

渦粘性型 $k-\varepsilon-h$ モデルによる直円管内旋回乱流の解析

Numerical Simulation of Turbulent Swirling Flow in a Straight Pipe Using Nonlinear $k-\varepsilon-h$ Models

西 島 勝 一*・吉 澤 徹*・横 井 喜 充*

Shoiti NISIZIMA, Akira YOSHIKAWA and Nobumitsu YOKOI

1. は じ め に

工学における乱流の数値解析では、渦粘性型 $k-\varepsilon$ モデルが多用されている。しかし、このモデルについては工学でよく取り扱われる旋回乱流の特性を再現できないという問題点があげられている。その欠点の改良を目指して多くの試みがなされてきている¹⁻⁴⁾。

本論文では、その $k-\varepsilon$ モデルの欠陥原因を調べ、その欠点を回避するモデルの検討をおこなう。横井・吉澤により提案されたヘリシテイ (h) 式を含む $k-\varepsilon-h$ 3 方程式乱流モデル⁵⁾ を応用して、直円管内旋回乱流の特性再現性を論議する。得られた数値解析結果を、実験結果や応力方程式モデルによる解析結果等と比較・検討し、モデルの評価をおこなう。

2. $k-\varepsilon$ 乱流モデルの旋回流への適用

2.1 低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデル

ここでは、壁乱流へ適用するために、安倍らの低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデル⁶⁾ を定数値を変化させないで用いる⁷⁾。

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \bar{v}_\alpha = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(R_{\alpha\alpha} + \nu \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) \dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{C_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_a} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - C_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{C_{\varepsilon 3}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$R_{\alpha\beta} = -\langle v'_\alpha v'_\beta \rangle = -\frac{2}{3} k \delta_{\alpha\beta} + \nu_t S_{\alpha\beta} \dots\dots\dots (5)$$

$$\nu_t = C_\nu f_\nu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad S_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 (\bar{v}, v') は速度のアンサンブル平均部分とそれからのずれ (擾乱部分)、 \bar{p} は圧力、 k は乱流エネルギー、 ε

はエネルギー散逸率、 $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーデルタである。

ここまでの各式を連立させた $k-\varepsilon$ 乱流モデルにより、直円管内旋回乱流 (図 1 の座標) を数値解析した結果を、図 2～図 5 に示す。軸方向流速 \bar{v}_z と円周方向流速 \bar{v}_θ の両方とも、旋回特性を殆ど再現できていないことがわかる。

2.2 直円管内旋回乱流への適用

先の $k-\varepsilon$ モデルによる数値解析も、これから扱う各解析結果の比較・検討も、図 1 に示される旋回乱流を対象としておこなっている。数値解析計算領域入口における旋回の強さは

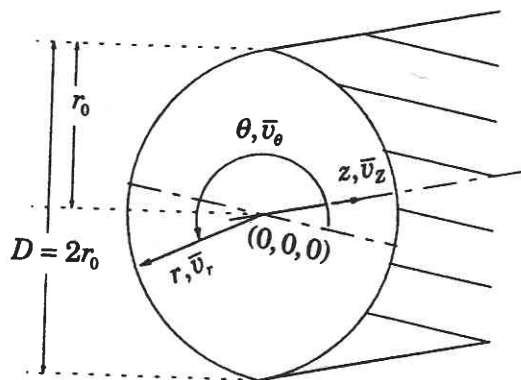


図 1 Cylindrical coordinate system of a pipe flow.

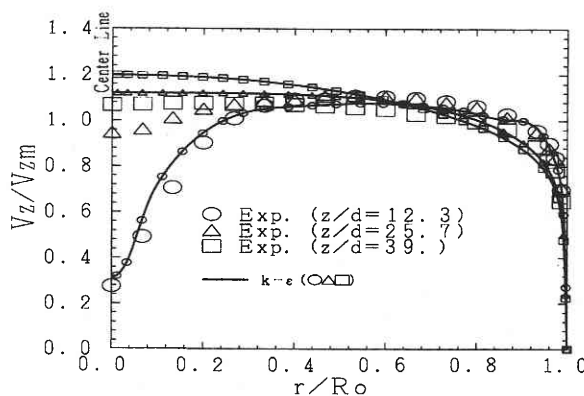


図 2 Mean axial velocity \bar{v}_z of a swirling flow calculated using the $k-\varepsilon$ model.

*東京大学生産技術研究所 情報・システム部門

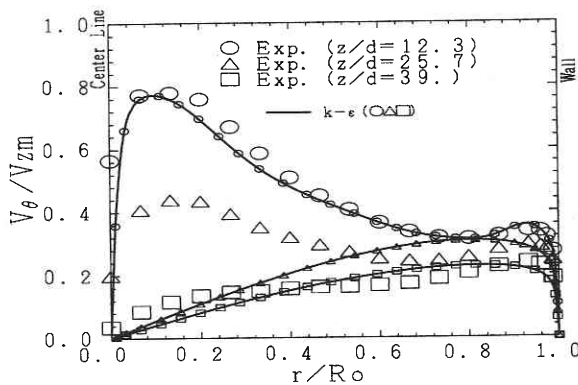


図3 Mean tangential velocity \bar{v}_θ of a swirling flow calculated using the $k-\epsilon$ model.

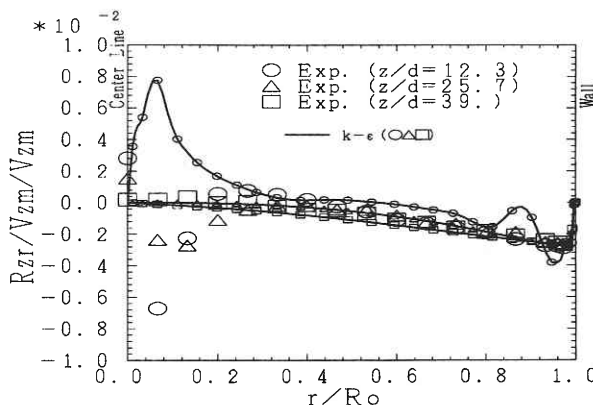


図4 Reynolds stress R_x of a swirling flow calculated using the $k-\epsilon$ model.

$$\Omega_s = 2\pi\rho \int_0^{r_0} \frac{\bar{v}_\theta \bar{v}_\theta r^2}{\rho \pi r_0^3 V_{zm}^2} dr \quad (7)$$

で定義した。ここで、 Ω_s は旋回強さ、 ρ は密度、 V_{zm} は軸方向流速の平均値を表している。ここでは、 $\Omega_s = 0.24$ 、レイノルズ数 $Re = (V_{zm} 2r_0)/\nu = 50,000$ の実験値⁸⁾に合わせた流れを選択した。これは、詳細な実験結果⁸⁾が得られていること、その実験結果に対応して応力モデルによる数値解析も複数試みられていること⁹⁻¹¹⁾などの理由からである。

2.3 レイノルズ応力値 $R_{r\theta}$ の実験結果とのズレ

通常 $k-\epsilon$ モデルによる旋回流の解析結果が、実測された旋回流特性を再現できない原因を調べてみる。図4、図5は、 $k-\epsilon$ モデルにおけるレイノルズ応力 R_x 、 R_θ の振る舞いを示している。解析領域入り口における実測値 (○印) を見比べると、図5の実測値 R_θ は、図4の R_x 値に比べて、 $r/r_0 \approx 0$ 近くで絶対値が小さいことが判る。ところが、流速を実測値に合わせて与えた時の $k-\epsilon$ モデルによる $R_{r\theta}$ の算出値は、管軸付近で大きな負値 ($r/r_0 \approx 0.05$ で $R_{r\theta}$

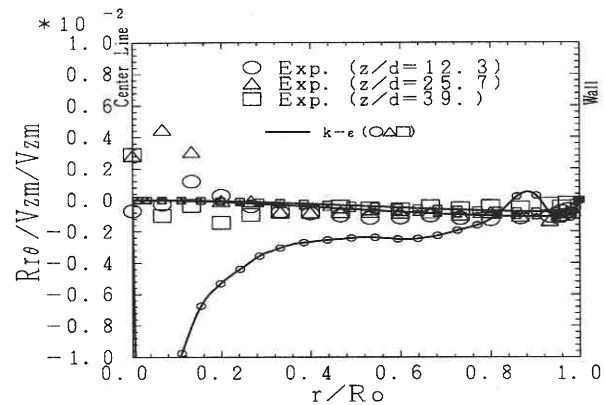


図5 Reynolds stress R_θ of a swirling flow calculated using the $k-\epsilon$ model.

<<0) を示し、実測値と大きなズレが生じている。

円筒座標系 (r, θ, z) で式 (5) の右辺は、

$$R_{r\theta} = v_r S_{r\theta}, \quad S_{r\theta} = r \frac{d}{dr} \left(\frac{\bar{v}_\theta}{r} \right) = \frac{d\bar{v}_\theta}{dr} - \frac{\bar{v}_\theta}{r} \quad (8)$$

となる。 $k-\epsilon$ モデルによる結果は、図3 \bar{v}_θ と式(8)の $d\bar{v}_\theta/dr \approx 0$ 付近、すなわち \bar{v}_θ の極大点付近で、 $R_{r\theta}$ 値が極端な負値をとる。このズレを解消しなければ、このような渦粘性型モデルによる旋回流の数値解析は、定性的に旋回特性を再現できないであろう。

小林・依田¹⁾は、数値実験的に $R_{r\theta}$ 成分に乗ぜられる定数を他成分に比し 1/100 程度に小さくすることにより、旋回流特性の再現が可能であることを示した。この結果も、実測値と大きなズレを生む式(8)の $R_{r\theta}$ 値を抑制してやることで、旋回流の特性を再現できるモデルの出発点であることを示唆している。

3. $k-\epsilon-h3$ 方程式乱流モデルの応用

3.1 ヘリシティ (h) 方程式

横井・吉澤は、ヘリシティを $h = \langle v'_a \omega'_a \rangle$ と定義し、旋回の効果をヘリシティを通して反映させようと考え、 h の発展方程式を次のように提案した^{5,12-14)}：

$$\frac{Dh}{Dt} = R_{ab} \frac{\partial \bar{\omega}_b}{\partial x_a} - \bar{\omega}_a \frac{\partial R_{ab}}{\partial x_b} - C_{h1} f_v \frac{\epsilon}{k} h + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{C_{h2}} \right) \frac{\partial h}{\partial x_a} \right\} \quad (9)$$

$$C_{h1} \approx 3, \quad C_{h2} \approx 1.$$

これを式 (1) ~ (4) と連立させると、 $k-\epsilon-h3$ 方程式モデルとなる。ここで、 $(\bar{\omega}, \omega')$ は渦度の平均部分と擾乱部分を表し、未定定数は外壁が回転する回転円管内旋回流の直接数値解析 (DNS) 結果¹⁵⁾ との比較から最適化した¹⁴⁾。さらに、3 方程式モデルでは、式 (5) のレイノルズ応力の渦粘性表現に次の通りヘリシティと関連した非等項が⁵⁾付加されている^{5,12,13)}。

研 究 速 報

$$R_{ij} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + \nu_i S_{ij} - C_{\mu} \frac{\nu_i^2}{\varepsilon} \left[\varepsilon_{ilm} \Omega_{jm} \frac{\partial h}{\partial x_i} + \varepsilon_{jlm} \Omega_{im} \frac{\partial h}{\partial x_l} \right]_D,$$

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \quad (10)$$

(D は等方成分を除くことを意味する)。この3方程式モデルによる旋回乱流の解析結果は、式(10)の右辺第2項までの渦粘性表現から生じる実測値とのズレを、第3項で補正するように作用することがわかった。特に、レイノルズ応力 R_{ij} 成分の補正によって、管軸中心部分で \bar{v}_z が旋回効果により減速する現象を再現できることが見られた³⁾。しかし、前述した $k-\varepsilon$ モデルにおけるレイノルズ応力 $R_{r\theta}$ の表現 [式(8)] に起因する実測値とのズレの補正には、殆ど有効でないこともわかった³⁾。

3.2 ヘリシティ効果を反映させた乱流特性長さスケール

図5で顕著な、 $R_{r\theta}$ 値実測値と $k-\varepsilon$ 乱流モデル(3.1)の $k-\varepsilon-h$ 3方程式モデルも同様)による算出値の間の差異 ($r/r_0 \approx 0.05$ 付近)を、埋める方法を考える。

乱流特性長さを l とすると、 k 、 ε と l の次元関係は、

$$\frac{k^2}{\varepsilon} S \propto \varepsilon^{1/3} l^{4/3} S, \quad l \propto \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (11)$$

となる。そこで、無次元量 χ を導入して、

$$l \propto \frac{1}{1+\chi} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (12)$$

と乱流特性長さスケールを補正する方法を試みる。いま、

$$\chi = \sqrt{\frac{k^2}{\varepsilon^2} \left[C_s S^2 + (1-C_s) \Omega^2 \left\{ 1 + C_{\chi h} \left(\frac{k^2}{\varepsilon^2} \nabla h \right)^2 \right\} \right]},$$

$$C_{\chi h} = 0.2 \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_{s \text{ inlet}}} \right), \quad S = \sqrt{S_{ab} S_{ab}}, \quad \Omega = \sqrt{\Omega_{ab} \Omega_{ab}} \quad (13)$$

と S 、 Ω 、 h の振る舞いを χ へ反映させて、乱流特性長さスケールを変化させるモデルを考える。ここで、定数 $C_{\chi h}$ の $\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_{s \text{ inlet}}} \right)$ は、 Ω_s が弱くなる(旋回が弱まり流れが円管内乱流へ近づいていく)下流で発生し易い数値不安定を抑えるために付加された¹⁶⁾。

このモデルは、式(1)～(4)と(9)を連立させて解を求めるが、その時、式(6)の渦粘性を次の通り変更して適用した。

$$\nu_{TN} = \nu_i \frac{(1+C_{\nu} C'_v)}{(1+C'_v \chi^2)}, \quad C'_v = 0.0214,$$

$$C_{\nu} = 14.5, \quad C_s = 0.5, \quad C_{\chi h} = 0.2 \quad (14)$$

このモデルによる解析結果を図6～図8に示す。

図6、図7は、管軸方向流速 \bar{v}_z と旋回方向流速 \bar{v}_θ の解析結果を、実測値と比較している。 \bar{v}_z に関しては、管軸領域での減速特性を過度に評価していることがわかる。図7の \bar{v}_θ は、下流域(□印)での過大評価と、中流域(△印)での過小評価の両方が見られる。なお、図中において実測値は○(上流=解析領域入り口)・△・□(解析領域

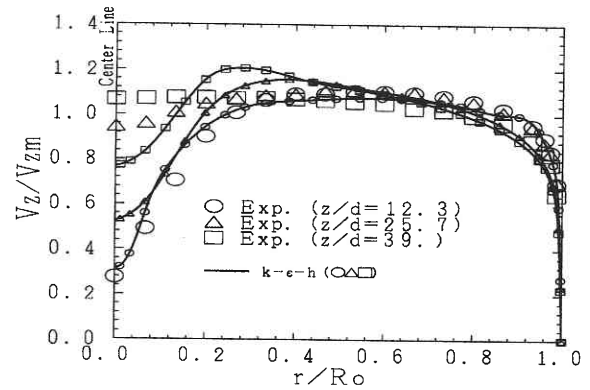


図6 Mean axial velocity \bar{v}_z of a swirling flow calculated using the $k-\varepsilon-h$ model with the effect of variable length scale incorporated.

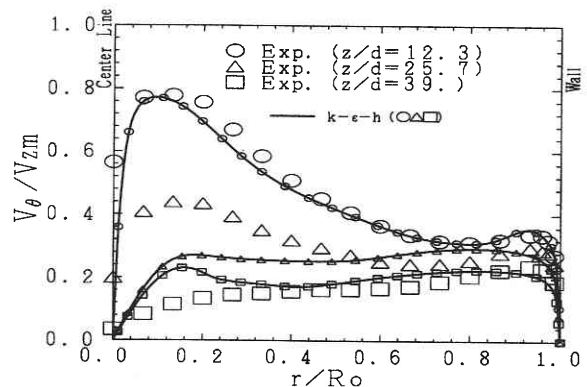


図7 Mean tangential velocity \bar{v}_θ of a swirling flow calculated using the $k-\varepsilon-h$ model with the effect of variable length scale incorporated.

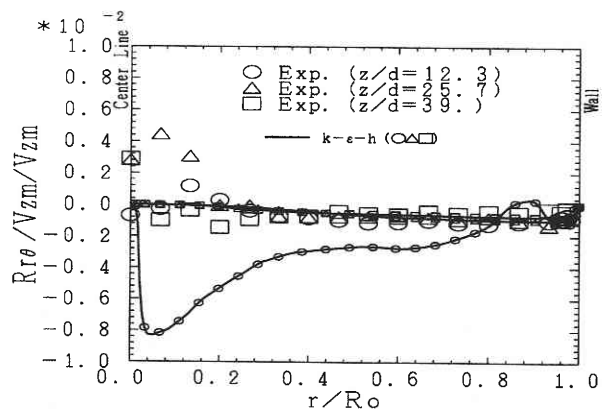


図8 Reynolds stress $R_{r\theta}$ of a swirling flow calculated using the $k-\varepsilon-h$ model with the effect of variable length scale incorporated.

出口) 印で表されている。

このモデルでは、式 (13) の χ の $C_{\chi\Omega h}$ を有値として、 χ 値を通して、図 8 に見られるように v_{TN} [式 (14)]・ $R_{\alpha\beta}$ [式 (5)] 値を抑制する効果を試みている。これによって定性的には旋回乱流特性を再現できることがわかった。さらに、この抑制の効果は、 S や Ω などの特異な挙動を制限する役割を果たし、数値安定性の向上にも寄与していることがわかった。

しかし、本モデルは v_{TN} を通して全レイノルズ応力成分を一様に抑制するものとなっており、小林・依田¹⁾ が数値実験的に検証した $R_{r\theta}$ 成分だけが (旋回乱流の管軸付近で) 他の成分と比較して (非等方的に) ゼロに近くなる (図 4, 図 5 の実験結果からも見てとれる) 現象を、再現することは困難と予想される。

3.3 レイノルズ応力表現の非等方的補正

3.2 で試みたモデルの改良は、レイノルズ応力各成分を等方的に抑制する効果は期待できても、実験結果に現われている符号の正負逆転を含む程の各成分間の強い非等方性を再現することはできない。

この問題点を回避する方法として、例えば、渦粘性表現 [式 (5) あるいは式 (10) 右辺第 2 項] に起因する不適性値を、 $R_{r\theta}$ 成分上において第 3 項で打ち消すような、応力表現が考えられる。 $R_{r\theta}$ [式 (8)] の初項には $S_{r\theta}$ が含まれているので、他の付加項にも $S_{r\theta}$ が含まれている表現ならば、改善の可能性はある。次の表現¹³⁾：

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}k\delta_{\alpha\beta} + v_r S_{\alpha\beta} - C_{\zeta 4} \frac{k^3}{\varepsilon^2} \frac{DS_{\alpha\beta}}{DT} \dots\dots\dots (15)$$

も、比較的簡潔な表現の一つといえる。しかし、この種のレイノルズ応力表現式は、最も旋回の強い解析領域最上流の一断面で $R_{r\theta}$ を適正な予測値に補正・適合させても、他領域において (例えば、式 (15) の右辺第 3 項の) 補正項が悪い方向に働き不安定性を増す危険性も持っている。この点は、他形状の乱流、例えば溝乱流などへの適用時に考慮しなければならない注意点でもある。

現在まで検討した中で、比較的数字安定性の高い表現は、 $f(\nabla k \Delta U)$ 項を付加した次の表現である。

$$R_{r\theta} = v_{TN} S_{r\theta} + C_{ku2} \frac{1}{\varepsilon} v_{TN}^2 \frac{\partial k}{\partial r} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \left(S_{r\theta} + r \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial r^2} \right) \right\} \dots\dots (16)$$

ここで、 $C_{ku2} \approx 15$ とし、さらに (13) の χ 式に付加される新しい $f(\nabla k \Delta U)$ 関連項

$$\chi \approx \dots + C_{ku1} \frac{k^3}{\varepsilon^3} \sqrt{\left\{ \left(\frac{\partial k}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial r} \right) \left(\Delta \bar{v}_z + \Delta \bar{v}_r - \frac{\bar{v}_r}{r} + \Delta \bar{v}_\theta - \frac{\bar{v}_\theta}{r} \right) \right\}^2} \dots\dots (17)$$

の定数を $C_{ku1} \approx 0.4$ とした場合の解析結果を、図 9～図 11 に示す。この解析は、3.2 で論議された乱流長さスケール補正モデルを含めておこなわれたものである。レイノルズ

応力 $R_{r\theta}$ 値の実測結果からのズレが、3.2 の乱流長さスケール補正モデルによる改善に加え、一層是正されることが判り、下流における円周方向流速 \bar{v}_θ の特徴が強調再現されている。

式 (6) の等方的渦粘性を、どのような付加項で是正すべきかの最適な方法は、現時点では断定できない。旋回乱

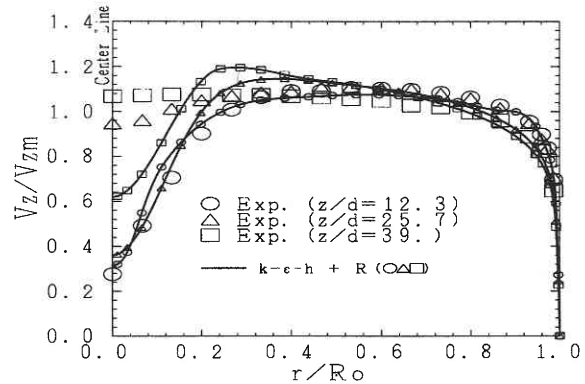


図 9 Mean axial velocity \bar{v}_z of a swirling flow calculated using the $k-\epsilon-h$ model with the effect of variable length scale incorporated (the new term is added into Reynolds-stress expression).

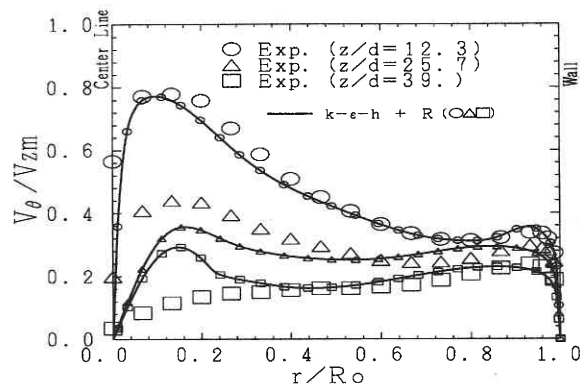


図 10 Mean tangential velocity \bar{v}_θ of a swirling flow calculated using the $k-\epsilon-h$ model with the effect of variable length scale incorporated (the new term is added into Reynolds-stress expression).

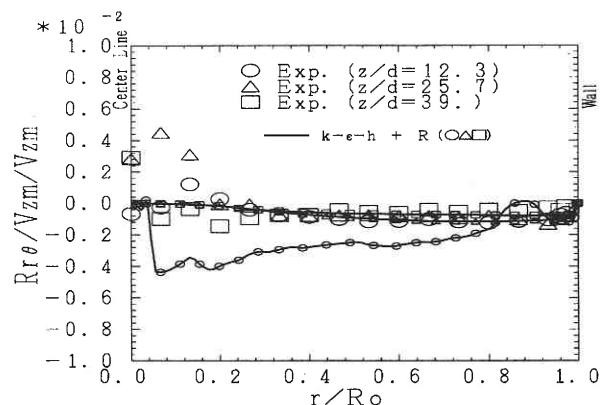


図 11 Reynolds stress $R_{r\theta}$ of a swirling flow calculated using the $k-\epsilon-h$ model with the effect of variable length scale incorporated (the new term is added into Reynolds-stress expression).

研 究 速 報

流の強い非等方性を再現可能な、レイノルズ応力表現モデルの検討は興味ある課題である。

4. 結 論

直円管内旋回流の数値解析において、 $k-\varepsilon$ モデルは旋回特性を再現出来ない。その原因を検討した。渦粘性の等方表現はレイノルズ応力各成分の強い非等方性を表せないこと、特に $R_{\theta\theta}$ 算出値の実測結果からの大きなズレがその主原因であることがわかった。

渦粘性型モデルによる旋回流解析時に、モデルで算出される応力値が実測結果と大きく異なる欠点を是正するために、横井・吉澤により提案されたヘリシテイ(h)式を含む3方程式乱流モデル⁵⁾を応用し、さらに乱流特性長さスケールを補正する方法を試みた。

このモデルは、 $k-\varepsilon$ 型モデルに起因するレイノルズ応力(特に $R_{\theta\theta}$ 成分)の実測値との極端な差異を、渦粘性を抑制してやることで改善するものとなっており、定性的には旋回流特性を再現できることがわかった。

しかし、この乱流特性長さスケールを補正するモデルは、渦粘性 ν_{TN} を通して全レイノルズ応力成分を一様に抑制するものとなっており、小林・依田¹⁾が数値実験で検証した $R_{\theta\theta}$ 成分だけを非等方的に補正する効果を再現することは困難である。

そこで、レイノルズ応力 $R_{\theta\theta}$ 成分を直接補正して、強い非等方性を表現できるモデルの検討もおこなった。旋回流解析時に $R_{\theta\theta}$ 成分の $S_{\theta\theta}$ [式(8)] から生成される不適性値を、新しい付加項で打ち消すレイノルズ表現式の検討を

進めた。どのような付加項が最適であるかの結論を得るまでにはいたっていないが、このような方法で得られる非等方性が、特に円周方向流速の再現に有効であることがわかった。最適な付加項を吟味・検証し、改めて直円管内旋回流の解析へ適用することは、興味深い課題であろう。

(2003年11月13日受理)

参 照 文 献

- 1) 小林・依田, 機論, B 52-481 (1986) 3230.
- 2) 河村・三島, 機論, B 57-536 (1991) 1251.
- 3) 西島・横井, 機論, B 58-553 (1992) 2714.
- 4) 西島, 生産研究, 51-1 (1999) 21.
- 5) Yokoi, N. and Yoshizawa, A., Phys. Fluids, A (1993), Vol. 5, pp. 464.
- 6) 安倍・長野・近藤, 機論, B 58-554 (1992) 3003.
- 7) 西島, 生産研究, 50-1 (1998) 15.
- 8) Kitoh, O., J. Fluid Mech. (1991), Vol. 225, pp. 445.
- 9) 清水・吉田, 第29回伝熱シンポ (1992), A 234, pp. 385.
- 10) 鷺津・島・岡本, 第12回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (1998) 185.
- 11) 大瀧元啓, 応力方程式モデルによる円管内旋回流の数値予測, 修士論文 (静岡大学), (2001) 1.
- 12) Yoshizawa, A., Yokoi, N., Nisizima, S., Itoh, S.-I., and Itoh, K., Phys. Fluids (2001), Vol. 13, pp. 2309.
- 13) Yoshizawa, A., Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows: Modelling and Statistical Theory (Kluwer, 1998).
- 14) 西島・吉澤・横井, 生産研究, 54-1 (2002) 46.
- 15) Orlandi, P., Center for Turbulence Research Annual Research Briefs 1995, pp. 195.
- 16) 西島・吉澤・横井, 生産研究, 55-1 (2003) 37.