研　究　速　報

研究速報

乱流中のスカラーの非局所的な渦拡散モデル

Nonlocal Eddy-Diffusivity Model for Scalar in Turbulence

半　場　藤　弘*

Fujihiro HAMBA

1. はじめに

温度や物質濃度などのスカラーの輸送の計算に必要なスカラー流束の乱流モデルとして渦拡散モデルがよく用いられる．しかし熱対流の乱流場では熱流束の渦拡散係数が負になる場合があるなどの欠点もある．渦拡散モデルの改良として，浮力項を導入すること，スカラー流束の輸送方程式のモデルを扱うことの他に，非局所的な効果を取り入れる方法が考えられる．大気境界層のスカラー輸送では非局所的なスカラー流束のモデルが提案されている[1,2]．またHamba[3]は大気境界層のLESを用いて非局所的な渦拡散係数を評価した．本研究では浮力乱流と異なり速度剪断により生成されるチャネル乱流で非局所的な効果がどの程度あるかを調べるためチャネル乱流のDNSを行った．速度場とグリーン関数の時間発展を計算して渦拡散係数の分布を求め，スカラー流束の非局所的な渦拡散表現の妥当性を確認する．さらにモデル化の試みとして，渦拡散係数を代数的に，または微分方程式を用いて近似する方法，局所的な渦拡散モデルに高次の微分項を導入し改良する方法を試す．

2. スカラー流束の非局所的な渦拡散表現

チャネル乱流や水平方向に一様な大気境界層などでは平均量は境界面に垂直な座標yだけに依存するので，スカラー流束$\langle v'\theta'\rangle$のモデルは

$$\langle v'\theta'\rangle(y) = -\kappa_T(y)\frac{\partial\Theta(y)}{\partial y} \quad\cdots(1)$$

と書ける．ここでΘは平均スカラー，κ_Tは渦拡散係数を表す．一点完結モデルの一つである渦拡散モデルでは，座標yのスカラー流束は同じ点yのスカラー勾配に比例する．大気境界層のスカラー流束のモデルとして次のような非局所的な渦拡散表現が提案されている[2]．

$$\langle v'\theta'\rangle(y) = -\int dy'\kappa_{NL}(y;y')\frac{\partial\Theta(y')}{\partial y'} \quad\cdots(2)$$

ここで$\kappa_{NL}(y;y')$は非局所的な渦拡散係数で，座標y'のスカラー勾配が座標yのスカラー流束に及ぼす寄与を表す．この表現は単にモデルの一つというだけでなく，グリーン関数を用いれば渦拡散係数を厳密に求めることができる[3,4]．スカラーの揺らぎ部分θ'の方程式

$$\frac{\partial\theta'}{\partial t} = -U_i\frac{\partial\theta'}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i'\theta' - \langle u_i'\theta'\rangle) + \kappa\frac{\partial^2\theta'}{\partial x_i\partial x_i} - u_i'\frac{\partial\Theta}{\partial x_i} \quad\cdots(3)$$

の右辺最後の項をθ'に対する外力であるとみなし，次の発展方程式を満たすグリーン関数を導入する．

$$\frac{\partial g_i'}{\partial t} = -U_j\frac{\partial g_i'}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j'g_i' - \langle u_j'g_i'\rangle) + \kappa\frac{\partial^2 g_i'}{\partial x_j\partial x_j} + u_i'\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta(t-t') \quad\cdots(4)$$

ここでグリーン関数$g_i'(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')$は地点$\mathbf{x}'$時刻$t'$に$u_i'(\mathbf{x}',t')$の大きさの外力があった場合の地点$\mathbf{x}$時刻tの応答を表す．このグリーン関数を用いて$\theta'$を形式的に解くことができる．

$$\theta'(\mathbf{x},t) = -\int d\mathbf{x}'\int_0^t dt' g_i'(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')\frac{\partial}{\partial x_i'}\Theta(\mathbf{x}',t') \quad\cdots(5)$$

ただし初期値$\theta'(\mathbf{x},0)$の寄与は省略した．この解を用いるとスカラー流束は

$$\langle u_i'\theta'\rangle(\mathbf{x},t) = -\int d\mathbf{x}'\int_0^t dt'\kappa_{NLij}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')\frac{\partial}{\partial x_j'}\Theta(\mathbf{x}',t') \quad\cdots(6)$$

$$\kappa_{NLij}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') = \langle u_i'(\mathbf{x},t)g_j'(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')\rangle \quad\cdots(7)$$

と表せる．したがってスカラー流束は空間的にも時間的にも非局所的な影響を受けることがわかる．定常でx-z面に一様な乱流場では

$$\langle u_i'\theta'\rangle(y) = -\int dy'\kappa_{NLij}(y;y')\frac{\partial\Theta(y')}{\partial x_j'} \quad\cdots(8)$$

$$\kappa_{NLij}(y;y') = \int dx'\int dz'\int_0^t dt'\langle u_i'(\mathbf{x},t)g_j'(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')\rangle \quad\cdots(9)$$

*東京大学生産技術研究所　情報・システム部門

のように書くことができ，(2) の渦拡散係数は (9) で表されることがわかる．

3. チャネル乱流中のスカラー流束

本研究で計算するチャネル乱流は $Re_\tau = 180$，計算領域は $L_x = 6.4, L_y = 2, L_z = 3.2$ であり格子点数は $128 \times 64 \times 128$ である．$y = -1$ と $y = 1$ で滑りなし条件，x, z 方向には周期境界条件を用いる．空間については2次精度の中心差分，時間についてはAdams-Bashforth法を用いる．まず速度場とグリーン関数 g_i' の時間発展を求めた．グリーン関数の $y = \pm 1$ の境界条件は $g_i' = 0$ である．

図1に (9) の渦拡散係数 $\kappa_{NL\,22}(y;\ y')$ の y' に対する分布を示す．いくつかの代表的な y について表してある．$y = 0$ と $y = -0.404$ の場合では $|y' - y| \cong 0.3$ でも非局所的な影響を受けることがわかる．y の座標が壁に近づくと分布の幅は狭くなるが，非対称な分布になりチャネル中央からの影響をより強く受けることがわかる．

さらにスカラーの時間発展を計算する．スカラーの輸送方程式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i \theta) + \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} + f_\theta \quad \cdots\cdots (10)$$

である．プラントル数 $Pr = \nu/\kappa$ は0.7，また f_θ は温度場に対する発熱項などに相当する．まず次の f_θ の値と境界条件で計算した．

$$f_\theta = 2,\quad \theta(x, -1, z) = \theta(x, 1, z) = 0 \quad \cdots\cdots (11)$$

図2にスカラー流束の y に対する分布を示す．実線はHoriuti[5]のDNSの値，破線は本計算でスカラー流束を直接求めた値，点線は本計算で (2) と (9) を用いて求めた値である．まず実線と破線の一致は本計算でスカラー流束が精度良く求められていることを示す．また破線と点線もよく一致しており，(2) の非局所的な渦拡散表現が成り立っていることがわかる．

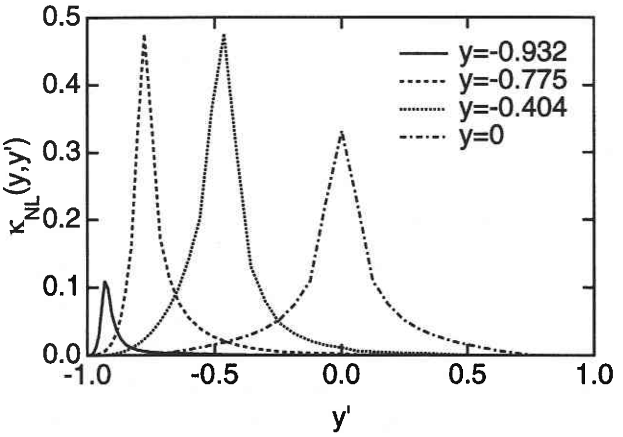

図1　非局所渦拡散係数の分布

次に平均スカラーが x, y 座標に依存する2次元的な場合を考察する．まずグリーン関数を用いた渦拡散係数

$$\kappa_{NLij}(x, y; x', y') = \int dz' \int_0^t dt' \langle u_i'(\mathbf{x}, t) g_j'(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \rangle \quad \cdots (12)$$

の分布を求める．図3に $x = 4.8, y = -0.775$ に対する係数 $\kappa_{NL\,22}(x, y; x', y')$ の x', y' に対する分布を表す．平均速度場の移流効果によりかなり上流からの影響を受けていることがわかる．$x = 4.8$ のすぐ下流に負の値を持つ部分が見られるが，数値的な振動と思われる．

さらに x 座標に依存する境界条件

$$f_\theta = 0,\quad \theta(x, -1, z) = \sin(2\pi x / L_x),\quad \theta(x, 1, z) = 0 \quad \cdots\cdots (13)$$

を用いてスカラーの時間発展を計算する．図4にスカラー流束 $\langle v'\theta' \rangle$ の x, y に対する分布を表す．(a) は直接 $\langle v'\theta' \rangle$ を求めた値，(b) は

$$\langle v'\theta' \rangle(x, y) = -\int dx' \int dy' \Big(\kappa_{NL\,21}(x, y; x', y') \frac{\partial}{\partial x'} \Theta(x', y') + \kappa_{NL\,22}(x, y; x', y') \frac{\partial}{\partial y'} \Theta(x', y') \Big) \quad \cdots (14)$$

を用いて求めた値である．$y = -1$ の境界では $0 < x < 3.2$

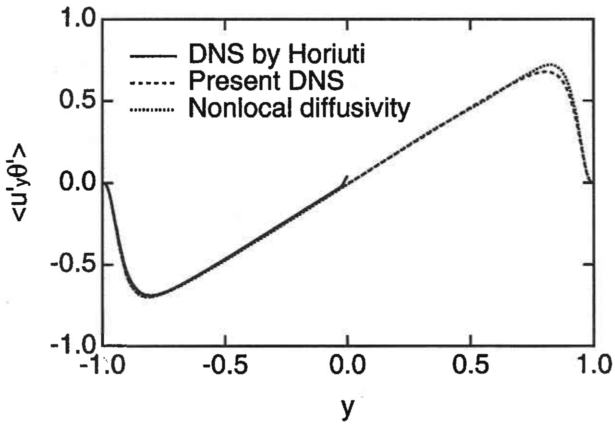

図2　スカラー流束 $\langle v'\theta' \rangle$ の分布

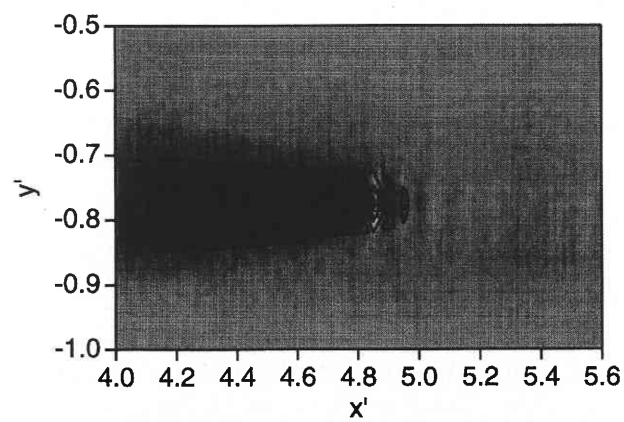

図3　非局所渦拡散係数の x'-y' 面での分布

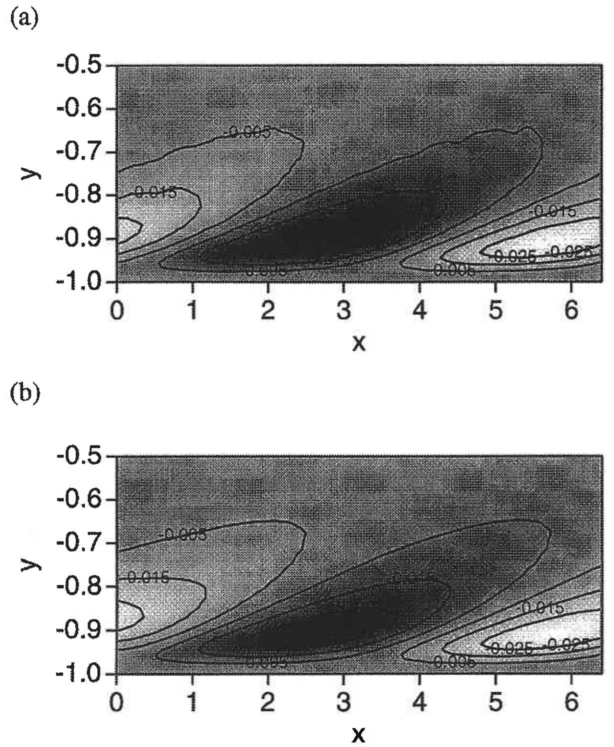

図4　スカラー流束〈v′θ′〉の2次元分布（a）DNSから直接求めた値（b）非局所渦拡散係数を使って求めた値

で正のθが与えられるためその近傍では上向きのスカラー流束の領域があり，その領域は壁から離れるに従って下流に移っている．また（a）と（b）の分布はよく一致しており非局所的な渦拡散表現は2次元的な分布も正しく表すことができる．

4. 非局所的な渦拡散係数のモデル化

前章ではDNSのデータを用いて渦拡散係数の分布を求めた．しかしRANSモデルとして（2）の式を用いるとしたら，渦拡散係数の分布を何らかの形でモデル化する必要がある．本研究では3つの方法を試みる．

まず最初は，渦拡散係数の分布を適当な関数を使って近似する．指数関数を用いて次のように近似できる．

$$\kappa_{NL22}(y;y')\propto\exp[-|y-y'|/\ell(y,y')] \quad \cdots\cdots (15)$$

ここで$\ell(y,y')$は長さスケールを示す．yが壁から離れるほど長さℓが大きくなっている．もしℓがyだけに依存するなら$y'<y$と$y'>y$について対称な分布になるが，$y=-0.932$のようにyが壁に近い場合には非対称になるので，ℓに対するy'の依存性を残した．実際のRANSのモデルで用いるとしたら，さらにℓを乱流エネルギーや散逸率のようなモデル変数を用いて表す必要がある．

次に，既存の局所的な渦拡散近似に高次の項を導入して改良することを考える．（2）の積分表示は厳密ではあるが，実際のモデルで使うには計算量が増大する．また渦拡散係数の分布が正確でないと，かえって局所近似より悪い予測を与えることも考えられる．そこで（2）の表式の知見を生かして局所近似を改良することを試みる．スカラー勾配を$y'=y$のまわりでTaylor展開すると次の式が得られる

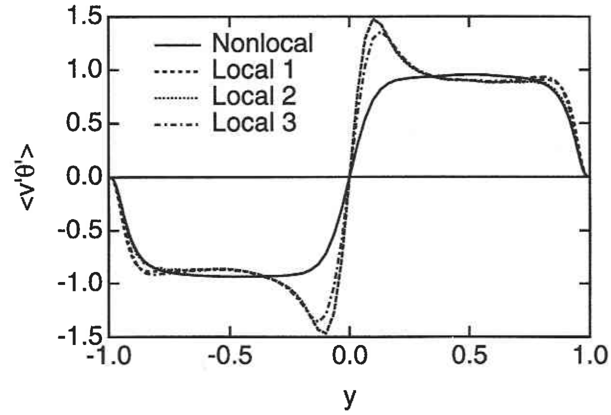

図5　スカラー流束〈v′θ′〉の分布

$$\langle u_i'\theta'\rangle_{LE}(y)=-\kappa^{(0)}_{Li2}(y)\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\kappa^{(1)}_{Li2}(y)\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}-\kappa^{(2)}_{Li2}(y)\frac{\partial^3\Theta}{\partial y^3} \quad \cdot (16)$$

$$\kappa^{(0)}_{Li2}(y)=\int dy'\kappa_{NLi2}(y;y') \quad \cdots\cdots (17)$$

$$\kappa^{(1)}_{Li2}(y)=\int_{y-h}^{y+h}dy'(y'-y)\kappa_{NLi2}(y;y') \quad \cdots\cdots (18)$$

$$\kappa^{(2)}_{Li2}(y)=\int_{y-h}^{y+h}dy'\tfrac{1}{2}(y'-y)^2\kappa_{NLi2}(y;y') \quad \cdots\cdots (19)$$

（18）と（19）の積分範囲は本来はチャネル流の両壁の間$-1<y<1$であるが，ここでは$h=0.1$として$y-h<y<y+h$の範囲に限定した．図5にスカラー流束のyに対する分布を示す．ただしスカラーの方程式にソース項として$f_\theta=\exp(-y^2/0.09)$を加え，両壁での境界条件$\theta=0$を課してある．実線は（2）から求めた正確な値である．およそ$-0.2<y<0.2$にソース項の値が集中するのでそこに急激なスカラー勾配が存在する．図5のLocal 1, 2, 3はそれぞれ（16）の右辺の1項だけ，2項まで，3項全てを使って表した場合である．Local 1の破線は通常の局所的な渦拡散モデルに対応する．チャネル中央の$-0.3<y<0.3$ではスカラー流束の絶対値を過大評価していることがわかる．また$-1<y<-0.9$の壁近くでも大きめに評価している．Local 2の点線では壁近くでの値は改善し，Nonlocalと一致しているがチャネル中央では改善が見られない．Local 3ではチャネル中央で少しだけ改良される．この修正値は積分範囲のhに依存し，hを大きくすればよりNonlocalの分布に近づくが，逆に壁近くでは一致が悪くなってしまう．hの取り方も含め，局所近似の高次項を使ってどう改良するかは今後の課題である．

最後に渦拡散係数の分布を求めるのに代数的ではなく微

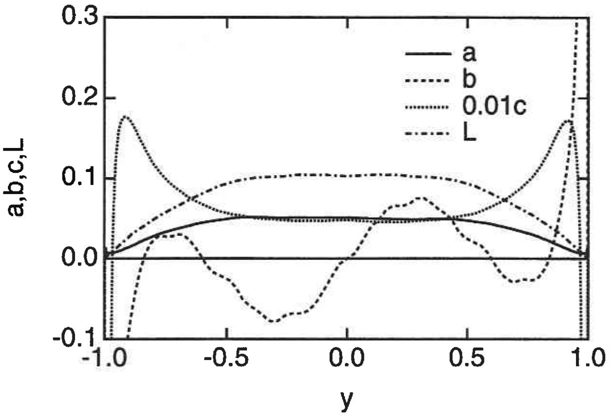

図6　微分方程式（20）の係数と長さスケールLの分布

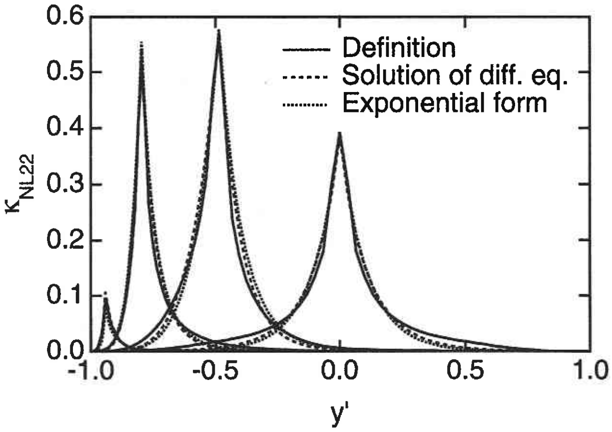

図7　非局所渦拡散係数の分布

分方程式を用いる方法を試す．渦拡散係数$\kappa_{NL}(y;\ y')$が次の方程式に従うと仮定する．

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+b\frac{\partial f}{\partial y}-cf=-\langle v'^2\rangle\delta(y-y') \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

ここでa, b, cはyに依存する係数である．仮にこれらが定数（$a=a_0, b=0, c=c_0$）であるとすると（20）の解は

$$f(y;y')=\frac{\langle v'^2\rangle}{2\sqrt{a_0c_0}}\exp\left(-\frac{|y-y'|}{\sqrt{a_0/c_0}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

となり，（15）に対応する．係数のyの依存性を許すので（20）の解は（21）より一般的になる．DNSで得られた渦拡散係数の分布を用いて（20）の係数の分布を求めたのが図6である．長さスケールとして$L(y)=\sqrt{a(y)/c(y)}$も示してある．図7に渦拡散率$\kappa_{NL}(y;\ y')$の正確な値と，（20）の微分方程式を解いて得た値，さらに代数式

$$\kappa_{NL22}(y;y')=\tfrac{1}{2}(\kappa_0(y)+\kappa_0(y'))\exp[-2|y-y'|/(L(y)+L(y'))] \quad \cdot (22)$$

$$\kappa_0=\langle v'^2\rangle L/(2a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

を用いて得た値を示す．この結果より，微分方程式（20）はもちろん，代数式（22）もほぼ正確な値を示すことがわかる．したがって何らかの形で$L(y)$や$\kappa_0(y)$の値をモデル化できれば非局所的な渦拡散表現でより正確なモデルが作れることを示唆している．

5. ま　と　め

チャネル乱流のDNSを行い速度場とグリーン関数の時間発展を計算した．それらを時間と空間に平均することにより非局所的な渦拡散係数の分布を求めた．平均スカラー場が1次元と2次元的な分布を持つ場合にスカラー流束の非局所的な渦拡散表現が実際に成り立つことを示し，スカラー勾配がスカラー流束に及ぼす非局所的な影響について調べた．さらに，この係数のモデル化のために3つの方法を試みた．渦拡散係数を代数的に表す方法，局所近似の渦拡散近似に高次微分の項を導入する方法，渦拡散係数の従う微分方程式を立てる方法である．チャネル乱流の1次元のスカラー場においては，渦拡散係数を指数関数を用いて近似できること，局所近似の改良ではさらなる考察が必要であることなどがわかった．今後の課題として平均スカラー場が2次元または非定常な場合，またチャネル以外の非平衡な速度場の場合に，グリーン関数を用いた非局所解析を進める予定である．

（2003年11月10日受理）

参　考　文　献

1) R. B. Stull: J. Atmos. Sci. **41** (1984) 3351.
2) R. Berkowicz & L. P. Prahm: J. Fluid Mech. **100** (1980) 433.
3) F. Hamba: J. Atmos. Sci. **52** (1995) 1084.
4) R. H. Kraichnan: Complex Systems **1** (1987) 805.
5) K. Horiuti: J. Fluid Mech. **238** (1992) 405.