研 究 速 報

Rayleigh-Bénard対流にRANSを適用する試み

An Attempt to Apply RANS to Rayleigh-Bénard Convection

小 山 省 司*
Shoji KOYAMA

1. は じ め に

Rayleigh-Bénard対流をRANS (Reynolds-averaged numerical simulation) で再現する研究をしている．Rayleigh-Bénard対流のように浮力だけで駆動される熱対流乱流をRANS (特に一点完結モデル) で再現するという研究はほとんど存在しない．これは従来の非等温場における標準K–εモデルでは浮力場の特性を正確に表すことができないことに起因する．

標準的なテキスト[1,2]によると，平均速度場U_iと平均温度場Θの支配方程式は

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \left\langle u_i' u_j'\right\rangle\right) - \beta g_i \Theta, \quad \cdots\cdots (1.1)$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\kappa\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - \left\langle u_i' \theta'\right\rangle\right), \quad \cdots\cdots (1.2)$$

ここで$D/Dt = \partial/\partial t + U_i \partial/\partial x_i$はLagrange微分，$P$は平均圧力場，$u_i'$は速度ゆらぎ，$\theta'$は温度ゆらぎ，$\nu$は動粘性係数，$\kappa$は熱拡散率，$\beta$は熱膨張率，そして$g_i$は重力加速度ベクトルである．また，ここで出現する未知量$-\left\langle u_i' u_j'\right\rangle$と$-\left\langle u_i' \theta'\right\rangle$はそれぞれReynolds応力と熱フラックスで，Reynoldsの類推により次のようにモデル化される場合が一般的である．

$$-\left\langle u_i' u_j'\right\rangle = \nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}K\delta_{ij}, \quad \cdots\cdots (1.3)$$

$$-\left\langle u_i' \theta'\right\rangle = \kappa_t \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}, \quad \cdots\cdots (1.4)$$

$$\nu_t = C_\nu \frac{K^2}{\varepsilon}, \qquad \kappa_t = \frac{\nu_t}{\sigma_\theta}, \quad \cdots\cdots (1.5)$$

$$K = \frac{1}{2}\left\langle u_i' u_i'\right\rangle, \qquad \varepsilon = \nu\left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right\rangle \cdots\cdots (1.6)$$

ν_tとκ_tはそれぞれ渦動粘性係数と渦熱拡散係数で，それらから出現する各係数C_νとσ_θの値は一般的に0.09および0.9とされている．またKは乱流エネルギー，そしてεはその散逸率をそれぞれ表す．

Rayleigh-Bénard対流を代表とする浮力により駆動される熱対流乱流では，式 (1.4) による熱フラックスのモデル化が正確に実現象を記述できるとは限らない．特に流体が下壁で温められ，上壁で冷やされるRayleigh-Bénard対流においては，中心付近における熱フラックスの鉛直成分は正値を示すが，平均温度の鉛直勾配がほとんどゼロになるため式 (1.4) のモデル化では不十分なことが指摘されている[3]．

上述した問題は，熱フラックスのモデル化として浮力による項を考慮すれば改善する可能性がある．そもそも熱対流乱流では，浮力が乱流の駆動力であるため，それが場を支配する最大の要因になっていると考えられる．これまでにReynolds応力と熱フラックスに対し，浮力の効果を取り入れたモデル化はLaunder[4]やMellor and Yamada[5]等が導出している．特にLaunder[4]のWETモデルはReynolds応力や熱フラックスの生産項として浮力項が自然と導入されるのでそのモデル化は分かりやすい．そこで本研究では，浮力の効果を考慮したモデル化の手法として，乱流の統計理論の一つであるTSDIA[6,7] (two-scale direct interaction approximation) を用いて導出された乱流モデルを利用してRayleigh-Bénard対流における現象の再現を試みた．特に熱フラックス，そして乱流エネルギーと温度分散それぞれの乱流拡散項に対し浮力項を考慮することで従来認識されていた問題を改善して現象を正確に記述できる結果を示した．

また本報告書の以降の構成は以下の通りになっている．第2節では問題の定式化としてRayleigh-Bénard対流のRANSの設定とその計算例を解説し，第3節ではRANSの結果を示して修正したモデルの評価を行い，そして最後に第4節で今回のまとめを行う．

2. RANSモデル方程式

Rayleigh-Bénard対流の計算領域はx軸とy軸を水平軸

*東京大学生産技術研究所　情報・システム部門 (半場研究室)

研 究 速 報

に，そしてz軸を鉛直上向き（$g_i = -g\delta_{i3}$）としてその定義域を$0 \le z \le 1$とする．またアンサンブル平均$\langle \cdot \rangle$はxy面平均と解釈し，RANSとしては非一様な鉛直方向の一次元計算を実行する．但しRayleigh-Bénard対流の乱流場では，$U_i = 0$であるため，式（1.1）の発展方程式は必要としない．また，ここで適用するRANSモデル方程式は高Reynolds数モデルで，熱フラックスについては

$$-\langle u'_z\theta' \rangle = \kappa_t \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \kappa_g \beta g, \quad (2.1)$$

$$\kappa_t = C_\kappa \frac{K^2}{\varepsilon}, \qquad \kappa_g = C_g \frac{K_\theta^2}{\varepsilon_\theta}, \qquad C_\kappa = 0.134, \qquad C_g = 0.320, \quad (2.2)$$

$$K_\theta = \langle \theta'\theta' \rangle, \qquad \varepsilon_\theta = 2\kappa \left\langle \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}\frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle, \quad (2.3)$$

とする．ここでK_θは温度分散，そしてε_θは温度散逸率をそれぞれ表す．さらに平均温度，乱流エネルギー，散逸率，そして温度分散の各発展方程式は

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\langle u'_z\theta' \rangle, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial T_{Kz}}{\partial z} - \varepsilon + \beta g \langle u'_z\theta' \rangle, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{K}\left(C_{\varepsilon1}\beta g \langle u'_z\theta' \rangle - C_{\varepsilon2}\varepsilon \right) + \frac{\partial T_{\varepsilon z}}{\partial z}, \qquad C_{\varepsilon1} = 1.44, \qquad C_{\varepsilon2} = 1.92, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial K_\theta}{\partial t} = -2\langle u'_z\theta' \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} - \varepsilon_\theta, \quad (2.7)$$

とする．但し本研究では温度散逸率ε_θの値をDNSデータ（Prandtl数が1とRayleigh数が2.53×10^6）として与えた．また式（2.5）と式（2.7）で現れる3体相関項のモデル化と式（2.6）における散逸率の乱流拡散項のそれは次のように求めた．

$$T_{Kz} = -\left\langle \left(\frac{1}{2}u'_iu'_i + p' \right) u'_z \right\rangle = \frac{K^2}{\varepsilon}\left[\left\{ C_{k1} + C_{k2}\beta g \beta g \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^2 \frac{K_\theta}{K} \right\} \frac{\partial K}{\partial z} - C_{k3}\beta g \beta g \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^2 \frac{\partial K_\theta}{\partial z} \right],$$
$$C_{k1} = 0.152, \quad C_{k2} = 0.1, \quad C_{k3} = 0.0275, \quad (2.8)$$

$$T_{\varepsilon z} = \frac{K^2}{\varepsilon}\left[\left\{ C_{\varepsilon3} + C_{\varepsilon4}\beta g \beta g \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^2 \frac{K_\theta}{K} \right\} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - C_{\varepsilon5}\beta g \beta g \left(\frac{K}{\varepsilon}\right) \frac{\partial K_\theta}{\partial z} \right],$$
$$C_{\varepsilon3} = 0.0946, \quad C_{\varepsilon4} = 0.1, \quad C_{\varepsilon5} = 0.0158, \quad (2.9)$$

$$T_{\theta z} = -\langle u'_z\theta'\theta' \rangle = \frac{K^2}{\varepsilon}\left[\left\{ C_{\theta1} + C_{\theta2}\beta g \beta g \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^2 \frac{K_\theta}{K} \right\} \frac{\partial K_\theta}{\partial z} - C_{\theta3}\frac{K_\theta}{\varepsilon_\theta}\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z} \right],$$
$$C_{\theta1} = 0.117, \quad C_{\theta2} = 0.055, \quad C_{\theta3} = 0.0462, \quad (2.10)$$

ここで仮に$\beta g = 0$とすれば，通常の勾配拡散型モデルに帰着することが分かる．TSDIAによりパッシブスカラーにおける3体相関項のモデル化はShimomura[8]により導出されているが，アクティブスカラーにおけるそれは求められていないため，本研究において予想した．但し今回は完全な理論計算が実行されていないため，係数C_{k2}，C_{k3}，$C_{\varepsilon4}$，$C_{\varepsilon5}$，そして$C_{\theta2}$は計算結果から調節した．

計算領域は$0 \le z \le 1$で，格子分布はDNSのそれと同じにとり，格子数は96である．時間間隔は5×10^{-5}で，時間進行は乱流が定常状態に達するまで実行している．但し今回は高Reynolds数モデルの計算であるため，分子粘性の効果が大きい壁近傍の領域を除外した中心領域だけに着目する．つまり実際の計算範囲は$z_0 \le z \le z_1$で，鉛直方向の下限値であるz_0とその上限値であるz_1が境界であるみなしてその領域を解いている．ここで境界条件の値は，平均温度，乱流エネルギー，散逸率，そして温度分散いずれもDNSデータを与えている．なお，本研究の数値計算スキームは，方程式中の全ての空間微分項に対し有限差分法を，時間積分に対しAdams-Bashforth法をそれぞれ2次精度で適用した．

3. 計 算 結 果

3.1 熱フラックスのモデル化の評価

式（2.1）の右辺で表せる熱フラックスのモデル化は，各物理量の生産項と関係があるため重要である．そこで式（2.1）の右辺にDNSデータを与えて，それがどの程度再

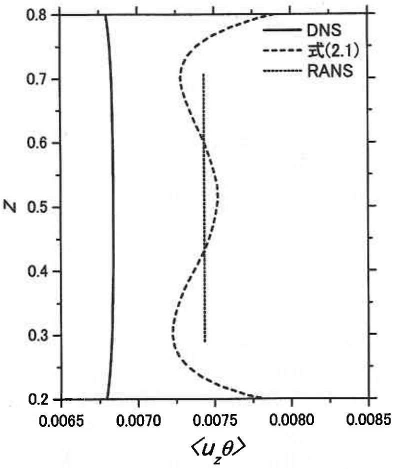

図1　熱フラックスの鉛直分布図

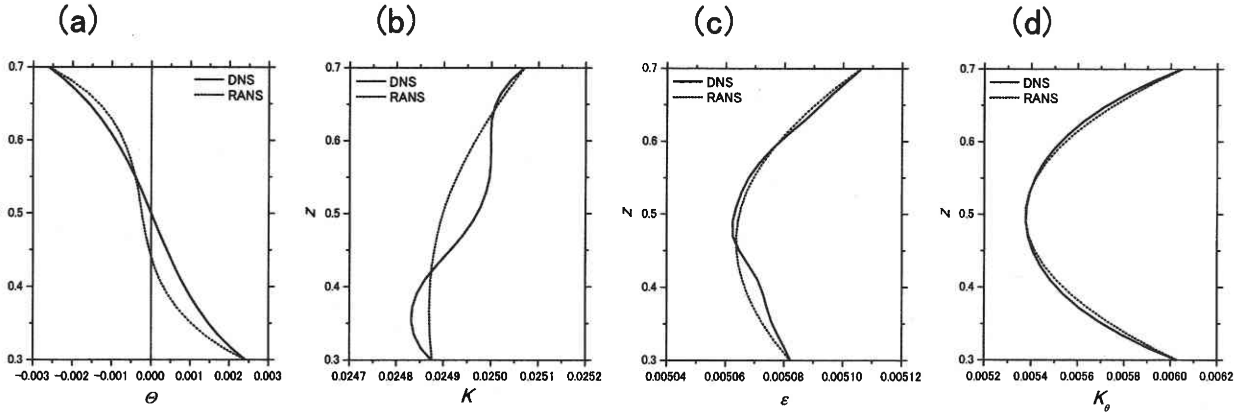

図2　(a) 平均温度, (b) 乱流エネルギー, (c) 散逸率, そして (d) 温度拡散の鉛直分布図

現性があるのか評価した．図1に熱フラックスの鉛直分布図を示す．その結果，DNSの値よりモデルのそれの方が大きいことが分かる．このことは，今回採用したDNSデータが十分発達した乱流場でない可能性があり，若干分子粘性の効果が影響しているものと思われる．つまり式 (2.1) のモデルに対して，例えば減衰関数のような低Reynolds数効果を考慮したモデルに修正することにより結果は改善するものと思われる．また $z = 0.2$ と0.8付近において，モデルの値が急激に増加することは平均温度勾配が増加するためであり，この領域ではまだ壁の影響が残っていると考えられる．従って以下の3方程式モデルの計算範囲は $0.3 \leq z \leq 0.7$ とした．

3.2　$K - \varepsilon - K_\theta$ 3方程式モデル

ここでは，式 (2.4) から式 (2.7) における各平均量の発展方程式を用いた K–ε–K_θ 3方程式モデルの解を求めた．図1に熱フラックスの鉛直分布図を示す．RANSモデルにおける定常状態の熱フラックスの値は，式 (2.4) から鉛直方向に依らない一定の値となり，式 (2.1) の右辺のモデルと比べて中心では小さく両端では大きくなることで全体的におよそ中間的な値を示している．図2に (a) 平均温度，(b) 乱流エネルギー，(c) 散逸率，そして (d) 温度分散の鉛直分布図をそれぞれ示す．RANSモデルにおける平均温度の解は，乱流エネルギーと散逸率の上下非対称な分布の影響を受けてDNSデータから若干ずれた結果となる．そして乱流エネルギーと散逸率の解は，DNSデータの細かい振る舞いまでは再現できなかったが，定性的にはそれと同様な分布を示している．また温度分散の解は，定性的にも定量的にもDNSデータとほぼ同じ値を得ることができた．

本研究において乱流エネルギー，散逸率，そして温度分散の値を上記ほど正確に再現することができたのは，各乱流拡散項のモデル化における浮力項の効力のためである．特に乱流エネルギーと散逸率に関しては，勾配拡散項だけでは定性的に一致した分布を得ることができないため，熱対流乱流において浮力項は不可欠であることが分かる．

4. ま　と　め

本研究では，Rayleigh-Bénard対流をRANSで再現することを試みた．特に熱フラックスと乱流拡散項に対し，TSDIAから予想される浮力に起因するモデル項を考慮した．その結果，従来の勾配拡散モデルの結果と比較して良好な結果を得ることができた．特に乱流エネルギーの拡散項に対するモデル化は，従来の欠点を改善して実現象を正確に表現できる可能性を示した．

また次回の課題として，TSDIAにおける理論計算を完全に実行し，それから予想されるモデル係数を導出したい．また低Reynolds数の効果を考慮したRANSモデル方程式を構築し，更に現象の正確な再現性を追及していきたい．

（2003年11月10日受理）

参　照　文　献

1）大宮司久明，三宅裕，吉澤徴 編，乱流の数値流体力学：モデルと計算法（東京大学出版会，1998）．
2）村上周三，CFDによる建築・都市の環境設計工学（東京大学出版会，2000）．
3）K. Hanjalić, Annu. Rev. Fluid Mech. 34, 321–347 (2002).
4）B. E. Launder, J. Heat Transfer, 110, 1112–1128 (1988).
5）G. L. Mellor and T. Yamada, J. Atmos. Sci. 31, 1791–1806 (1974).
6）A. Yoshizawa, Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows (Kluwer Academic Publishers, 1998).
7）M. Okamoto, J. Phys. Soc. Jpn. 65, 2044–2059 (1996).
8）Y. Shimomura, Phys. Fluids, 10 (10), 2636–2646 (1998).