研　究　速　報
研　究　速　報

乱流強度の非等方性にもとづく抵抗軽減機構

Drag-Reduction Mechanism Based on an Anisotropic Turbulence Structure

吉　澤　　徴*
Akira YOSHIZAWA

1. はじめに

ポリマーの添加により円管流での流量は数十パーセント増加することがあり，抵抗軽減機構の研究は乱流制御の観点から重要な課題である（抵抗軽減の研究の進展に関しては文献１～３を参照されたい）．ポリマーの乱流特性への影響は複雑であり，添加物の種類と量によって大きく変化する．しかし，観測および種々の構成方程式にもとづく直接数値計算により，抵抗軽減をともなう円管流や溝乱流に共通するいくつかの重要な乱流特性が明らかになりつつある．[4-7]

ポリマー溶液を模擬した構成方程式では，ニュートン流体での分子散逸過程が大きく変更される．そのような微視的変更が抵抗軽減に結びつくいくつかの巨視的変化を引き起こす．ポリマー添加の効果は以下の２つの機構の解明と密接している．

(A) 微視的散逸過程がいかに巨視的乱流特性の変化を生じさせるか．

(B) これらの巨視的変化がいかに抵抗軽減過程と結びついているか．

本研究においては，後者の機構を考察する．巨視的変化では，ポリマーの添加は主流方向の乱流強度を増加させ，他の２方向の強度を減少させることがよく知られている．そこで，そのような非等方性の変化が大きな抵抗低減とどのように関連しているかを明らかにすることは，挑戦的な課題である．

ニュートン流体の円管流や溝乱流における平均速度分布は，対数速度則によって特徴づけられる．ポリマー添加によって生じる同速度則の変化は，抵抗軽減における主たる指標となっている．対数速度則はレイノルズ応力の乱流粘性表現から導出することができる．そこで，乱流粘性率と乱流強度の非等方性との関係を明らかにすることによって，抵抗軽減機構に関する有用な知見を得ることができる．

本研究においては，非一様乱流の統計理論であるTSDIA（two-scale direct-interaction approximation）[8,9]を用いて，主流方向の乱流強度が卓越した状況下での乱流粘性率表現を求める．この結果を用いて，乱流強度の非等方性と抵抗軽減度の関係を解析的に議論する．

*東京大学生産技術研究所　情報・システム部門

2. 乱流強度の非等方性と乱流粘性率

2.1. 基礎方程式

非圧縮流体の運動を支配する方程式は

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0, \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}u_i u_j=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+D_i \quad\cdots\cdots(2)$$

によって与えられる．ここで，$\mathbf{u}$は速度，pは単位質量当たりの圧力である．右辺の最終項は非ニュートン流体での粘性応力効果を表わし，ニュートン流体における粘性項$\nu\nabla^2\mathbf{u}$に対応するものである．非ニュートン流体の直接数値計算では，同項のモデリングがきわめて重要な課題である．以下においては，非ニュートン性から生じる乱流強度の非等方性に注目するため，同項の直接的効果は無視する．

アンサンブル平均〈 〉を用いて，物理量fを平均とそのまわりの揺らぎに分ける：

$$f=\bar{f}+f',\ \bar{f}=\langle f\rangle. \quad\cdots\cdots(3)$$

ここで，$f=(\mathbf{u},p)$とする．平均場は

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}}=0, \quad\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{u}_i\bar{u}_j=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-R_{ij}\right) \quad\cdots\cdots(5)$$

に従う．ここで，R_{ij}はレイノルズ応力であり，

$$R_{ij}=\left\langle u_i' u_j'\right\rangle \quad\cdots\cdots(6)$$

で定義される．

2.2. TSDIAの適用

TSDIA[8,9]の定式化では，まず微小なスケールパラメターδを用いて，２つの時空間変数

$$\boldsymbol{\xi}\,(=\mathbf{x}),\ \tau\,(=t);\ \mathbf{X}\,(=\delta\mathbf{x}),\ T\,(=\delta t) \quad \cdots\cdots (7)$$

を導入し，

$$\nabla_{\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right),\ \nabla_X = \left(\frac{\partial}{\partial X_i}\right),\ \frac{D}{DT} = \frac{\partial}{\partial T} + \bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla_X, \quad \cdots\cdots (8)$$

を定義する．揺らぎ部分は速い変数(ξ, τ)で記述され，平均部分のゆっくりした変動は遅い($\mathbf{X}, T$)で表わし，

$$f = \bar{f}(\mathbf{X};T) + f'(\boldsymbol{\xi},\mathbf{X};\tau,T) \quad \cdots\cdots (9)$$

と書く．揺らぎ部分の($\mathbf{X}$, T)への依存性は，平均部分との相互作用から発生する．

TSDIAの主たる手続きは，平均速度で移動する系でのフーリエ変換とスケールパラメターδによる展開にある：

$$f'(\boldsymbol{\xi},\mathbf{X};\tau,T) = \int f'(\mathbf{k},\mathbf{X};\tau,T)\exp\left(-i\mathbf{k}\cdot(\boldsymbol{\xi}-\bar{\mathbf{u}}\tau)\right)d\mathbf{k}, \quad \cdots\cdots (10)$$

$$f'(\mathbf{k},\mathbf{X};\tau,T) = \sum_{n=0}^{\infty}\delta^n f_n'(\mathbf{k},\mathbf{X};\tau,T). \quad \cdots\cdots (11)$$

以下では，遅い変数($\mathbf{X}, T$)への依存性は陽には書かない．

$\mathbf{u}'$の$O(1)$項，すなわち$\mathbf{u}_0'$に対応するグリーン関数$G_{ij}'(\mathbf{k};\ \tau,\ \tau')$を導入する．これを用いると，$O(\delta)$項すなわち$\mathbf{u}_1'$は以下のように求められる：[8-10]

$$\begin{aligned}
u_{1i}'(\mathbf{k};\tau) &= -\frac{\partial \bar{u}_\ell}{\partial X_j}\int_{-\infty}^{\tau} G_{i\ell}'(\mathbf{k};\tau,\tau_1)u_{0j}'(\mathbf{k};\tau_1)d\tau_1 \\
&-i\frac{k_i}{k^2}\nabla_X{}^{+}\cdot\mathbf{u}_0'(\mathbf{k};\tau) - \int_{-\infty}^{\tau} G_{ij}'(\mathbf{k};\tau,\tau_1)\frac{D^{+}u_{0j}'(\mathbf{k};\tau_1)}{DT^{+}}d\tau_1 \\
&+\int_{-\infty}^{\tau} G_{in}'(\mathbf{k};\tau,\tau_1)d\tau_1\iint\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})d\mathbf{p}d\mathbf{q} \\
&\times\left(2M_{nj\ell}(\mathbf{k})\frac{q_\ell}{q^2}u_{0j}'(\mathbf{p};\tau_1)\nabla_X{}^{+}\cdot\mathbf{u}_0'(\mathbf{k};\tau_1)\right. \\
&\left.-M_{j\ell mn}(\mathbf{k})\frac{\partial^{+}}{\partial X_m{}^{+}}\left(u_{0j}'(\mathbf{p};\tau_1)u_{0\ell}'(\mathbf{q};\tau_1)\right)\right). \quad \cdots (12)
\end{aligned}$$

ここで，$\delta(\mathbf{k})$はデュラックのデルタ関数であり，さらに

$$A^{+} = \exp(-i\mathbf{k}\cdot\bar{\mathbf{u}}\tau)A\exp(i\mathbf{k}\cdot\bar{\mathbf{u}}\tau), \quad \cdots\cdots (13)$$

$$M_{ij\ell}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left(k_j D_{i\ell}(\mathbf{k}) + k_\ell D_{ij}(\mathbf{k})\right),\ D_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad \cdots (14)$$

$$M_{ij\ell m}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left(\delta_{i\ell}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{j\ell} - 2\delta_{\ell m}\frac{k_i k_j}{k^2}\right) \quad \cdots\cdots (15)$$

である．

レイノルズ応力の乱流粘性表現は，式（12）の第1項と$\mathbf{u}_0'$の統計量から求められる．いま

$$\left\langle u_{0i}'(\mathbf{k};\tau)u_{0j}'(\mathbf{k}';\tau')\right\rangle = \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')Q_{ij}(\mathbf{k};\tau,\tau'), \quad \cdots\cdots (16)$$

$$\left\langle G_{ij}'(\mathbf{k};\tau,\tau')\right\rangle = G_{ij}(\mathbf{k};\tau,\tau') \quad \cdots\cdots (17)$$

と書くと，

$$\begin{aligned}
\chi_{ij} &\equiv R_{ij} - R_{Lij} \\
&= -\left(\frac{\partial \bar{u}_\ell}{\partial x_m}\int d\mathbf{k}\int_{-\infty}^{\tau}\left(G_{i\ell}(\mathbf{k};\tau,\tau_1)Q_{mj}(\mathbf{k};\tau,\tau_1)\right.\right. \\
&\left.\left.+G_{j\ell}(\mathbf{k};\tau,\tau_1)Q_{mi}(\mathbf{k};\tau,\tau_1)\right)d\tau_1\right) \quad \cdots\cdots (18)
\end{aligned}$$

を得る．ここで，R_{Lij}は$\mathbf{u}_0'$のR_{ij}への寄与を表わす（下付き添字Lは初項を意味する）．スケールパラメターδは$\mathbf{X}\rightarrow\delta\mathbf{x}$の操作によって自動的に式（18）から消える．

よく知られた等方的乱流粘性表現は，式（18）のQ_{ij}において等方性を仮定することによって導出される．すなわち，

$$Q_{ij}(\mathbf{k};\tau,\tau') = D_{ij}(\mathbf{k})Q(k;\tau,\tau') \quad \cdots\cdots (19)$$

および

$$G_{ij}(\mathbf{k};\tau,\tau') = D_{ij}(\mathbf{k})G(k;\tau,\tau') \quad \cdots\cdots (20)$$

を用いると，

$$\chi_{ij} = -\nu_{TI}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) \quad \cdots\cdots (21)$$

を得る．ここで，ν_{TI}は等方的乱流粘性率であり，

$$\nu_{TI} = \frac{7}{15}\zeta_I,\ \zeta_I = \int d\mathbf{k}\int_{-\infty}^{\tau} G(k;\tau,\tau_1)Q_I(k;\tau,\tau_1)d\tau_1 \quad \cdots\cdots (22)$$

で与えられる．

円管乱流や溝乱流においては，式（21）は等方的な乱流強度を与える．この結果は，観測との比較においては重大な欠陥となる．この点を是正するために，2次の非線形項が追加されるが，[11,12] これらの項はTSDIAの$O(\delta^2)$の解析から得られる．[8,13]

2.3. 乱流強度の非等方性の導入

上述の2次の非線形項によって与えられる乱流強度の非等方性は，円管流や溝乱流の平均流を決定するR_{ij}のシェアー成分には全く寄与しない．言い換えると，観測される乱流強度のすべてが平均流に影響を与えるものではない．とくに，非ニュートン流体の観測や直接数値計算で確認される非等方性[4-7,14] と抵抗軽減との関連性を考察するときは，ニュートン流体の極限で生き残る非等方性は除去されなければならない．この点は，同関連性に関する従来の研究では看過されてきた．

ポリマーの添加による乱流強度の非等方性を模擬するために，$0 \le c \le 1$を満たすパラメターcを用いて，

$$\begin{aligned}
Q_{ij}(\mathbf{k};\tau,\tau') &= cD_{ij}(\mathbf{k})Q_I(k;\tau,\tau') \\
&+(1-c)A_{ij}(\mathbf{k})Q_A(k;\tau,\tau') \quad \cdots\cdots (23)
\end{aligned}$$

と書く．ここで，A_{ij}は2次の非等方テンソルであり，Q_Aはスカラー関数である．円管乱流や溝乱流では，主流方向の乱流強度がもっとも大きい．他の2成分では，壁面に垂直方向の乱流強度がより小さいが，両者の差は主流方向の乱流強度との差よりずっと少ない．この状態の近似表現として，主流方向の乱流強度が卓越し，主流方向に関する軸対称性を有する非等方性を仮定し，

$$A_{ij}(\mathbf{k})=D_{i1}(\mathbf{k})D_{j1}(\mathbf{k}) \quad (24)$$

と書く．式（23）と（24）より，揺らぎの部分の強度は

$$\tilde{u}_{L1}{}^2 \equiv \langle u_{L1}'^2\rangle = \frac{2c}{3}\int Q_I(k;\tau,\tau)d\mathbf{k} + \frac{8(1-c)}{15}\int Q_A(k;\tau,\tau)d\mathbf{k}, \quad (25)$$

$$\tilde{u}_{L2}{}^2 = \tilde{u}_{L3}{}^2 = \frac{2c}{3}\int Q_I(k;\tau,\tau)d\mathbf{k} + \frac{1-c}{15}\int Q_A(k;\tau,\tau)d\mathbf{k} \quad (26)$$

となり，主流方向の乱流強度が最大であることが満たされている．

式（23）と（24）を式（18）に代入すると，

$$\chi_{ij}{}^* = -\left(\frac{7c}{15}\zeta_I + \frac{1-c}{21}\zeta_A\right)\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}+\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) - \frac{1-c}{35}\zeta_A\left(\delta_{i1}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_j}+\delta_{j1}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_i}\right)^* - \frac{31(1-c)}{35}\zeta_A\left(\delta_{i1}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_j}+\delta_{j1}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_i}\right)^* \quad (27)$$

を得る．ここで，上付き記号＊はトレイス零の部分を意味し，

$$\zeta_A = \int d\mathbf{k}\int_{-\infty}^{\tau} G(k;\tau,\tau_1)Q_A(k;\tau,\tau_1)d\tau_1 \quad (28)$$

である．

3. 抵抗軽減の考察

円管流では，式（5）中のR_{1j}のみが必要となる．その結果，式（27）より

$$\chi_{1j}{}^* = -\nu_{TA}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_j} \quad (29)$$

を得る．非等方な乱流強度より生じる乱流粘性率は，

$$\nu_{TA} = \frac{7c}{15}\zeta_I + \frac{8(1-c)}{105}\zeta_A \quad (30)$$

で与えられる．

乱流強度の非等方度と乱流粘性率の減少度との関連を見るために，非等方乱流粘性率と等方乱流粘性率との比，すなわち

$$r_V \equiv \frac{\nu_{TA}}{\nu_{TI}} = c + \frac{8(1-c)}{49}\frac{\zeta_A}{\zeta_I} \quad (31)$$

を導入する．ここで，$r_V{}^{-1}$は流量増加の指数となることに注意されたい．ポリマー添加によって生じる非等方度を示すパラメータとして，

$$r_A \equiv \frac{\tilde{u}_{L1}}{\tilde{u}_I} = \sqrt{c + \frac{4(1-c)}{5}\frac{\int Q_A(k;\tau,\tau)d\mathbf{k}}{\int Q_I(k;\tau,\tau)d\mathbf{k}}} \quad (32)$$

を採用する．ここで，$\tilde{u}_I$は式（23）で$c=1$とおくことによって得られる等方的強度である．

式（31）と（32）より抵抗軽減度と乱流強度の非等方度との関係が得られる．定量的な関係を得るためには，Q_IとQ_Aの関連を知る必要がある．現在，これに関して確たる知識は得られていない．しかし，観測および直接数値計算より，抵抗軽減は乱流強度の抑制によるものではなく，3方向強度の変調に密接していることが確認されている．この点に注目し，全乱流強度はポリマー添加によって変化しないことを仮定する．式（25）と（26）より，

$$\langle \mathbf{u}_L'^2\rangle = \frac{2}{3}\int Q_A(k;\tau,\tau)d\mathbf{k} + 2c\int\left(Q_I(k;\tau,\tau)-\frac{1}{3}Q_A(k;\tau,\tau)\right)d\mathbf{k} \quad (33)$$

を得るが，パラメターcからの独立性に対する十分条件より，

$$Q_A(k;\tau,\tau) = 3Q_I(k;\tau,\tau) \quad (34)$$

を得る．この結果を$\tau \neq \tau'$に拡張し，

$$Q_A(k;\tau,\tau') = 3Q_I(k;\tau,\tau') \quad (35)$$

を用いる．

式（22）と（28）から，

$$\zeta_A = 3\zeta_I \quad (36)$$

を得る．式（36）の下では，式（31）と（32）は

$$r_V = \frac{24+25c}{49}, \quad (37)$$

$$r_A = \sqrt{\frac{12-7c}{5}} \quad (38)$$

となるので，cを消去すると，

$$r_V = \frac{468}{343}\left(1-\frac{125}{468}r_A{}^2\right),\quad 1 \le r_A \le \sqrt{\frac{12}{5}} \quad (39)$$

を得る．式（39）は主流方向の乱流強度が卓越するととも

に乱流粘性率の減少すなわち抵抗軽減が顕著になることを明白に示している．具体的には，

$$r_A = 1.18\ (c = 0.75):\quad r_V = 0.872,\quad r_V^{-1} = 1.15, \qquad \cdots\cdot(40\,\mathrm{a})$$

$$r_A = 1.30\ (c = 0.50):\quad r_V = 0.744,\quad r_V^{-1} = 1.34, \qquad \cdots\cdot(40\,\mathrm{b})$$

$$r_A = 1.43\ (c = 0.25):\quad r_V = 0.617,\quad r_V^{-1} = 1.60, \qquad \cdots\cdot(40\,\mathrm{c})$$

$$r_A = 1.55\ (c = 0):\quad r_V = 0.490,\quad r_V^{-1} = 2.04 \qquad \cdots\cdot(40\,\mathrm{d})$$

となる．更なる議論については，文献15を参照されたい．

終わりに，次の事項を強調しておく．上記の抵抗軽減効果は，式（27）において他の項に比べ比較的大きな数係数を有する項が消失していることに密接している．このことは，たとえ主流方向の強度が卓越しても主流方向の一様性のない流れでは，抵抗軽減が発生するとは限らないことを意味している．換言すると，ポリマーを主流方向の一様性のない流れに添加しても抵抗軽減は保証されないことになる．

（2003年10月16日受理）

参 考 文 献

1） L. L Lumley, Annu. Rev. Fluid Mech. 1, 367（1969）.
2） P. S. Virk, AIChE J. 21, 625（1975）.
3） N. S. Berman, Annu. Rev. Fluid Mech. 10, 47（1978）.
4） J. M. J. den Toonder, M. A. Hulsen, G. D. C. Kuiken, and F. T. M. Nieuwstadt, J. Fluid Mech. 337, 193（1997）.
5） R. Sureshkumar, A. N. Beris, and R. A. Handler, Phys. Fluids 9, 743（1997）.
6） C. D. Dimitropoulos, R. Sureshkumar, and A. N. Beris, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 79, 433（1998）.
7） S. Sibilla and A. Baron, Phys. Fluids 14, 1123（2002）.
8） A. Yoshizawa, *Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows*（Kluwer, Dordrecht, 1998）.
9） A. Yoshizawa, S-I. Itoh, and K. Itoh, *Plasma and Fluid Turbulence*（Institute of Physics, Bristol, 2003）.
10） F. Hamba, J. Phys. Soc. Jpn. 56, 79（1987）.
11） S. Nisizima and A. Yoshizawa, AIAA J. 25, 414（1987）.
12） C. G. Speziale, J. Fluid Mech. 178, 459（1987）.
13） M. Okamoto, J. Phys. Soc. Jpn. 63, 2102（1994）.
14） P. S. Virk and D. L. Wagger, in *Structure of Turbulence and Drag Reduction*, ed. A. Gyre（Springer, New York, 1990）, p. 6201.
15） A. Yoshizawa, Phys. Fluids 15, 3875（2003）.