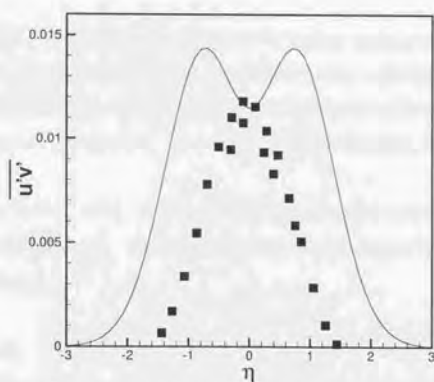


図 4.7: モデル孤立波解によるレイノルズ応力 — :present model , ■:実験^[21]

第5章

4次元ゆらぎ方程式の数値計算

この章では乱流混合層の4次元ゆらぎ方程式を実際に数値計算によって解き、流れの構造を解析する。まず、計算の手法と諸条件を述べ(5.1節)、次に乱流統計量と孤立波解の関係をまとめる(5.2節)、その上で計算結果の詳細を議論する(5.3~5.5節)。最後に結果とその検討と題して計算の完成度と渦変数を含んだNavier-Stokes方程式の適用範囲について議論する(5.6節)。

5.1 計算の手法と条件

解法:

非圧縮性流体の一般的な解法の一つにMAC法(Marker And Cell法)がある^[37]。運動量保存式の発散(∇)をとると圧力のPoisson方程式が得られる。速度は運動量保存式から時間発展的に解き、圧力は各時間ステップで次ステップの連続式がみたされるようにPoisson方程式から決定するという方法である。このMAC法を4次元に拡張してゆらぎ方程式(3.6,3.7)に適用した。

概略を以下に述べる。まず、式(3.7)に時間微分項($\partial q_j / \partial t$)を付け加えることで方程式を時間発展型にする(式(5.1))。この方程式の解が定常に達した時点で、もとの式(3.7)の解と一致することになる。

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} + q_r \partial_r q_j + (u - c) \partial_1 q_j + \partial_j q_4 + \delta_{j1} \frac{du}{d\eta} q_2 = 0. \quad (5.1)$$

次に ∂_j [式(5.1)]をとると、圧力ゆらぎ変数 q_4 を決定するPoisson型の方程式が得られる。

$$\partial_j^2 q_4 = -\frac{\partial D}{\partial t} - \partial_j (q_r \partial_r q_j) - \partial_j [(u - c) \partial_1 q_j] - \frac{du}{d\eta} \partial_1 q_2. \quad (5.2)$$

ここで、 $D \equiv \partial_j q_j$ とおいた、連続の式から本来 D はゼロになるべきものである。この項の離散化を行うときに、

$$\frac{\partial D}{\partial t} \simeq \frac{D^{n+1} - D^n}{\Delta t} \rightarrow \frac{-D^n}{\Delta t}$$

のように $D^{n+1} = 0$ とすることで、次ステップの連続式をみたすような指向性を持たせることができる。式 (5.1.5.2) を一般曲線座標に変換した後、離散化を行った。式 (5.1) の対流項は 3 次精度上流差分^[32]で離散化し、時間積分にはオイラー陽解法を用いた。式 (5.2) の解法には SOR 法を用いた。位相速度は $c = u_c \equiv U_c / \Delta U$ としている。

計算領域:

計算領域は以下の通りである。

$$\left. \begin{aligned} -5 < \eta < 5 \\ -5 < \sigma_1 < 5 \\ -4 < \sigma_2 < 4 \\ 0 < \sigma_3 < 4 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

偶奇性 (3.2 節) から σ_3 については半領域のみを計算している。流れ方向の渦構造が鉛直方向 (σ_2) やスパン方向 (σ_3) のそれよりも大きいことを考慮して σ_1 の範囲を大きくとっている。

計算格子:

孤立波解の分布はほぼ ± 3 の範囲内におさまると予想される。4 次元直交座標の各方向とも緩やかな不等メッシュを用いて格子点を中心に集めた。格子点数は、 $\eta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ に $51 \times 51 \times 41 \times 21$ の約 2.2×10^6 点である。

流れの条件:

一様流の条件は Bell and Mehta の実験^[21]とそろえた。すなわち、

$$U_{+\infty} = 9[\text{m/s}], U_{-\infty} = 15[\text{m/s}], \quad (5.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{+\infty} &= U_{+\infty} / \Delta U = 1.5 \\ u_{-\infty} &= U_{-\infty} / \Delta U = 2.5 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

平均流速は誤差関数で与えた。

$$u(\eta) = u_c - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2/2} d\eta'. \quad (5.6)$$

初期値:

初期孤立波は以下のような関数で与えた。 $A_1 \sim A_3$ は振幅, $a_1 \sim a_3$ は分布の幅を決める定数で, 式 (5.11)~(5.13) の積分から計算される乱流強度が実験値と同等のオーダーになるように選んだ (図 5.16~5.19 参照)。

$$\left. \begin{aligned} q_1(\eta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= A_1 \sigma_1 \sigma_2 \exp\left(-\frac{1}{2}(a_1 \sigma_1^2 + b_1 \sigma_2^2 + c_1 \sigma_3^2 + d_1 \eta^2)\right) \\ q_2(\eta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= A_2 \sigma_1 \sigma_2 \exp\left(-\frac{1}{2}(a_2 \sigma_1^2 + b_2 \sigma_2^2 + c_2 \sigma_3^2 + d_2 \eta^2)\right) \\ q_3(\eta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= A_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \exp\left(-\frac{1}{2}(a_3 \sigma_1^2 + b_3 \sigma_2^2 + c_3 \sigma_3^2 + d_3 \eta^2)\right) \\ q_4(\eta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

収束判定:

次式で定義される ϵ を考え, $\epsilon \sim 1/100$ となっているところで定常と判断して計算を終了した。($\sum_{i,j,k,l}$ は全格子点についての和をあらわす。)

$$\epsilon \equiv \frac{\dot{q}}{\bar{q}} \quad (5.8)$$

$$\dot{q} \equiv \frac{1}{3} \sum_{i,j,k,l} \left\{ \left| \frac{\partial q_1(i,j,k,l)}{\partial t} \right| + \left| \frac{\partial q_2(i,j,k,l)}{\partial t} \right| + \left| \frac{\partial q_3(i,j,k,l)}{\partial t} \right| \right\} \quad (5.9)$$

$$\bar{q} \equiv \frac{1}{3} \sum_{i,j,k,l} \{ |q_1(i,j,k,l)| + |q_2(i,j,k,l)| + |q_3(i,j,k,l)| \} \quad (5.10)$$

5.2 乱流統計量と孤立波解の関係式

変数分離の式 (2.9, 2.12) をフーリエ空間で書いたものが, 乱流統計量と孤立波解とを結ぶ関係式を与える (2.4.3 節)。この章で議論される乱流相関の具体形とその解釈をここでまとめておく。

5.2.1 二重相関 (乱流強度, レイノルズ応力)

乱流強度, レイノルズ応力は次式から決められる。

流れ方向の乱流強度:

$$\overline{u'^2} \equiv \frac{\overline{u_1'(\eta) u_1'(\eta)}}{(\Delta U)^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q_1(\eta, \sigma)^2 d\sigma. \quad (5.11)$$

鉛直方向の乱流強度:

$$\overline{v'^2} \equiv \frac{\overline{u_2'(\eta)u_2'(\eta)}}{(\Delta U)^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q_2(\eta, \sigma)^2 d\sigma. \quad (5.12)$$

スパン方向の乱流強度:

$$\overline{w'^2} \equiv \frac{\overline{u_3'(\eta)u_3'(\eta)}}{(\Delta U)^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q_3(\eta, \sigma)^2 d\sigma. \quad (5.13)$$

レイノルズ応力:

$$\overline{u'v'} \equiv \frac{\overline{u_1'(\eta)u_2'(\eta)}}{(\Delta U)^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q_1(\eta, \sigma)q_2(\eta, \sigma) d\sigma. \quad (5.14)$$

5.2.2 三重相関

三重相関として次の4種類を計算する, これらは $O(10^{-3})$ の微小な量である. エネルギーやレイノルズ応力の輸送をあらわすという物理的解釈もできるが, そのような観点よりも理論や実験の精度を示す指標として扱われることが多い.

$$\overline{u'v'^2} \equiv \frac{\overline{u_1'(\eta)u_2'(\eta)^2}}{(\Delta U)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q_1(\eta, \sigma)q_2(\eta, \sigma)^2 d\sigma. \quad (5.15)$$

$$\overline{u'w'^2} \equiv \frac{\overline{u_1'(\eta)u_3'(\eta)^2}}{(\Delta U)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q_1(\eta, \sigma)q_3(\eta, \sigma)^2 d\sigma. \quad (5.16)$$

$$\overline{v'w'^2} \equiv \frac{\overline{u_2'(\eta)u_3'(\eta)^2}}{(\Delta U)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q_2(\eta, \sigma)q_3(\eta, \sigma)^2 d\sigma. \quad (5.17)$$

$$\overline{v'u'^2} \equiv \frac{\overline{u_2'(\eta)u_1'(\eta)^2}}{(\Delta U)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q_2(\eta, \sigma)q_1(\eta, \sigma)^2 d\sigma. \quad (5.18)$$

5.2.3 二点相関と乱流渦のスケール

二点 (x, \mathbf{x}) の相関を考えることで乱流渦構造のスケールを知ることができる.

実験で測定されている量:

図 5.1 は, Bell and Mehta^[22]の実験によるもので, 流れ方向の各位置における縦渦の等渦度線分布 ($x_2 - x_3$ 断面) が描かれている. この図から, 縦渦は単体としてではなく, 逆向きに巻く2つの渦のペアとして存在すること, 下流に進むにつれて縦渦が融合し成長していくことがわかる. 図 5.2 は, この縦渦構造を特徴付けるスケールの測定結果である. 図中の直

線は筆者が後から書き込んでいる。自己相似性を示す領域を直線で近似すると、その傾きから混合層厚さ δ で無次元化されたスケールが求められる。直線 A で近似したデータは、図 5.1 の渦の個数を数えてスパン方向の距離をその数で割ったものであり、その傾きから縦渦の平均間隔 Λ がわかる。一方、直線 B で近似したデータは、図 5.4 の (a),(b) のようにスパン方向に波打って分布する平均流速 u の半波長を測定したものであり、その傾きから縦渦に巻き上げられる低速渦の半間隔 $\lambda/2$ がわかる。図 5.3 に渦構造の模式図を示した。(実験や計算では $y > 0$ が低速側、 $y < 0$ が高速側となっているが、図 5.3 では見やすいようにそれを逆転させている。) ただし、図 5.2, 5.1, 5.4-(a),(b) は、層流境界層から始まった乱流混合層 (untripped case; 1.4.2 節参照) のデータであり、層流不安定を引きずって流れの 3 次元構造が比較的強く残っている。これに対して、乱流境界層から始まった混合層 (tripped case) の実験結果である図 5.4-(c),(d) では u のスパン方向への波打ちが消えている。tripped case の方が十分に発達した状態を実現していると考えられるので、そこでは低速渦の構造はほとんど見られないと予想される。図 5.4 は、曲率のある混合層の実験^[23]によるもので本論文で扱う流れとは異なっている。しかし、平均流速のスパン方向への変動に対する上述の傾向が曲率のあるなしに関わらず同じであることは、文献^[23]の中でも述べられている。また、(a) と (b)、(c) と (d) の違いは上下速度の入れ換えによるもので、角運動量の効果から、(a),(c) が不安定なケース (図中 $U_1 < U_2$)、(b),(d) が安定なケース (図中 $U_1 > U_2$) をあらわしている。本論文では上述した低速渦構造の傾向のみを参考にしている。

計算で求める量:

これに対して本計算では、以下のような二点相関 R_{uu} , R_{uv} を計算することで低速渦の平均間隔 Λ と縦渦の大きさ L を求めることができる。

$\eta = 0$ でスパン方向に距離 Δz だけ離れた二点間の相関:

$$R_{uu}(\Delta z) \equiv \frac{\overline{u'_1(z)u'_1(z+\Delta z)}}{\overline{u'^2_1(z)}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} q_1(0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) q_1(0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 + \Delta z) d\sigma}{\int_{-\infty}^{\infty} q_1(0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^2 d\sigma}, \quad (5.19)$$

$$R_{uv}(\Delta z) \equiv \frac{\overline{u'_2(z)u'_2(z+\Delta z)}}{\overline{u'^2_2(z)}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} q_2(0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) q_2(0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 + \Delta z) d\sigma}{\int_{-\infty}^{\infty} q_2(0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^2 d\sigma} \quad (5.20)$$

を考える。この時、

・ R_{uu} の原点から負の極小値までの距離が、縦渦に巻き上げられる低速縞の間隔の半分 $\lambda/2$ に対応する。

・ R_{vv} の原点から負の極小値までの距離が、縦渦の大きさ L をあらわす。

図 5.5 にその模式図を示した。4 次元ゆらぎ方程式は十分に発達した乱流を記述しているので、 R_{uu} は負の極小値を持たない (低速縞構造は存在しない) ことが実験結果から予想される。

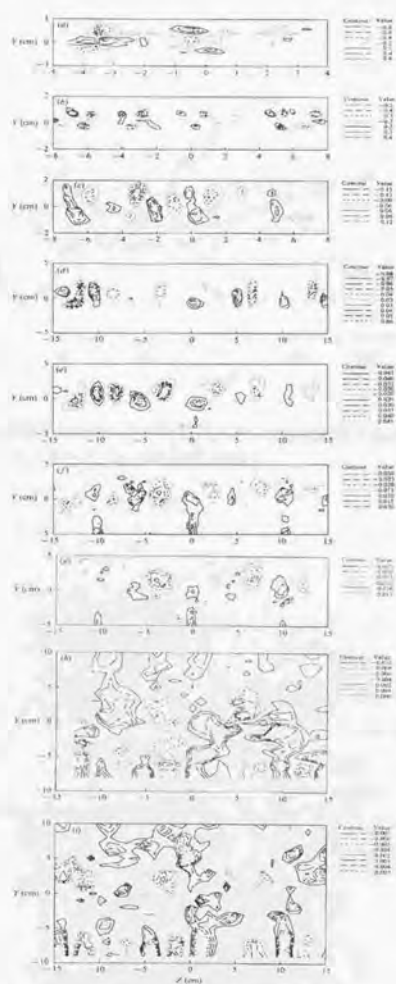


図 5.1: $x_2 - x_3$ (図中では $Y - Z$) 面でみた等温度線図^[22]; 上から順に流れ方向への距離 $x_1 = 8, 17, 37, 57, 78, 108, 189, 250$ cm における断面図 (初期境界層: 層流)

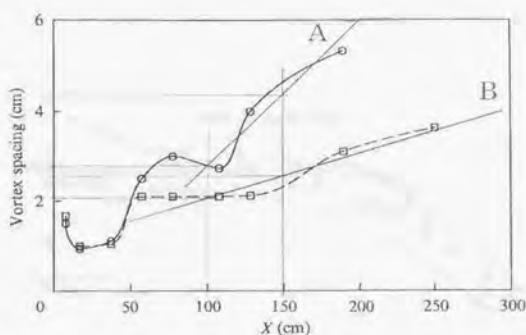


図 5.2: 実験による渦構造のスケール^[22](直線 A, B は筆者が書き込んだもの. A の傾きが Λ , B の傾きが $\lambda/2$ をあらわす. 初期境界層: 層流.)

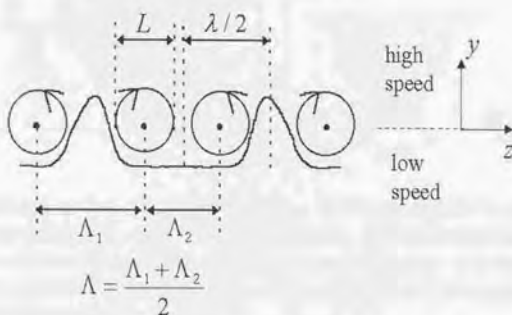


図 5.3: 渦構造の模式図

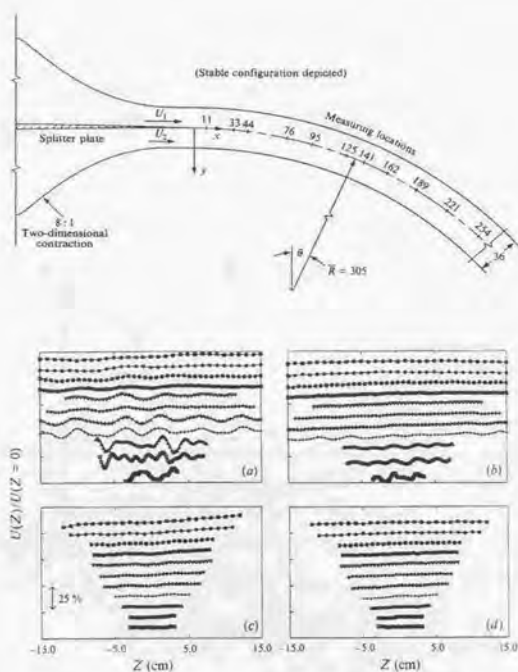


図 5.4: 平均流速 u のスパン方向分布. ただし, 曲率のある混合層^[23](上図) のデータ. (a), (b) が初期境界層: 層流, (c), (d) が初期境界層: 乱流. 初期境界層が乱流の場合, 平均流速 u のスパン方向への変動がほとんどなくなっているのがわかる. 各図中の 11 組のデータは, 下方から上方に向かってそれぞれ $x_1 = 11, 33, 44, 76, 95, 125, 141, 162, 189, 221, 254$ cm の位置に対応している.

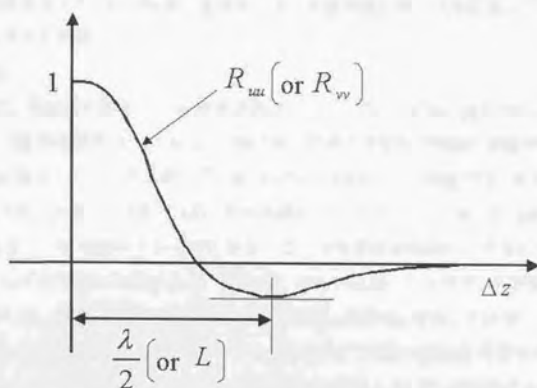


図 5.5: 二点相関と渦構造のスケール

5.3 計算結果

5.3.1 乱流統計量

乱流強度:

図 5.6~5.8 は各方向の乱流強度, 図 5.9 はレイノルズ応力である. 実験値と比較して, 流れ方向, スパン方向強度が低いピーク値, 鉛直方向強度とレイノルズ応力が高いピーク値を示している. それ以外の領域ではよく一致している. 図 5.16~5.19 は同じものを初期値と比較したものである. 図 5.10 は圧力の乱流強度である. 計測の困難性から実験値が存在しないため比較するデータはないが, 速度ゆらぎの乱流強度と同レベルになっていることから妥当な値と考えられる.

三重相関:

図 5.12 は三重相関である. q_1, q_2 の初期値は式 (5.7) のように σ_1, σ_2 について奇関数で与えている. 三重相関は式 (5.15~5.18) の積分から計算されるので初期の値はゼロである. それが最終的に図のように立ち上がっている. Bell and Mehta^[21] の実験ではこれらのうち $\overline{u^3 w^2}$ のみが測定されている. この量と比較したのが図 5.11 である. ピーク値に $3 \times 10^{-3} \sim 8 \times 10^{-3}$ のズレがある. 二重相関のズレを考えると, ここで定量的な議論はできない. 一方, 定性的な性質として対称性に相違がある. 実験値では η の原点に反対称的 (奇関数) に分布しているのに対して, 本計算結果ではそのような対称性 (偶奇性) は示していない. 式 (3.6.3.7) にはもともと η 方向への偶奇性がないので, 実験のような反対称的分布を示す理由はない. Wygnanski and Fiedler^[19] の一平行流乱流混合層 (定義は 1.4.1 節) の実験では, この量の非対称性が顕著にあらわれている (図 5.13). 図 5.12 と図 5.13 とを比較すると, $\overline{v^2 w^2}$ を除いて, その大小関係と η 方向への非対称性がよく似ていることがわかる. 現象が厳密には違うこと, η の定義が異なることから, これ以上の議論はできないが, 本計算はこの非対称性を捉えているように見える.

二点相関と渦構造のスケール:

図 5.14, 5.15 は二点相関である. R_{uu} が負の極小値を持たないことは, 5.2.3 節で述べた予想と一致している. すなわち十分に発達した乱流混合層では, 低速連の構造はほとんど存在しないことがわかる. 一方, R_{vv} は実験^[22] による渦の平均間隔 Λ と近い位置に負の極小値がある. ただし, その絶対値は小さいことから, やはり強い渦構造は残っていないことがわかる. これらのことから本計算は乱流境界層から始まった混合層 (tripped case), すなわち,

十分に発達した乱流混合層では強い渦構造が存在しないという特徴を捉えていると言える。

5.3.2 孤立波解

第4章ではモデル方程式を解くことによって孤立波解の存在を確認した。ここでは実際に4次元ゆらぎ方程式の数値計算によって得られた孤立波解の特徴について述べる。

η - σ_1 面, η - σ_3 面, σ_1 - σ_3 面における孤立波解 ($q_1 \sim q_4$) の分布を図5.20~5.31に示す。 σ_2 については全体としての性質が見えるように全域で積分している。

孤立波解は変数分離の導入時に現れる従属変数であり、それ自身は物理量をあらわさない。5.2節で述べたような関係式を通してはじめて物理量と結びつく。しかし、解の形状から定性的な情報を知ることができる。例えば、孤立波解の裾野の広がり、二点相関がゼロに減衰するまでの距離をあらわす。 σ_3 方向への解の分布がほぼ ± 2.0 の範囲内にあるのに比べて、 σ_1 方向へは ± 2.5 とやや広く分布しているのは、流れ方向にはスパン方向よりも遠くまで相関が及ぶことを反映している。

また、解の山と谷が正負に大きく突出していればいるほど、強い負の相関をもつこともわかる。負の相関は渦構造と密接なつながりがある(5.2.3節参照)。例えば、図5.24と5.25を比べると、 q_1 よりも q_2 のピーク値の差が激しいことがわかる。この q_1 と q_2 をそれぞれ式(5.19)と(5.20)のように積分した結果が図5.14, 5.15である。 R_{\min} が負の極小値を示さないのに対して、 R_{\min} ではそれを示している。このことから山と谷の落差が激しい孤立波解が渦構造を象徴していることがわかる。

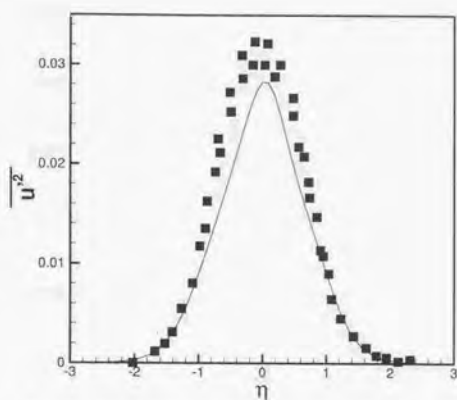


図 5.6: 流れ方向乱流強度 — : present, ■ : 実験値^[21]

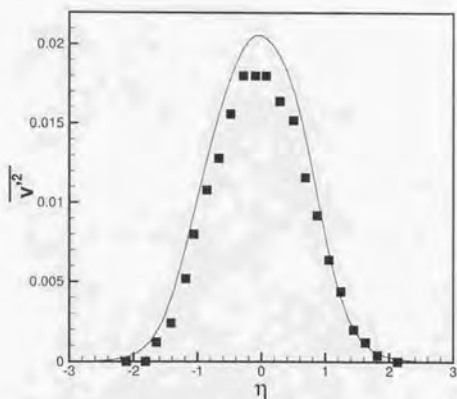


図 5.7: 鉛直方向乱流強度 — : present, ■ : 実験値^[21]

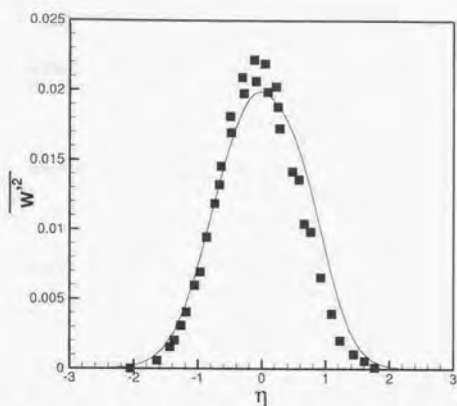


図 5.8: スパン方向乱流強度 — : present, ■ : 実験値^[21]

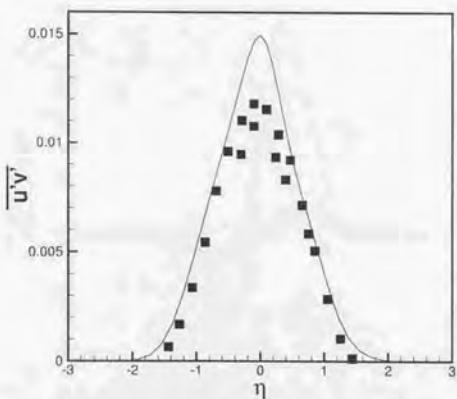


図 5.9: レイノルズ応力 — : present, ■ : 実験値^[21]

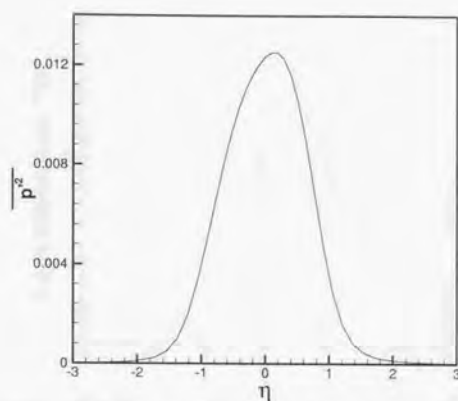


図 5.10: 圧力の乱流強度

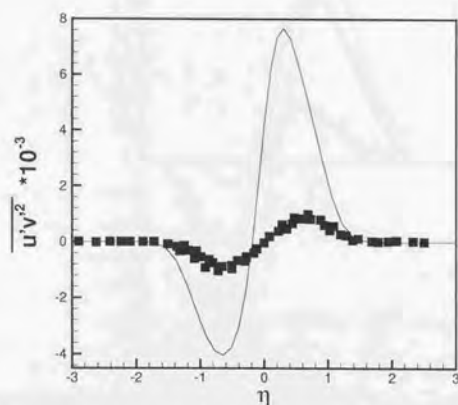


図 5.11: 三重相関 — : present, ■ : 実験値^[21]

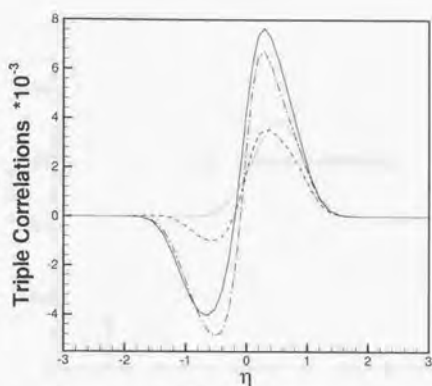


図 5.12: 三重相関 — : $\overline{u'v'^2}$, - - : $\overline{u'w'^2}$, - · - : $\overline{v'u'^2}$, · · · : $\overline{v'w'^2}$

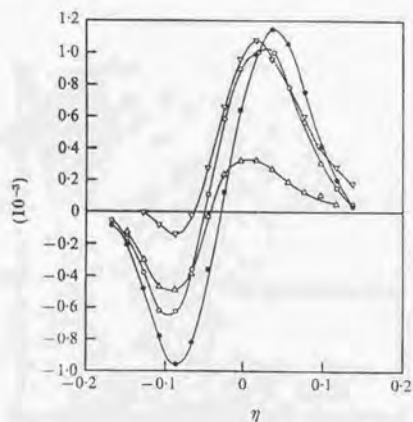


図 5.13: 一平行流乱流混合層の実験による三重相関^[19] —○— : $\overline{u'v'^2}$, —▽— : $\overline{u'w'^2}$,
—●— : $\overline{v'u'^2}$, —△— : $\overline{v'w'^2}$ (横軸 η の定義は本計算と異なる)

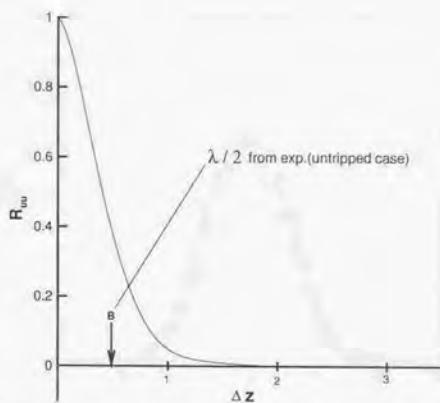


図 5.14: 二点相関 R_{uu} . B は初期境界層が層流の実験による $\lambda/2$ の測定値.(図 5.2 参照)

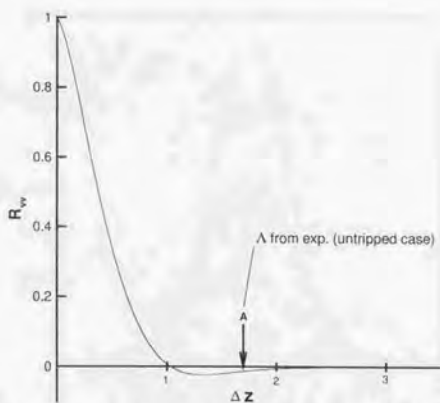


図 5.15: 二点相関 R_{vv} . A は初期境界層が層流の実験による Λ の測定値.(図 5.2 参照)

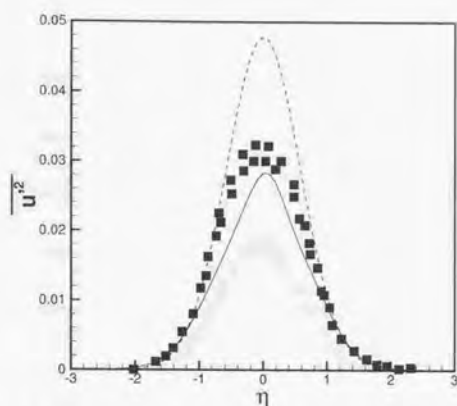


図 5.16: 初期値との比較 $\langle \overline{u^2} \rangle$ — : present, - - - : 初期値, ■ : 実験値^[21]

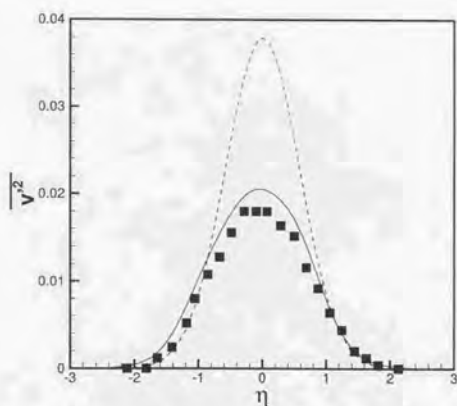


図 5.17: 初期値との比較 $\langle \overline{v^2} \rangle$ — : present, - - - : 初期値, ■ : 実験値^[21]

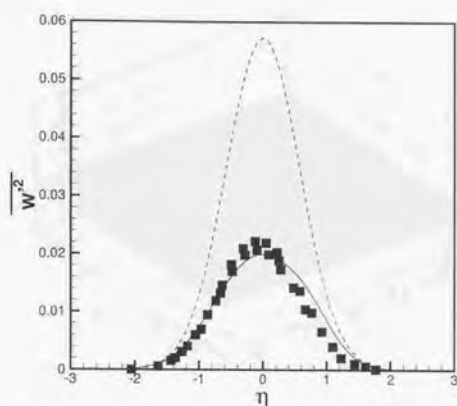


図 5.18: 初期値との比較 ($\overline{w'^2}$) — : present, - - - : 初期値, ■ : 実験値^[21]

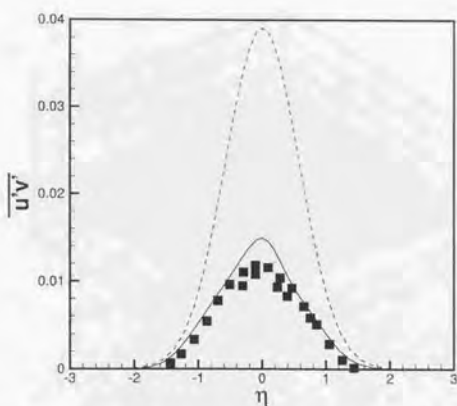


図 5.19: 初期値との比較 ($\overline{u'v'}$) — : present, - - - : 初期値, ■ : 実験値^[21]

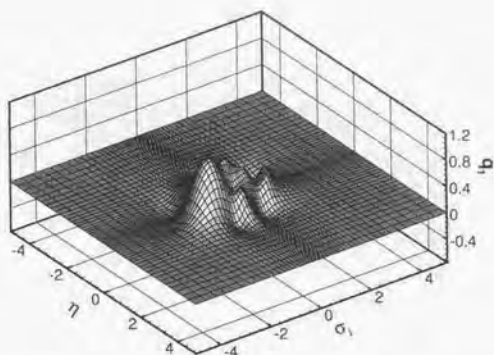


図 5.20: $\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_1 ($\sigma_3 = 0.56$, σ_2 : integrated)

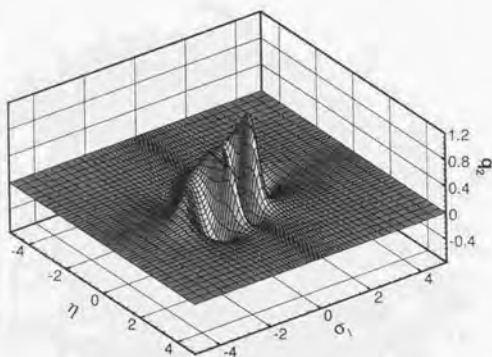


図 5.21: $\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_2 ($\sigma_3 = 0.56$, σ_2 : integrated)

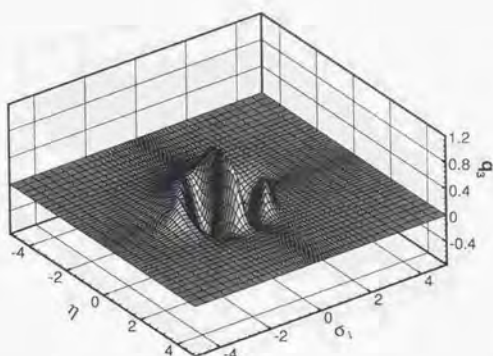


図 5.22: $\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_3 ($\sigma_3 = 0.56$, σ_2 : integrated)

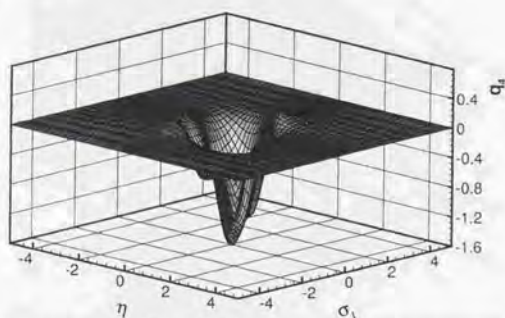


図 5.23: $\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_4 ($\sigma_3 = 0.56$, σ_2 : integrated)

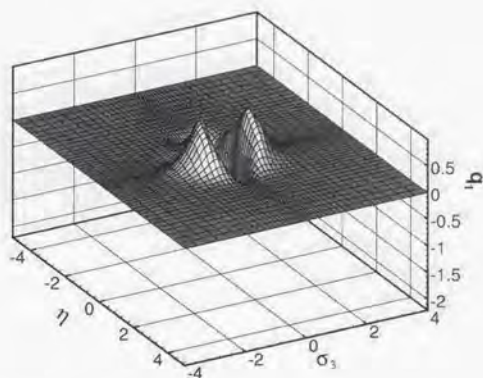


図 5.24: $\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_1 ($\sigma_1 = 0$, σ_2 : integrated)

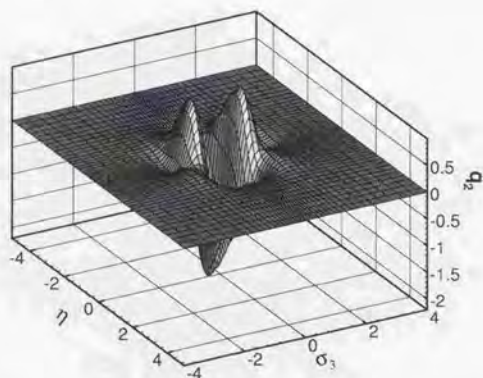


図 5.25: $\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_2 ($\sigma_1 = 0$, σ_2 : integrated)

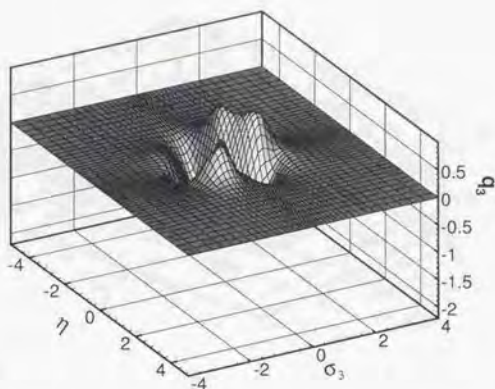


図 5.26: $\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_3 ($\sigma_1 = 0, \sigma_2$: integrated)

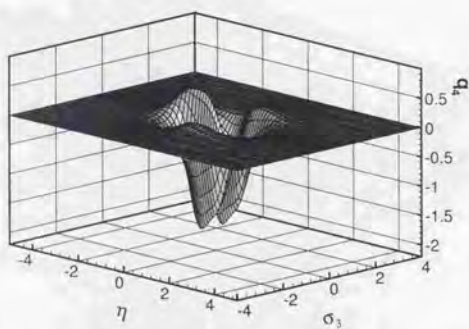


図 5.27: $\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_4 ($\sigma_1 = 0, \sigma_2$: integrated)

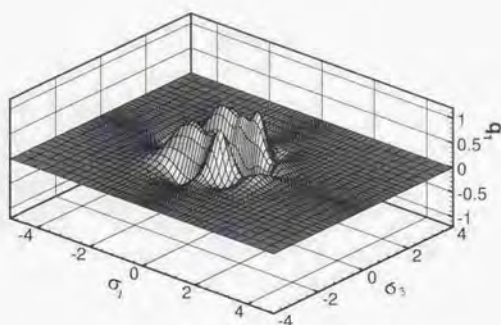


図 5.28: $\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_1 ($\eta=0$, σ_2 : integrated)

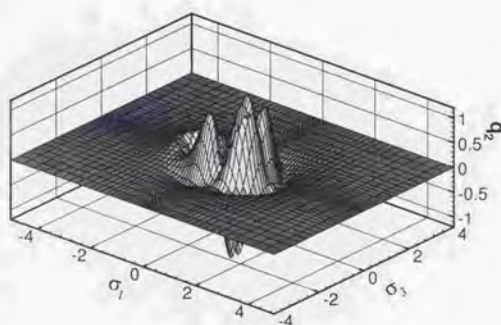


図 5.29: $\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_2 ($\eta=0$, σ_2 : integrated)

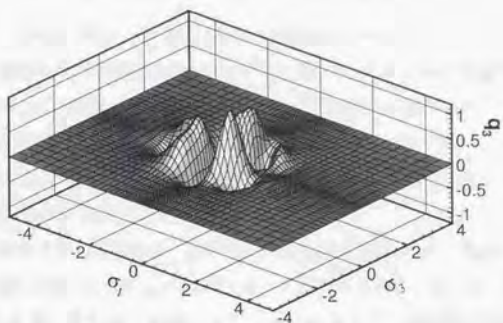


図 5.30: $\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_3 ($\eta = 0$, σ_2 : integrated)

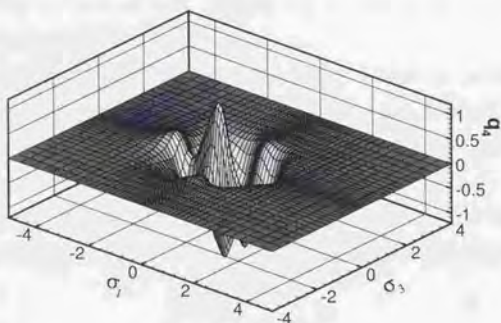


図 5.31: $\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_4 ($\eta = 0$, σ_2 : integrated)

5.4 比較1 —— 位相速度 c の違いによる比較

位相速度として Taylor 仮説 ($c = u(\eta)$) を用いた計算と比較を行う。2.4.4 節で述べたように、 $c = u_c$ が大規模な渦の伝播速度をあらわすのに対して、この仮説は微細渦の伝播速度をあらわす。しかし、 c が位置 η に依存すれば、変数分離定数が定数ではなくなってしまうので、数学に違反することになる。この意味で Taylor 仮説の導入は一つのモデル化にあたる。ただし、ここでも調整するようなパラメータは含まれていないことを一言しておく。以下では前節の基本計算結果を Baseline と表記する。

ここでは孤立波から比較を始める。基本的な形状に変わりはないが、Taylor 仮説の孤立波解の方が Baseline の解に比べて q_1 の (負の) ピーク値が大きくなっていることがわかる (例えば、図 5.24 と 5.45, 図 5.28 と 5.49)。また、 $\eta - \sigma_1$ 面で見えた孤立波には分布幅が膨む傾向がある (例えば、図 5.20 と 5.41)。

このような孤立波解の分布を反映して乱流統計量にも差が生じている。

乱流強度のピーク値を Baseline 計算と比較すると、流れ方向が大、鉛直方向が小、レイノルズ応力は大の方向に変化した。スパン方向はほとんど変化しなかった。レイノルズ応力を除くと、Baseline 計算よりも実験に近い値となっている。孤立波解の変化が最も大きい q_1 に関連した量の差が大きくなっている。二点相関 R_{uu} , R_{vv} は、わずかに値が変わったもののその基本的な性質に変わりはなかった。

位相速度は、式 (5.1) の左辺第 3 項に $((u-c)\partial_1 q_1)$ としてあらわれる。したがって、Taylor 仮説はこの項を落とすことに相当する。上に述べたように、Taylor 仮説を導入すると孤立波解の分布が (特に $\eta - \sigma_1$ 面で) わずかになまる傾向がある。このことから第 3 項には孤立波解を急峻化させる効果があると考えられる。

結果的に大きく解が違わないことは、この方程式が堅牢であることのあらわれと言える。また、複雑な流れ場の位相速度を与える手段として Taylor 仮説に適用可能性があることを示唆している。

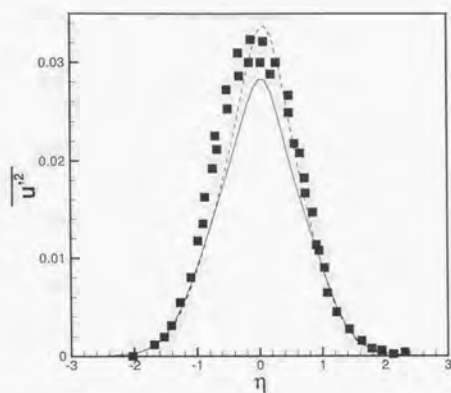


図 5.32: 流れ方向乱流強度 — : baseline, - - - : Taylor 仮説, ■ : 実験値^[21]

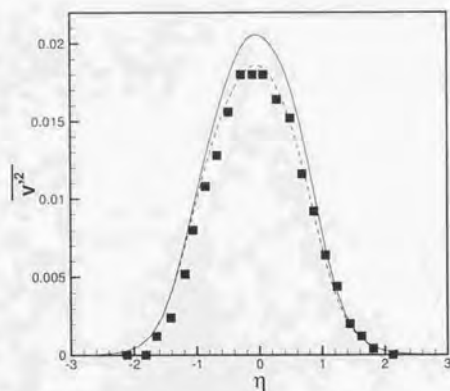


図 5.33: 鉛直方向乱流強度. — : baseline, - - - : Taylor 仮説, ■ : 実験値^[21]

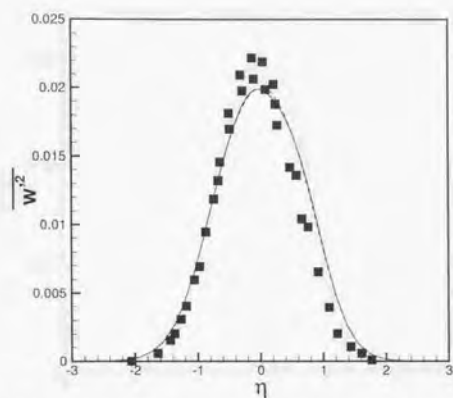


図 5.34: スパン方向乱流強度. — : baseline, - - - : Taylor 仮説, ■ : 実験値^[21]

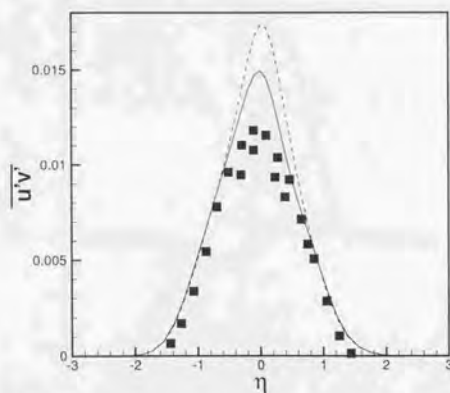


図 5.35: レイノルズ応力. — : baseline, - - - : Taylor 仮説, ■ : 実験値^[21]

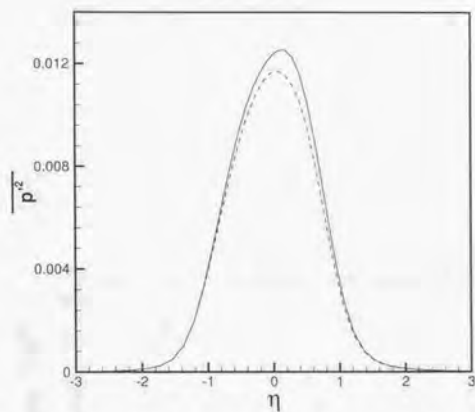


図 5.36: 圧力の乱流強度 — : baseline, - - - : Taylor 仮説

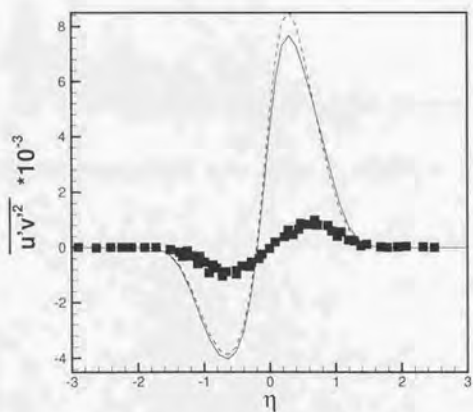


図 5.37: 三重相関 — : baseline, - - - : Taylor 仮説, ■ : 実験値^[21]

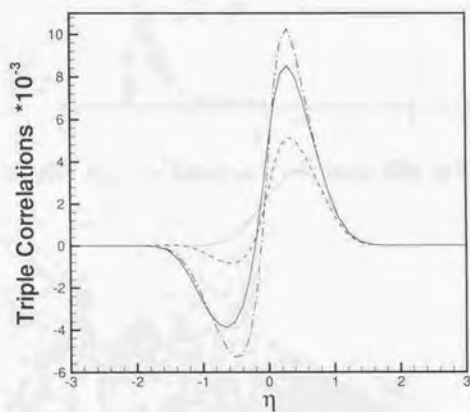


図 5.38: 三重相関 (Taylor 仮説) — : $\overline{u'v'^2}$, --- : $\overline{u'w'^2}$, - · - : $\overline{v'u'^2}$, ... : $\overline{v'w'^2}$

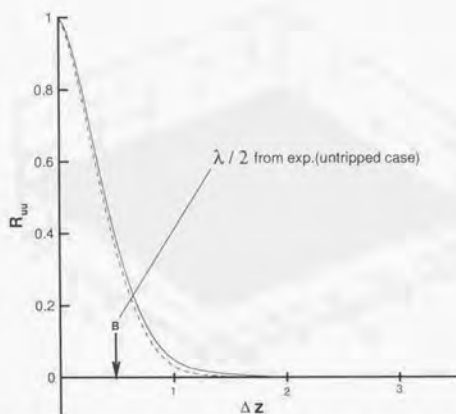


図 5.39: 二点相関 R_{uu} —: baseline, - - -:Taylor 仮説. B は図 5.14 と同定義.

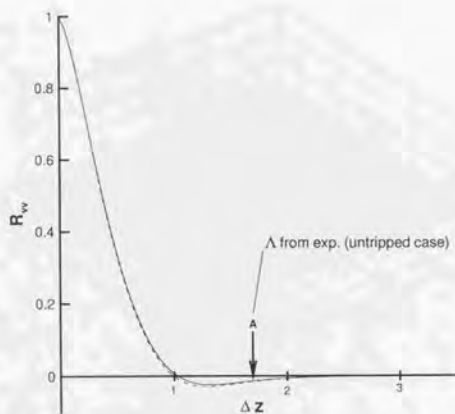


図 5.40: 二点相関 R_{vv} —: baseline, - - -:Taylor 仮説. A は図 5.15 と同定義.

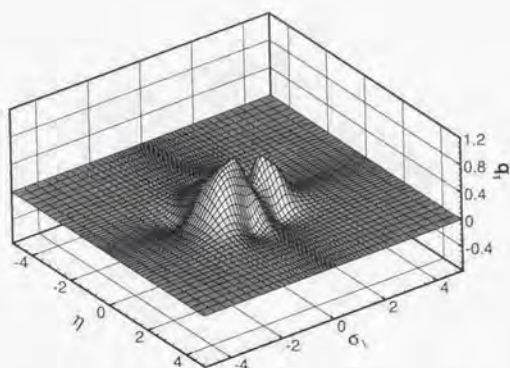


図 5.41: $\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_1 (Taylor 仮説, $\sigma_3 = 0.56$, σ_2 : integrated)

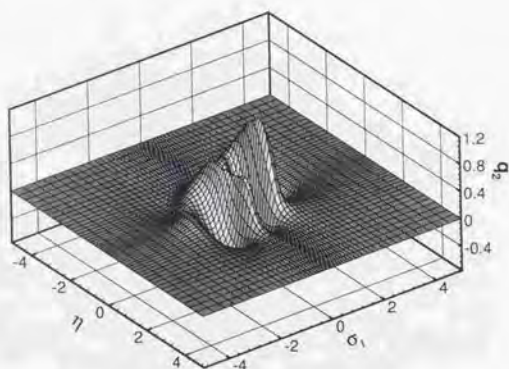


図 5.42: $\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_2 (Taylor 仮説, $\sigma_3 = 0.56$, σ_2 : integrated)

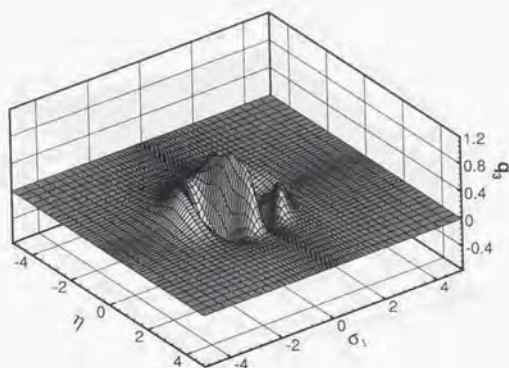


図 5.43: $\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_3 (Taylor 仮説, $\sigma_3 = 0.56$, σ_2 : integrated)

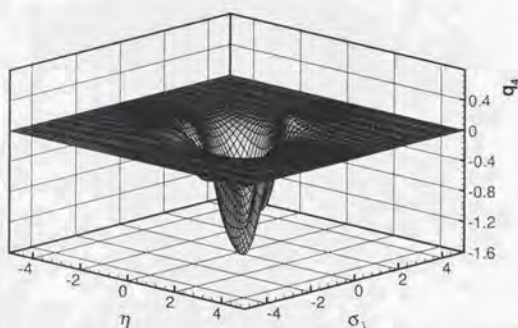


図 5.44: $\eta - \sigma_1$ 面の孤立波解 q_4 (Taylor 仮説, $\sigma_3 = 0.56$, σ_2 : integrated)

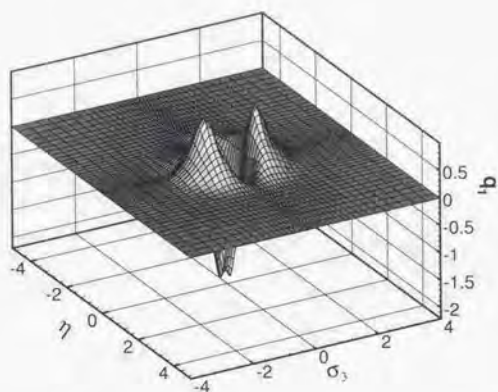


図 5.45: $\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_1 (Taylor 仮説, $\sigma_1 = 0$, σ_2 : integrated)

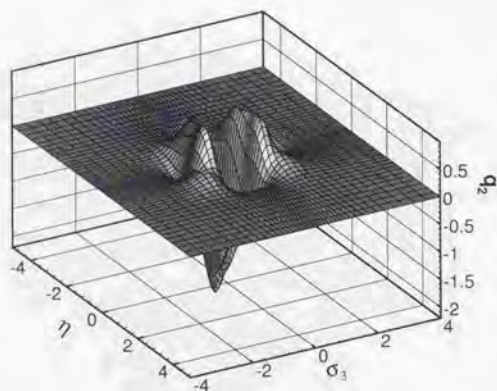


図 5.46: $\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_2 (Taylor 仮説, $\sigma_1 = 0$, σ_2 : integrated)

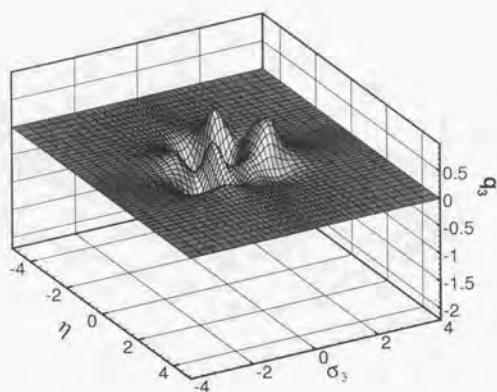


図 5.47: $\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_3 (Taylor 仮説, $\sigma_1 = 0$, σ_2 : integrated)

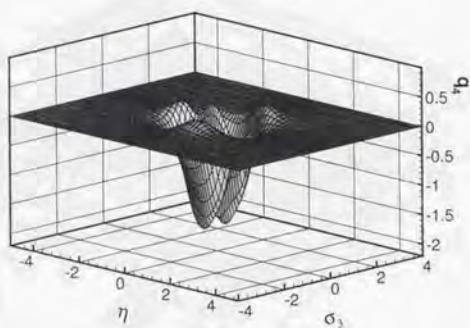


図 5.48: $\eta - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_4 (Taylor 仮説, $\sigma_1 = 0$, σ_2 : integrated)

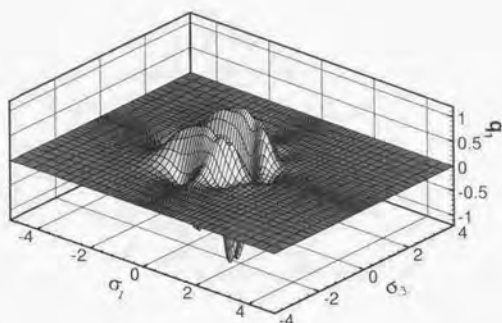


図 5.49: $\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_1 (Taylor 仮説, $\eta = 0$, σ_2 : integrated)

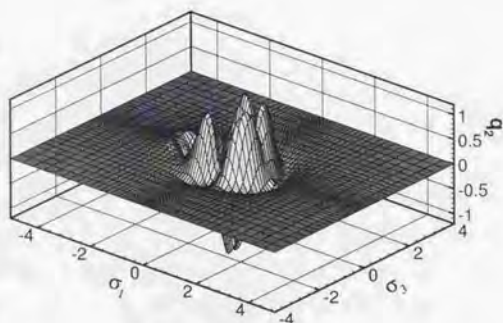


図 5.50: $\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_2 (Taylor 仮説, $\eta = 0$, σ_2 : integrated)

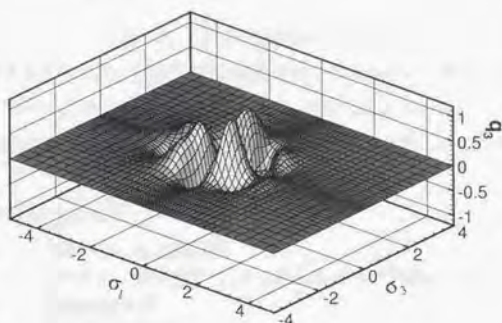


図 5.51: $\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_3 (Taylor 仮説, $\eta = 0$, σ_2 : integrated)

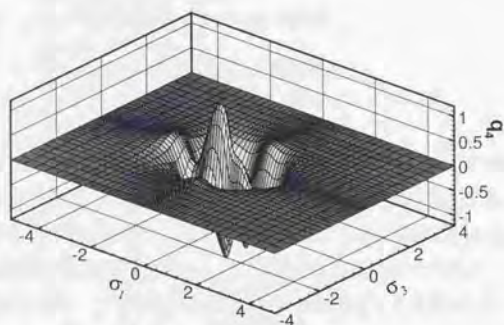


図 5.52: $\sigma_1 - \sigma_3$ 面の孤立波解 q_4 (Taylor 仮説, $\eta = 0$, σ_2 : integrated)

5.5 比較2 —— 他計算との比較

この節ではブリチチゴ^[30]が行った3次元ゆらぎ方程式の計算とRogers and Moser^[16]が行った時間発達混合層のDNS計算の二者と比較を行う。それぞれの解法と条件を以下にまとめた。RANSモデルとの比較は行っていないが、前述したようにRANSモデルでは平均流についての議論されるのがほとんどであり、レイノルズ応力の正確な決定は期待できない。

ブリチチゴ^[30]の解法と条件:

- 対象 : 空間発達の乱流混合層
- 支配方程式 : 3次元ゆらぎ方程式 (σ_2 を省略したゆらぎ方程式 (3.6, 3.7))
- 解法 : 擬似圧縮性法
- 時間積分 : オイラー陰解法
- 左辺離散化 : LU-ADI法
- 右辺離散化 : Roeの近似リーマン解法+Chakravarthy-OsherのTVDスキーム
- 境界条件 : 式(3.9)で σ_2 を除いたもの
- 格子点数 : $\sigma_1 \times \eta \times \sigma_3 = 61 \times 61 \times 31 \sim 1.2 \times 10^5$ 点 (σ_3 : 偶奇性から半領域)

Rogers and Moser^[16]の解法と条件:

- 対象 : 時間発達の乱流混合層
- 支配方程式 : 3次元非圧縮Navier-Stokes方程式
- 解法 : スペクトル法
- 境界条件 : x_1, x_3 に周期境界条件, x_2 に遠方条件
- 格子点数 : $x_1 \times x_2 \times x_3 = 512 \times 210 \times 192 \sim 2.1 \times 10^7$ 点
- 時→空の換算 : $t \rightarrow x_1/U_c$

各方向乱流強度及びレイノルズ応力の比較を図5.53~5.56に示した。3次元ゆらぎ方程式の計算結果と比較すると、高速側 ($\eta < 0$) への過剰なシフトが改善された点、より実験と整合性のある値が得られている点から、4次元計算によって精度が向上したことがわかる。

DNSの計算は時間発達混合層であり、ここに載せてある値はアナロジーによるものであることを再度断っておく。アナロジーとは言え、実験結果をよくあらわしていることには目を見張るものがある。

ピーク値に注目して考察を行うと、流れ方向の強度は、本計算が最も実験値に近い値になっている。鉛直方向の強度は、本計算とDNSとの間に実験値がある。スパン方向強度は、実験を含めた4者のばらつきが最も小さくなっている。レイノルズ応力は、DNSが実験値に最も近い値になっている。

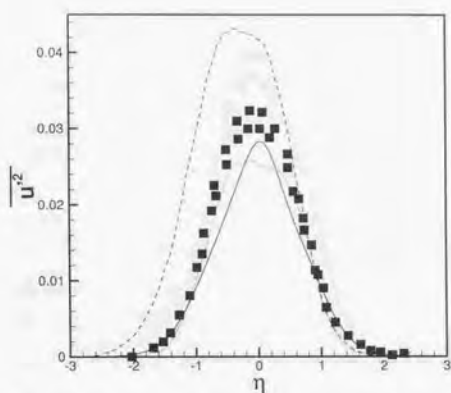


図 5.53: 流れ方向乱流強度 — : present, - - - : 3D calc.^[36], : DNS^[16], ■ : 実験値^[21]

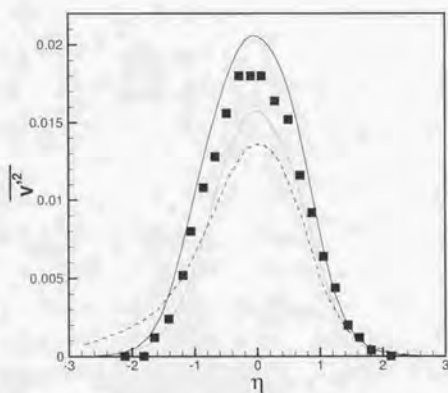


図 5.54: 鉛直方向乱流強度 — : present, - - - : 3D calc.^[36], : DNS^[16], ■ : 実験値^[21]

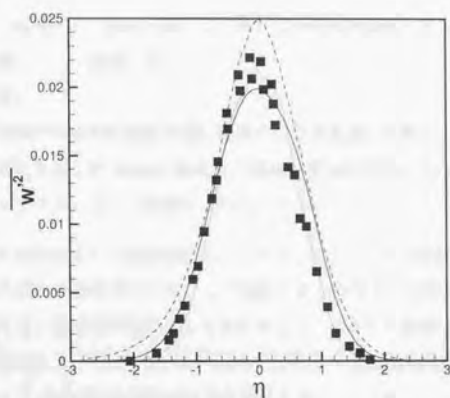


図 5.55: スパン方向乱流強度 — : present, - - - : 3D calc.^[36], : DNS^[16], ■ : 実験値^[21]

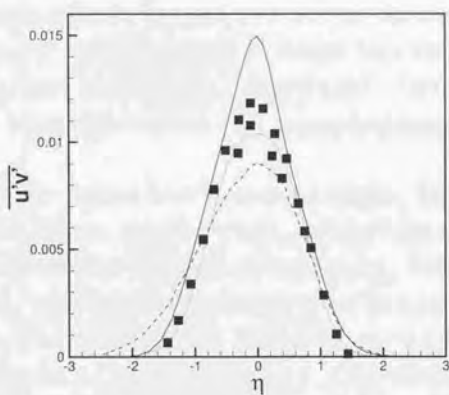


図 5.56: レイノルズ応力 — : present, - - - : 3D calc.^[36], : DNS^[16], ■ : 実験値^[21]

5.6 結果とその検討

この節では、結果とその検討と題して、計算の完成度と渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式の適用範囲について議論したい。

計算の完成度:

予言的な乱流統計理論を乱流混合層に適用するのが本来の目的である。本論文では理論の中心となる渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式の妥当性を検討することに焦点を合わせるため、第一のステップとして次の簡略化を行っている。

1. 平均流速を実験結果から誤差関数として与えること：これは本来は平均流方程式とゆらぎ方程式の連立計算を実行することで解決されるべきものである。
2. 位相速度を上下速度の平均値として与えること：本来この値は流体安定論におけるように流れの固有値として求められるべきものである。固有値の決定法はまだ確立していないので、ここでは可視化実験の結果を借用する。

渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式の適用範囲:

遷移領域：渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式は、十分に発達した状態の乱流を扱っている。一方で、自明な解として $q_j = 0$ が常に存在し、これは層流の解に相当している。両者の間、遷移領域の計算はまだ実行されたことがないため、現時点ではその適用可能性に言及できない。ただし、この方程式を線形化し、平均流について平行流近似 $u = [u(x_2), 0, 0]$ を施すと、 q_2 について Orr-Sommerfeld 方程式が得られる。このことから渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式は遷移の前駆現象である Tollmien-Schlichting 波を含んでいる、とは言える。

圧縮性流体の場合：渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式を、圧縮性流れに拡張することには本質的な困難は生じない。密度ゆらぎを考慮し、エネルギー保存方程式を付け加えればよい。この時、連続の式は他の保存則同様、時間発展型となる。平均値の方程式については、レイノルズ応力、乱流熱伝達とも（非圧縮流同様）単一项であらわされ、RANS モデルで用いられる Favre 平均の概念は不要である。密度ゆらぎは、以下のように変数分離することで速度ゆらぎ、圧力ゆらぎと同様に扱うことができる。（方程式の具体形は付録 E 参照。）

$$\overline{\rho' u_j'} = \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) g_j(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{k}}, t) \delta(\mathbf{k} + \hat{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} d\hat{\mathbf{k}}. \quad (5.21)$$

第6章

結論

本論文では渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式を空間的に発達する乱流混合層に適用した。乱流混合層では自己相似座標を導入することができ、その場合、渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式から 4 次元 Euler 型の乱流ゆらぎ方程式 (3.6, 3.7) が導出される。平均流方程式と 4 次元ゆらぎ方程式との連立計算から、平均流速と乱流統計量を同時に決定するのが最終的なシナリオであるが、本論文ではそのステップとして 4 次元ゆらぎ方程式のみを扱った。大きく二つのことを行った。

一つは、4 次元ゆらぎ方程式に解が孤立波として存在し得るのか、という根本的な疑問の検証である。エネルギースペクトルの $-5/3$ 乗則をヒントに、渦空間で孤立波形の重み関数 $B(\sigma)$ を定め、そのまわりで 4 次元ゆらぎ方程式にモーメント展開を施した。4 つの孤立波解 (速度ゆらぎ 3, 圧力ゆらぎ 1) のそれぞれについて 3 つのモードで展開すると、12 コの未知数 (展開係数) に対する 12 コの代数方程式が得られるが、最終的にそれは展開係数 D_1 を決定する 1 つの代数方程式に帰着する。この方程式の解を探索した結果、 $D_1 \simeq -0.564$ という実数解が求まったことで、4 次元ゆらぎ方程式に (モデル) 孤立波解が存在することが証明された。(第 4 章)

もう一つは、4 次元ゆらぎ方程式の数値計算である。解法には、MAC 法を 4 次元に拡張した方法を用いた。次のような結果が得られた。乱流強度は $\eta \sim 0$ 付近で多少のズレがあるものの、そこを除けば全体的に実験結果と良い一致を示した。また、以前に実行された (σ_2 省略の) 3 次元計算結果^[36]と比べて精度が向上したことも確認された。3 重相関は、Bell and Mehta^[21]の実験値と対称性の点で食い違いを見せた。しかし、方程式には η -方向に偶奇性がないこと。本計算結果と Wygnanski and Fiedler^[19]の一平行流乱流混合層の実験値の非対称的性質が良く似ていることから、この非対称性は本質的なものであると考えられる。た

だし、ピーク値は実験値と比べて $3 \times 10^{-3} \sim 8 \times 10^{-3}$ 程度のズレを含んでいる。さらに、二点相関から渦構造の解析を行った。 R_{u0} は負の極小値を持たなかった。このことは、層流境界層から始まる乱流混合層 (untripped case) の実験結果^[22] に見られるような低速渦構造はほとんど存在しないことを示している。これは乱流境界層から始まる混合層の実験^[23] (tripped case) の傾向と一致している。また、 R_{uv} は実験^[22] による渦の平均間隔 Λ と近い位置に負の極小値をもっているが、その絶対値が小さいことから、やはり強い渦構造は残っていないことがわかった。これらのことから本計算は乱流境界層から始まった混合層 (tripped case)、すなわち、十分に発達した乱流混合層では強い渦構造が存在しないという特徴を捉えていると言える。(第5章 5.1~5.3 節)

この計算結果について2つの比較を行った。まず、位相速度の違いによる影響を調べるため、Taylor 仮説を導入した計算と比較した。基本とした計算の位相速度 $c = u_c$ が大規模な渦の伝播速度に当たるのに対して、Taylor 仮説 $c = u(\eta)$ は微細渦の伝播速度に相当する。孤立波解の比較から4次元ゆらぎ方程式中の位相速度の項には解を急峻化させる効果があることがわかった。また、解が大きく違わないことから、方程式の堅牢性ととも、位相速度の決定手段としての Taylor 仮説の適用可能性が示された。次に、実験値^[21]、本計算結果、ブリチチゴによる渦座標 σ_2 を省略した3次元ゆらぎ方程式の計算結果^[30]、及び Rosers and Moser による DNS の計算結果^[16] という4つのデータについて比較を行った。スパン方向への乱流強度は4者間のばらつきが少なく、ある共通する値を想像し得るが、それ以外ではばらつきが大きくそのような知見は得られなかった。(第5章 5.4, 5.5 節)

今後の課題は、平均流の方程式との連立計算を行うこと、および位相速度の決定法を確立することである。連立計算によって平均流速と同時に混合層成長率 α が求められる。実験でも正確な値が知られていない混合層成長率を「予言的」に決定することができれば、渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式に導入された打ち切り条件の正当性が証明される。同時に、格子形状や解像度の違い、計算手法の違いが計算結果にどのように影響を与えるかについても詳しく議論されなければならない。

付 録 A

空間/時間発展の乱流混合層の相似と相違

実在する混合層はすべて空間発展型で、その漸近形は $\mathbf{u} = \mathbf{u}(y/x) = (u, v, 0)$ であらわされるが、DNS ではこれを扱うことがきわめて困難であるため、時間発展型にして $\mathbf{u} = \mathbf{u}(y/t) = (u, 0, 0)$ に漸近する解を求めている。そしてその結果を $t \rightarrow x_1/U_c$ の置換によって比較している。一致はかなりよいことが報告されている^[16, 17]。

この置換比較法は層流の半無限平板境界層のブラジウスの解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(y/x^{1/2}) = (u, v, 0)$ を無限平板上の静止空気が突然一様速度で動き出したとするいわゆるレイリー問題の解^[30] $\mathbf{u} = \mathbf{u}(y/t^{1/2}) = (u, 0, 0)$ に対応させる考え方と相似である。両者はかなりよい一致を示すこと、レイリー問題は平板境界層を模擬した思考実験の所産でしかないこと、境界層の非線形方程式

$$\psi\psi'' + \psi''' = 0 \quad (u = \psi' = d\psi/d\eta, \eta \sim y/x^{1/2}) \quad (\text{A.1})$$

の解を線形の拡散方程式

$$\eta u' + u'' = 0 \quad (\eta \sim y/t^{1/2}) \quad (\text{A.2})$$

の解で代用していること、などの点である。

実際、ここにおいても空間発展混合層の方程式の漸近形は

$$\left. \begin{aligned} -\eta u' + v' &= 0 \\ -\eta u u' + v u' + \tau' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\eta \sim y/x) \quad (\text{A.3})$$

(τ はレイノルズ応力)

であるのに対し、時間発展混合層の方程式は

$$-\eta u' + \tau' = 0 \quad (\eta \sim y/t) \quad (\text{A.4})$$

となり、両者はかなり異質のものである。

付 録 B

変数分離の計算詳細

一般化された Kármán-Howarth 方程式 (2.7, 2.8) の具体形:

$$\frac{\partial \overline{u'_r \hat{u}'_l}}{\partial x_r} = \frac{\partial \overline{u'_j \hat{u}'_r}}{\partial \hat{x}_r} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial x_r} + \hat{u}_r \frac{\partial}{\partial \hat{x}_r} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_r^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_r^2} \right) \overline{u'_j \hat{u}'_l} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p' \hat{u}'_l} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_l} \overline{p' u'_j} \right) \\ & + \frac{\partial u_j}{\partial x_r} \overline{u'_r \hat{u}'_l} + \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial \hat{x}_r} \overline{u'_j \hat{u}'_r} + \frac{\partial}{\partial x_r} \overline{u'_j u'_r \hat{u}'_l} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_r} \overline{u'_j \hat{u}'_r u'_l} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

に変数分離と打ち切り条件を導入する.

連続の式:

式 (2.9) \rightarrow (B.1; 最左辺):

$$\frac{\partial \overline{u'_r \hat{u}'_l}}{\partial x_r} = \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x_r} g_r(\mathbf{k}) \right] \hat{g}_l^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = 0 \rightarrow \frac{\partial g_r}{\partial x_r} = 0. \quad (\text{B.3})$$

同様に, 式 (2.9) \rightarrow (B.1; 中辺):

$$\frac{\partial \hat{g}_r^*}{\partial \hat{x}_r} = 0. \quad (\text{B.4})$$

運動量保存式:

まず, 式 (B.2) を次のように表記する,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + D + \hat{D} \right) \underbrace{\overline{u'_j \hat{u}'_l}}_{\text{(I)}} + E \underbrace{\overline{u'_j u'_r \hat{u}'_l}}_{\text{(II)}} + \hat{E} \underbrace{\overline{u'_j \hat{u}'_r u'_l}}_{\text{(III)}} = 0. \quad (\text{B.5})$$

ここで,

$$D \overline{u'_j \hat{u}'_l} \equiv \left(u_r \frac{\partial}{\partial x_r} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_r^2} \right) \overline{u'_j \hat{u}'_l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p' \hat{u}'_l} + \frac{\partial u_j}{\partial x_r} \overline{u'_r \hat{u}'_l}, \quad (\text{B.6})$$

$$\hat{D} \overline{u'_j u'_l} \equiv (\hat{u}_r \frac{\partial}{\partial \hat{x}_r} - \nu \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_r^2}) \overline{u'_j u'_l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_r} \overline{\hat{p}' u'_j} + \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial \hat{x}_r} \overline{u'_j u'_r}, \quad (\text{B.7})$$

$$E \overline{u'_j u'_r u'_l} \equiv \frac{\partial}{\partial x_r} \overline{u'_j u'_l u'_l}, \quad (\text{B.8})$$

$$\hat{E} \overline{u'_j u'_r u'_l} \equiv \frac{\partial}{\partial \hat{x}_r} \overline{u'_j u'_l u'_l} \quad (\text{B.9})$$

である.

式 (B.5) 中,

$$(I) = \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k}) \hat{g}_l^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (\text{B.10})$$

また, 3 点相関は

$$\begin{aligned} \overline{u'_j u'_l u'_m} &= \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k}) \hat{g}_l(\tilde{\mathbf{k}}) \tilde{g}_m(\tilde{\mathbf{k}}) \delta(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} d\tilde{\mathbf{k}} \\ &= \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(-\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{k}}) \hat{g}_l(\tilde{\mathbf{k}}) \tilde{g}_m(\tilde{\mathbf{k}}) d\tilde{\mathbf{k}} d\tilde{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$= \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k}) \hat{g}_l(-\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) \tilde{g}_m(\tilde{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} d\tilde{\mathbf{k}} \quad (\text{B.12})$$

のように書くことができる.

ここで,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{k}) = l^{-3}$$

を用いている.

さらに,

$$\hat{\mathbf{k}} \longrightarrow -\hat{\mathbf{k}};$$

$$\begin{aligned} (\text{B.11}) &= \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{k}}) \hat{g}_l(-\tilde{\mathbf{k}}) \tilde{g}_m(\tilde{\mathbf{k}}) d\tilde{\mathbf{k}} d\tilde{\mathbf{k}} \\ &= \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{k}}) \hat{g}_l^*(\tilde{\mathbf{k}}) \tilde{g}_m(\tilde{\mathbf{k}}) d\tilde{\mathbf{k}} d\tilde{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\tilde{\mathbf{k}} \longrightarrow -\tilde{\mathbf{k}};$$

$$\begin{aligned} (\text{B.12}) &= \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k}) \hat{g}_l(-\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) \tilde{g}_m(-\tilde{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} d\tilde{\mathbf{k}} \\ &= \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k}) \hat{g}_l^*(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) \tilde{g}_m^*(\tilde{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} d\tilde{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

をふまえて,

(B.13) で $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ とすると,

$$(II) = \overline{u'_j u'_l u'_m} = \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) \hat{g}_l^*(\mathbf{k}) \tilde{g}_m(\tilde{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} d\tilde{\mathbf{k}} \quad (\text{B.15})$$

が得られ、(B.14)で $\tilde{x} = \hat{x}$ とすると、

$$(III) = \overline{u_j^* \hat{u}_l^* \hat{u}_m^*} = \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k}) \hat{g}_l^*(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) \hat{g}_m^*(\tilde{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} d\tilde{\mathbf{k}} \quad (\text{B.16})$$

が得られる。

式(B.10, B.15, B.16) → (B.5):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + D + \hat{D} \right) \left\{ \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k}) \hat{g}_l^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right\} + E \left\{ \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) \hat{g}_l^*(\mathbf{k}) g_m(\tilde{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} d\tilde{\mathbf{k}} \right\} \\ + \hat{E} \left\{ \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k}) \hat{g}_l^*(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) \hat{g}_m^*(\tilde{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} d\tilde{\mathbf{k}} \right\} = 0. \quad (\text{B.17})$$

→

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \left[\hat{g}_l^* \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + D \right) g_j + E \langle \langle g_j, g_m \rangle \rangle \right\} + g_j \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{D} \right) \hat{g}_l^* + \hat{E} \langle \langle \hat{g}_l^*, \hat{g}_m^* \rangle \rangle \right\} \right] = 0. \quad (\text{B.18})$$

g と \hat{g} に共通な独立変数は t のみであるからこの式は次のように書くことができる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} g_j \hat{g}_l^* \left\{ \underbrace{\frac{1}{g_j} \left(\frac{\partial g_j}{\partial t} + D g_j + E \langle \langle g_j, g_m \rangle \rangle \right)}_{(= i\omega)} + \underbrace{\frac{1}{\hat{g}_l^*} \left(\frac{\partial \hat{g}_l^*}{\partial t} + \hat{D} \hat{g}_l^* + \hat{E} \langle \langle \hat{g}_l^*, \hat{g}_m^* \rangle \rangle \right)}_{(= -i\omega)} \right\} = 0. \quad (\text{B.19})$$

ここで、

$$\langle \langle g_j, g_m \rangle \rangle \equiv \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) g_m(\tilde{\mathbf{k}}) d\tilde{\mathbf{k}}. \quad (\text{B.20})$$

(B.19) 第1項より、

$$(-i\omega + \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial x_r} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_r^2}) g_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g_4}{\partial x_j} + g_r \frac{\partial u_l}{\partial x_r} + \frac{\partial}{\partial x_r} \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) g_r(\tilde{\mathbf{k}}) d\tilde{\mathbf{k}} = 0. \quad (\text{B.21})$$

(B.19) 第2項より、

$$(i\omega + \frac{\partial}{\partial t} + \hat{u}_r \frac{\partial}{\partial \hat{x}_r} - \nu \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_r^2}) \hat{g}_j^* + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{g}_4^*}{\partial \hat{x}_j} + \hat{g}_r^* \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial \hat{x}_r} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_r} \text{R.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_j^*(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) \hat{g}_r^*(\tilde{\mathbf{k}}) d\tilde{\mathbf{k}} = 0. \quad (\text{B.22})$$

式(B.3)と(B.4)、式(B.21)と(B.22)は、実空間(=物理空間)で見たとき一方が他方の共役複素をとった形をしている。よって、どちらか一方を複素面で解けば同時に他方も解いたことになる。

付 録 C

自己相似座標の導入

乱流混合層の支配方程式では、Reynolds 平均方程式が物理空間に 2 次元 (x_1, x_2) で記述され、渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式が物理空間に 2 次元 (x_1, x_2) と渦空間に 3 次元 (s_1, s_2, s_3) で記述される。

これらの方程式に次のように自己相似座標を導入することを考える。

$$\eta = \frac{x_2}{\alpha x_1} \quad (\text{C.1})$$

$$\sigma_1 = \frac{s_1}{\alpha x_1}, \sigma_2 = \frac{s_2}{\alpha x_1}, \sigma_3 = \frac{s_3}{\alpha x_1} \quad (\text{C.2})$$

このとき、方程式に含まれる 1 階と 2 階の微分は次のように変換される。

1 階微分:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \sigma_r} = -\frac{x_2}{\alpha x_1^2} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{s_r}{\alpha x_1^2} \frac{\partial}{\partial \sigma_r} = -\frac{1}{x_1} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \sigma_r \frac{\partial}{\partial \sigma_r} \right) \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{C.4})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1} &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial}{\partial s_2} &= \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial}{\partial s_3} &= \frac{\partial \sigma_3}{\partial s_3} \frac{\partial}{\partial \sigma_3} = \frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.5})$$

2 階微分:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \frac{1}{x_1^2} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \sigma_r \frac{\partial}{\partial \sigma_r} \right) \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \sigma_r \frac{\partial}{\partial \sigma_r} \right) \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\alpha^2 x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (\text{C.7})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} &= \frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \left(\frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \right) = \frac{1}{\alpha^2 x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} &= \frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \sigma_2} \left(\frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \sigma_2} \right) = \frac{1}{\alpha^2 x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma_2^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial s_3^2} &= \frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \left(\frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \right) = \frac{1}{\alpha^2 x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma_3^2} \end{aligned} \right\} \quad (C.8)$$

支配方程式に自己相似性を導入し、 x_1^{-1} でくくることを考えるとき、粘性項 (2階微分) だけはさらに x_1^{-1} が残り自己相似方程式が完成しないことがわかる。このことは、流れが自己相似という性質を持つならば、方程式に粘性項は含まれないことを指している。一方で、実験によって実際に乱流混合層の自己相似性が証明されている。以上の議論から、十分発達した乱流混合層の支配方程式には分子粘性項が含まれないことがわかる。流れ方向に遠方 ($x_1 \rightarrow \infty$), 乱流が十分に発達したところでは、 x_1^{-1} の項はもはや微小であり、そこで自己相似性が実現されると解釈することもできる。

以上の結果得られる方程式に境界層近似 ($\alpha \ll 1$) を施したものが、式 (3.1.3.2), (3.6.3.7) である。

付 録 D

モデル方程式の具体形

$E^{1/2} \rightarrow B(\sigma)$ の積分計算:

式 (4.2) で $\zeta = 1$ とした場合を考える.

$$E(k) = (k_0^2 + k^2)^{-2}. \quad (D.1)$$

$$\begin{aligned} B(\sigma) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik \cdot \sigma} E^{1/2} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik \cdot \sigma} \frac{1}{k_0^2 + k^2} dk \end{aligned}$$

極座標に変換

$$\begin{aligned} &= \iiint e^{-ik\sigma \cos \theta} \frac{k^2}{k_0^2 + k^2} dk d\phi \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{k^2}{k_0^2 + k^2} dk \int_0^{\pi} \sin \theta e^{-ik\sigma \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{4\pi}{\sigma} \int_0^{\infty} \frac{k \sin(k\sigma)}{k_0^2 + k^2} dk \\ &= \frac{2\pi^2}{\sigma} e^{-k_0\sigma}. \end{aligned} \quad (D.2)$$

(数学公式 I [38] 参照.)

モデル方程式:

式 (4.25) を圧力項を消去した後のモーメント方程式に代入することで, 9 コの未知数 $C_\alpha, D_\alpha, E_\alpha (\alpha = 0, 1, 2)$ を含んだ 9 元連立方程式が導出される. この連立方程式から, D_1 以外の項を消去することができ, 最終的に D_1 についての代数方程式が一つ得られる.

$$\Phi(D_1) \equiv \begin{vmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (D.3)$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \beta_{13}^{(2)} D_1 \\ K_2 &= \beta_{23}^{(2)} D_2 \\ K_3 &= -\beta_1^{(2)} D_1^2 - D_2^2 \left\{ \beta_2^{(2)} + \frac{1}{4} \beta_3^{(2)} \left(\frac{\beta_2^{(1)}}{\beta^{(1)}} \right)^2 \right\} \\ L_1 &= K_1 \\ L_2 &= D_2 \left\{ 2 \frac{\beta_{23}^{(2)} \beta_2^{(1)}}{\beta^{(1)}} + \beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}^{(2)} \frac{\beta_2^{(1)}}{\beta^{(1)}} \right\} \\ L_3 &= \frac{\beta_2^{(1)}}{\beta^{(1)}} \left\{ \beta_{23}^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{\beta_3^{(2)} \beta_2^{(1)}}{\beta^{(1)}} - 2 \beta_2^{(2)} \right\} D_2^2 \\ M_1 &= \frac{\beta_{13}^{(2)} \beta_2^{(1)}}{\beta^{(1)}} D_2 + \beta_{13}^{(2)} C_1 \\ M_2 &= \beta_{23}^{(2)} C_2 \\ M_3 &= -\beta_1^{(2)} C_1 D_1 - \beta_2^{(2)} C_2 D_2 + \frac{1}{2} u'_{max} \frac{\beta_3^{(1)} \beta_2^{(1)}}{\beta^{(1)}} D_2 \\ &\quad - D_1 D_2 \left\{ 2 \frac{\beta_1^{(2)} \beta_2^{(1)}}{\beta^{(1)}} - \frac{\beta_{13}^{(2)} \beta_2^{(1)}}{\beta^{(1)}} + \frac{1}{2} \frac{\beta_3^{(2)} \beta_1^{(1)} \beta_2^{(1)}}{\beta^{(1)^2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (D.4)$$

$$C_1 = H D_2, \quad (D.5)$$

$$C_2 = \alpha_2 D_1 + \gamma_2 u'_{max}. \quad (D.6)$$

これが D_1 の代数方程式の具体形である。判別式 (後述) による解の存在範囲でこの式の解 (ゼロ点) を探索する (図 4.2, 4.3 参照)。また、係数 $\beta^{(1)} \sim \beta_{23}^{(2)}$ の具体形は、後述する式 (D.26 ~ D.35) で与えられる。

解の判別式:

D_2 については、次のような方程式が得られる。

$$A D_2^2 - C = 0. \quad (D.7)$$

よって、

$$D_2 = \pm \sqrt{\frac{C}{A}} \quad (D.8)$$

である。式 (D.8) の符号 (\pm) はレイノルズ応力の符号に合うように決められる。

A, C は D_1 のみの関数である.

$$A = \beta_2^{(2)} - \beta_1^{(2)} H^2 - \frac{\beta_1^{(2)} \beta_2^{(1)}}{\beta_1^{(1)}} H, \quad (D.9)$$

$$C = -u'_{max} D_1 \beta_1^{(1)} + \left\{ \frac{\beta_1^{(2)} \beta_1^{(1)}}{\beta_1^{(1)}} - \beta_1^{(2)} \right\} D_1^2 + \beta_2^{(2)} C_2^2, \quad (D.10)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} H &= \alpha_1 + \gamma_1 u'_{max} / D_1 \\ \alpha_1 &= \frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_1^{(2)}} \left\{ \left(1 + \frac{\beta_2^{(1)}}{\beta_1^{(1)}} \right) \frac{\beta_1^{(2)} \beta_1^{(1)}}{\beta_1^{(1)2}} + \frac{\beta_2^{(2)} \beta_1^{(1)}}{\beta_2^{(1)} \beta_1^{(1)}} \right\} \\ \alpha_2 &= -\frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_2^{(2)}} \left\{ \frac{\beta_2^{(2)} \beta_1^{(1)}}{\beta_2^{(1)} \beta_1^{(1)}} + \frac{\beta_1^{(2)} \beta_1^{(1)}}{\beta_1^{(1)2}} \right\} \\ \gamma_1 &= -\frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_1^{(2)}} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{\beta_2^{(1)}}{2\beta_1^{(1)}} \right\} \\ \gamma_2 &= \frac{3}{2} \frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_2^{(2)}} \\ u'_{max} &= \left. \frac{du}{d\eta} \right|_{\eta=0} \end{aligned} \right\} \quad (D.11)$$

式 (D.8) からわかるように C/A の値が正でなければ D_2 が実数解を持たないので, $C/A \geq 0$ となるような D_1 の範囲を特定することが必要とされる. すなわち, C/A は方程式 (D.3) の解の判別式となっている.

解法の手順は次の通りである.

1. 判別式 C/A の値が正になる D_1 の範囲を探索する.
2. C/A の値が正の範囲で式 (D.3) のゼロ点 (実数解) を探索する.
3. 求められた実数解 D_1 から他の展開係数の値を順次計算する.

その他の展開係数は以下の式で決定される.

$$C_0 = -\frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_1^{(1)}} D_1, \quad (D.12)$$

$$D_0 = -\frac{\beta_2^{(1)}}{\beta_1^{(1)}} D_2, \quad (D.13)$$

$$E_0 = \frac{D_0}{2}. \quad (D.14)$$

$$\left. \begin{aligned} L_1 E_1 + L_2 E_2 &= L_3 \\ M_1 E_1 + M_2 E_2 &= M_3 \end{aligned} \right\} \quad (D.15)$$

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} L_3 & L_2 \\ M_3 & M_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ M_1 & M_2 \end{vmatrix}}, \quad E_2 = \frac{\begin{vmatrix} L_1 & L_3 \\ M_1 & M_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ M_1 & M_2 \end{vmatrix}}. \quad (D.16)$$

$\beta^{(p)}$ の決定:

係数の $\beta^{(p)}$ は $\Omega(q)$ の積分操作に由来するもので, $p=1$ が線形項 ($\Omega(q_1), \Omega(\sigma_1 q_2)$, etc.), $p=2$ が非線形項 ($\Omega(q_1 q_2), \Omega(\sigma_1 q_1 q_2)$, etc.) に対応している. 例として, $\Omega(q_1), \Omega(q_1 q_2), \Omega(\sigma_2 q_1 q_2)$ の計算を以下に示す.

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \Omega(q_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} B\chi(C_0\eta + C_1\sigma_1 + C_2\sigma_2) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} BC_0\eta\chi d\sigma \\ &= \hat{\beta}_{000}^{(1)} C_0\eta\chi \\ &= \beta^{(1)} C_0\eta\chi. \end{aligned} \quad (D.17)$$

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \Omega(q_1 q_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} B\chi(C_0\eta + C_1\sigma_1 + C_2\sigma_2) B\chi(D_0\eta + D_1\sigma_1 + D_2\sigma_2) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} B^2\chi^2 \{ (C_0\eta)(D_0\eta) + (C_1\sigma_1)(D_1\sigma_1) + (C_2\sigma_2)(D_2\sigma_2) \} d\sigma \\ &= \chi^2 \{ \hat{\beta}_{000}^{(2)} \eta^2 C_0 D_0 + \hat{\beta}_{100}^{(2)} C_1 D_1 + \hat{\beta}_{010}^{(2)} C_2 D_2 \} \\ &= \chi^2 \{ \beta^{(2)} \eta^2 C_0 D_0 + \beta_1^{(2)} C_1 D_1 + \beta_2^{(2)} C_2 D_2 \}. \end{aligned} \quad (D.18)$$

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \Omega(\sigma_2 q_1 q_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_2 B\chi(C_0\eta + C_1\sigma_1 + C_2\sigma_2) B\chi(D_0\eta + D_1\sigma_1 + D_2\sigma_2) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} B^2\chi^2 \sigma_2 \{ (C_0\eta)(D_2\sigma_2) + (C_2\sigma_2)(D_0\eta) \} d\sigma \\ &= \hat{\beta}_{010}^{(2)} \chi^2 \eta (C_0 D_2 + C_2 D_0) \\ &= \beta_2^{(2)} \chi^2 \eta (C_0 D_2 + C_2 D_0). \end{aligned} \quad (D.19)$$

$\hat{\beta}_{lmn}^{(p)}$ (一般形) は次のようにあらわされる.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{lmn}^{(p)} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1^{2l} \sigma_2^{2m} \sigma_3^{2n} B^p d\sigma \\ &= \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r r^2 \sigma_1^{2l} \sigma_2^{2m} \sigma_3^{2n} B^p dr \\ &= I(2l, 2n) J(2m, 2l+2n+1) R_N^{(p)}.\end{aligned}\quad (D.20)$$

ここで,

$$N \equiv l + m + n. \quad (D.21)$$

また, 以下の積分公式を用いている^[38],

$$\begin{aligned}R_N^{(p)} &= \int_0^{\infty} s^{2N+2-p} e^{-pk_0 s} ds \\ &= \frac{(2N+2-p)!}{(pk_0)^{2N+3-p}},\end{aligned}\quad (D.22)$$

$$\begin{aligned}I(X, Y) &= \int_0^{2\pi} \cos^X \phi \sin^Y \phi d\phi \\ &= \frac{X-1}{X+Y} I(X-2, Y)\end{aligned}\quad (D.23)$$

$$= \frac{Y-1}{X+Y} I(X, Y-2), \quad (D.24)$$

$$\begin{aligned}J(X, Y) &= \int_0^{\pi} \cos^X \theta \sin^Y \theta d\theta \\ &= \frac{X-1}{X+Y} J(X-2, Y).\end{aligned}\quad (D.25)$$

モーメント展開の形 (4.6~4.25) から式 (D.20) のうち必要なモードは以下に限られる.

$$\beta^{(1)} \equiv \hat{\beta}_{000}^{(1)} = I(0, 0) J(0, 1) R_0^{(1)}, \quad (D.26)$$

$$\beta_1^{(1)} \equiv \hat{\beta}_{100}^{(1)} = I(2, 0) J(0, 3) R_1^{(1)}, \quad (D.27)$$

$$\beta_2^{(1)} \equiv \hat{\beta}_{010}^{(1)} = I(0, 0) J(2, 1) R_1^{(1)}, \quad (D.28)$$

$$\beta_3^{(1)} \equiv \hat{\beta}_{001}^{(1)} = I(0, 2) J(0, 3) R_1^{(1)}, \quad (D.29)$$

$$\beta^{(2)} \equiv \hat{\beta}_{000}^{(2)} = I(0, 0) J(0, 1) R_0^{(2)}, \quad (D.30)$$

$$\beta_1^{(2)} \equiv \widehat{\beta}_{100}^{(2)} = I(2, 0)J(0, 3)R_1^{(2)}, \quad (\text{D.31})$$

$$\beta_2^{(2)} \equiv \widehat{\beta}_{010}^{(2)} = I(0, 0)J(2, 1)R_1^{(2)}, \quad (\text{D.32})$$

$$\beta_3^{(2)} \equiv \widehat{\beta}_{001}^{(2)} = I(0, 2)J(0, 3)R_1^{(2)}, \quad (\text{D.33})$$

$$\beta_{13}^{(2)} \equiv \widehat{\beta}_{101}^{(2)} = I(2, 2)J(0, 5)R_2^{(2)}, \quad (\text{D.34})$$

$$\beta_{23}^{(2)} \equiv \widehat{\beta}_{011}^{(2)} = I(0, 2)J(2, 3)R_2^{(2)}. \quad (\text{D.35})$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} I(0, 0) &= 2\pi \\ I(0, 2) &= I(2, 0) = \pi \\ I(2, 2) &= \frac{1}{4}I(0, 2) = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.36})$$

$$\left. \begin{aligned} J(0, 1) &= 2 \\ J(0, 3) &= \frac{2}{3}J(0, 1) = \frac{4}{3} \\ J(0, 5) &= \frac{4}{5}J(0, 3) = \frac{16}{15} \\ J(2, 1) &= \frac{1}{3}J(0, 1) = \frac{2}{3} \\ J(2, 3) &= \frac{1}{5}J(0, 3) = \frac{4}{15} \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.37})$$

$$\left. \begin{aligned} R_0^{(1)} &= \frac{1}{k_0^2} \\ R_1^{(1)} &= \frac{6}{k_0^4} \\ R_0^{(2)} &= \frac{1}{2k_0} \\ R_1^{(2)} &= \frac{1}{4k_0^3} \\ R_2^{(2)} &= \frac{3}{4k_0^5} \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.38})$$

付 録 E

圧縮性流れのゆらぎ方程式

圧縮性がある場合のゆらぎ方程式の具体形は、以下のような形をしている。これらは、Tsuge^[13]によって第2章と同様の手順で導き出されている。

連続の式:

$$Dq_0 + \partial_r q_r = 0 \quad (\text{E.1})$$

運動量保存式:

$$Dq_j + \partial_r q_{jr} + \partial_j q_{40} + \frac{\partial u_j^\dagger}{\partial x_r} q_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} q_0 = 0 \quad (\text{E.2})$$

エネルギー保存式:

$$\frac{1}{\gamma-1} Dq_{40} + \partial_r q_{rjj} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \partial_r (a^2 q_r) + \frac{\partial u_r^\dagger}{\partial x_r} q_{40} + \frac{\partial u_j^\dagger}{\partial x_r} q_{jr} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_r} q_r = 0 \quad (\text{E.3})$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} Dq &\equiv \frac{\partial q}{\partial t} - c_r \frac{\partial q}{\partial s_r} + \partial_r (u_r^\dagger q) \\ \partial_j &\equiv \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial s_j} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.4})$$

$$\left. \begin{aligned} q_{40} &= q_4 + a^2 q_0 \\ q_{jr} &= -\mu \left[\partial_r \left(\frac{q_j}{\rho} \right) + \partial_j \left(\frac{q_r}{\rho} \right) - \frac{2}{3} \delta_{jr} \partial_k \left(\frac{q_k}{\rho} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \left[q_j q_r - \frac{1}{3} \delta_{jr} q_k^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{\rho R_M} \frac{d\mu}{dT} \left[\frac{\partial u_j^\dagger}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r^\dagger}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jr} \frac{\partial u_k^\dagger}{\partial x_k} \right] q_4 \\ q_{rjj} &= -\frac{\lambda}{R_M} \partial_r \left(\frac{q_4}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho R_M} \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_r} q_4 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{q_r q_4}{\rho} \\ u_j^\dagger &\equiv m_j / \rho \\ m_j &\equiv \rho u_j + \overline{\rho' u_j'} \\ a^2 &\equiv R_M T \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.5})$$

T は平均温度, T' は温度ゆらぎ, λ は熱伝達係数, R_M は 1 グラム当たりの気体定数, γ は比熱比である. q_0, q_4, q_{40} はそれぞれ密度, 温度, 圧力のゆらぎに対応する変数分離変数 (孤立波解) である. その他の変数は本文中と同定義である.

圧縮性 Reynolds 平均方程式に含まれる二つの乱流輸送項は, 非圧縮の場合 (式 (2.21)) と同様に, 二点相関と孤立波解の関係式から以下のように計算される.

レイノルズ応力:

$$\rho(\mathbf{x})\rho(\hat{\mathbf{x}})\overline{u'_j(\mathbf{x})u'_l(\hat{\mathbf{x}})}_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi l)^3} \int_{-\infty}^{\infty} q_j(\mathbf{x}, s) q_l(\mathbf{x}, s) ds \quad (\text{E.6})$$

乱流熱流束密度:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} R_M \rho(\mathbf{x})\rho(\hat{\mathbf{x}})\overline{u'_j(\mathbf{x})T'(\hat{\mathbf{x}})}_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi l)^3} \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_{-\infty}^{\infty} q_j(\mathbf{x}, s) q_4(\mathbf{x}, s) ds \quad (\text{E.7})$$

謝辞

本研究を進めるにあたり、多くの方々からご指導、ご協力を賜りました。

指導教官である久保田弘敏教授には、本論文をとりまとめるに際し、懇切なるご指導、ご鞭撻をいただきました。ここに感謝の意を表します。

渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式の提案者である柘植俊一筑波大学名誉教授には、研究全般の様々な場面で貴重なご助言、ご指導をいただきました。ここに感謝の意を表します。

総貫忠晴助手、山根佳子さんには日々、温かい言葉で励ましていただきました。ここに感謝致します。

航空宇宙技術研究所の小川哲室長、溝淵泰寛氏には、研究全般、特に数値計算法について多くの貴重なご助言、ご指導をいただきました。同研究所、吉田憲司氏には、この研究に興味と期待を持っていただき、様々なご助言をいただきました。ここに感謝致します。

渦変数を含んだ Navier-Stokes 方程式の数値計算をされた経験のある往岸達也氏、石橋一弘氏、パイ・ブリチチゴさんには、その経験による有用なご助言をいただきました。ここに感謝致します。

本論文をまとめるに際し、多くの貴重なご助言とご示唆を賜った森下悦生教授、藤井孝歳教授、李家賢一助教授、田村善昭助教授、鈴木宏二郎助教授には心からの感謝の意を表します。

友人、菊島一泰氏、吉田直紀氏の研究に対する姿勢には、強く刺激を受けました。その刺激が研究遂行の原動力として大きな部分を占めていました。ここに感謝致します。

最後に、日々論文完成を願ってくれた祖母、自分の行動を温かく見守ってくれた両親に深く感謝致します。

立花 繁

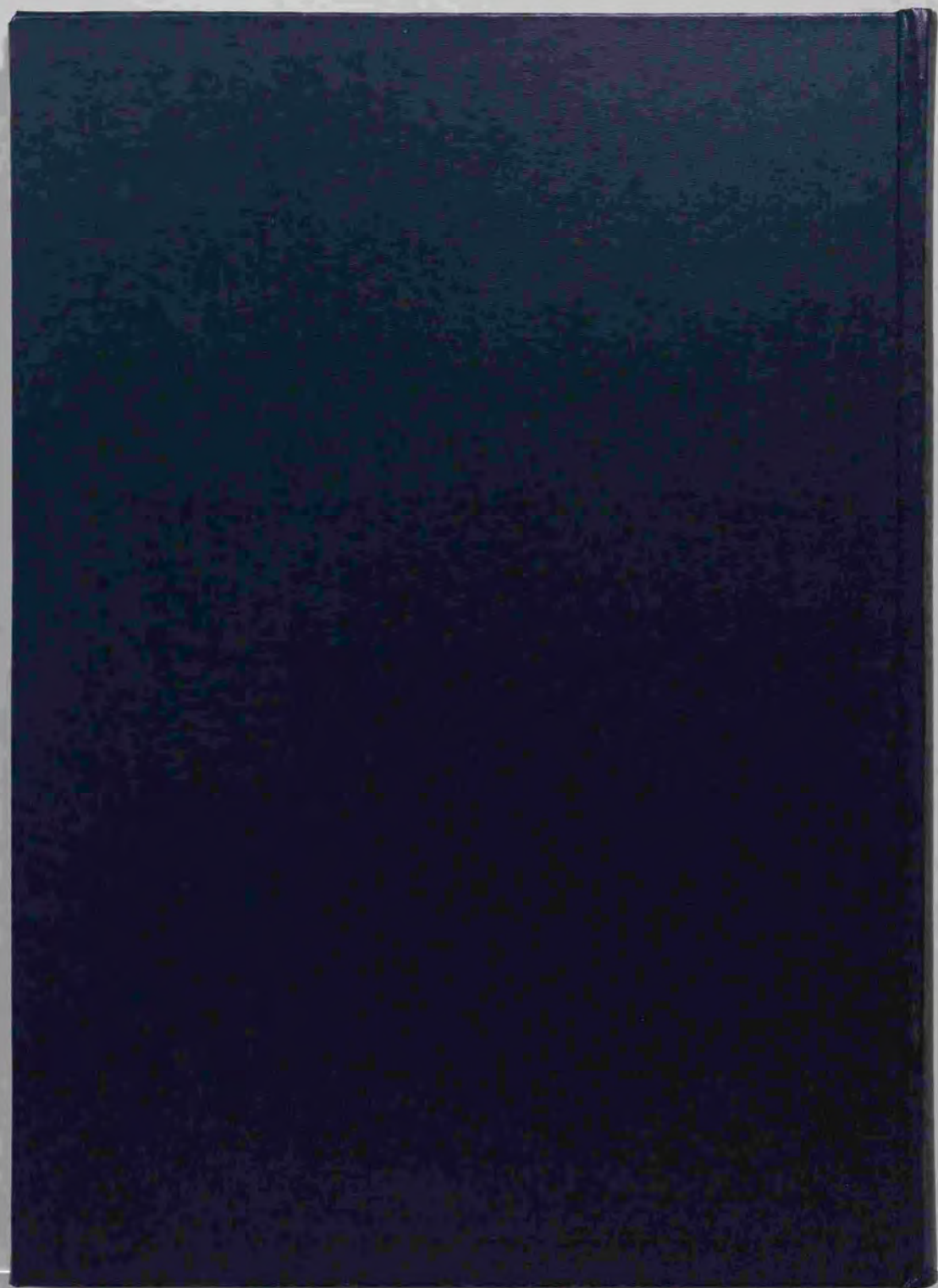
平成 11 年 12 月 17 日

参考文献

- [1] O. Reynolds, "An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels," *Phil. Trans. R. Soc. London*, **A 174**, 935 (1883)
- [2] O. Reynolds, "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion," *Phil. Trans. R. Soc. London*, **A 186**, 123 (1895)
- [3] G.I. Taylor, "Statistical theory of turbulence," *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, **151**, 421 (1935)
- [4] V. Kármán and L. Howarth, "On the statistical theory of isotropic turbulence," *Proc. Roy. Soc.*, **A164.1**, 192, (1938)
- [5] K.R. Sreenivasan and R.R. Prasad, "New results on the fractal and multifractal structure of the large Schmidt number passive scalars in fully turbulent flows," *Physica D*, **38**, 322, (1989)
- [6] R.R. Prasad and K.R. Sreenivasan, "The measurement and interpretation of fractal dimensions of the scalar interface in turbulent flows," *Phys. Fluids A*, **2**, 792, (1990)
- [7] K.R. Sreenivasan, "Fractals and multifractals in fluid turbulence," *Annu. Fluid Mech.*, vol. 23, 539, (1991)
- [8] S. Tsugé, "Approach to the origin of turbulence on the basis of two-point kinetic theory," *Phys. Fluids*, **17**, 22 (1974)
- [9] S. Tsugé and K. Sagara, "Kinetic theory of turbulent compressible flow and comparison with classical theory," *Phys. Fluids*, **19**, 1478 (1976)
- [10] S. Tsugé, "Separability into coherent and chaotic time dependences of turbulent fluctuations," *Phys. Fluids*, **27**, 1370 (1984)

- [11] S.Tsugé, and S.Ogawa, "Molecular and turbulent transports competing in premixed flames," Sixth Toyota Conference on Turbulent and Molecular Processes in Combustion (Edited by T.Takeno, Elsevier,Amsterdam) 35-50(1993)
- [12] S.Tsugé, "First principle basis of the direct numerical simulation for turbulence of inert and reactive gases," LANL e-print archive(<http://xxx.lanl.gov>) chao-dyn/9712020 (1997)
- [13] S.Tsugé, "A solitary-wave representation of turbulence in the physical-plus-eddy space," LANL e-print archive(<http://xxx.lanl.gov>) chao-dyn/9803013 (1998)
- [14] H.Kreplin and H.Eckelmann, "Behavior of the three fluctuating velocity components in the wall region of the turbulent channel flow," *Phys.Fluids*, **22**,1233(1979)
- [15] J.Kim,P.Moin and R.Moser, "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number," *J.Fluid Mech.*, **177**,133(1987)
- [16] M.M.Rogers and R.D.Moser, "Direct simulation of a self-similar turbulent mixing layer," *Phys.Fluids*, **6**(2), 903(1994)
- [17] A.Ansari, "Self-similarity and mixing characteristics of turbulent mixing layers starting from laminar initial conditions," *Phys.Fluids*, **9**(6), 1714(1997)
- [18] H.W.Liepmann and J.Laufer, "Investigations of free turbulent mixing," NACA Tech. Note, No.1257(1947)
- [19] I.Wygnanski and H.E.Fiedler, "The two-dimensional mixing region," *J.Fluid Mech.*, **41**,part2, 327,(1970)
- [20] D.Oster and I.Wygnanski, "The forced mixing layer between parallel streams," *J.Fluid Mech.*, **123**, 91,(1982)
- [21] J.H.Bell and R.D.Mehta, "Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers," *AIAA J.*, **28**,2034,(1990)
- [22] J.H.Bell and R.D.Mehta, "Measurements of the streamwise vortical structures in a plane mixing layer," *J.Fluid Mech.*, **239**,213,(1992)
- [23] M.W.Plesniak, R.D.Mehta and J.P.Johnston, "Curved two-stream turbulent mixing layers: three-dimensional structure and streamwise evolution," *J.Fluid Mech.*, **270**,1,(1994)

- [24] G.L.Brown and A.Roshko, "On density effects and large structure in turbulent mixing layers," J.Fluid Mech., **64**, 775,(1974)
- [25] L.P.Bernal and A.Roshko, "Streamwise vortex structure in plane mixing layers" J.Fluid Mech., **170**, 499,(1986)
- [26] S.Chapman, *The Mathematical theory of Nonuniform Gases*(Cambridge Univ. Press, 1939)
- [27] D.Enskog, *Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen* (Dissertation, Uppsala, 1917)
- [28] H. Grad, "On the kinetic theory of rarefied gases," Communications on Pure and Applied Mathematics, **2**, 331(1949)
- [29] J.O.Hinze, *Turbulence* (McGraw-Hill,1959) p.203
- [30] H.Schlichting, *Boundary-Layer Theory* (McGraw-Hill,Sixth Edition,1968) p.82,125
- [31] G.Birkhoff, *Hydrodynamics* (Princeton University Press, 1955) p.117-147
- [32] T.Kawamura and K.Kuwahara, "Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness," AIAA Paper, 84-0340(1984)
- [33] S.Tachibana,S.Tsugé and H.Kubota, "A solitary-wave solution and turbulent statistics of a mixing layer," AIAA Paper, 99-3703(1999)
- [34] 西野耕一, 笠木伸英, "三次元画像処理流速計による二次元チャンネル乱流の計測," 流れの可視化, **9**, 241(1989)
- [35] 石橋一弘, "ベナール対流の乱流解," 工学博士学位論文, 筑波大学 (1991)
- [36] バイ・ブリチゴ, "疑似圧縮性解法による剪断乱流の孤立波解の存在実証," 工学博士論文, 筑波大学 (1995)
- [37] 数値流体力学編集委員会編, *非圧縮性流体解析*(東京大学出版会,1995) p.86
- [38] 森口繁一, 宇田川鈺久, 一松信, *数学公式 I* (岩波全書,1956) p.175,230,251





Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM Kodak

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM Kodak

A

1

2

3

4

5

6

M

8

9

10

11

12

13

14

15

B

17

18

19

