研究速報

乱流残留エネルギー方程式のモデリング

Modeling of the turbulent MHD residual energy equation

横井喜充*
Nobumitsu YOKOI

1. はじめに

電磁場についてのマックスウェル方程式と流体力学の方程式を組み合わせた方程式系である電磁流体方程式（Magnetohydrodynamics：MHD）は系の保存量として，電磁流体エネルギー（total MHD energy）$\int_V (\mathbf{u}^2+\mathbf{b}^2)/2dV$，クロス・ヘリシティ（cross helicity）$\int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{b}dV$，磁気ヘリシティ（magnetic helicity）$\int_V \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}dV$の三つをもつ（$\mathbf{u}$：速度，$\mathbf{b}$：磁場，$\mathbf{a}$：ベクトル・ポテンシャル，$V$：考察する流体の体積，また磁場などはアルベーン単位で表記）[1]．エネルギーについて，運動エネルギーや磁場エネルギー単独ではなく，両者を合わせた電磁流体エネルギーが保存量である．このことからもわかるように，運動エネルギー（密度）$\mathbf{u}^2/2$と磁場エネルギー（密度）$\mathbf{b}^2/2$が単独で扱われることは稀である．これに対応して，乱流のエネルギーも乱流電磁流体エネルギー（turbulent MHD energy）K：

$$K=\langle \mathbf{u}'^2+\mathbf{b}'^2\rangle/2 \quad\cdots(1)$$

（$\mathbf{u}'$：ゆらぎ速度，$\mathbf{b}'$：ゆらぎ磁場）として取り扱い，MHD乱流モデルが構築されてきた[2]．

乱れのエネルギーについては，しばしばエネルギーの等分配が成り立ち，乱流運動エネルギー$\langle \mathbf{u}'^2\rangle/2$と乱流磁場エネルギー$\langle \mathbf{b}'^2\rangle/2$が等しくなる[3]．しかし一方で，両エネルギーの間に大きな差が生じ，その差の時間・空間発展が問題とされる場合もある．第4節で扱う太陽風乱流はその典型例である[4]．このエネルギー間の差を

$$K_{\rm R}=\langle \mathbf{u}'^2-\mathbf{b}'^2\rangle/2 \quad\cdots(2)$$

で定義し，乱流電磁流体残留エネルギー（turbulent MHD residual energy）あるいは単に（乱流）残留エネルギーと呼ぶ．文字通り，運動エネルギーから磁場エネルギーを差し引き，残ったものを指している．

乱れた媒質中で大規模な磁場構造が生成・維持される機構は乱流ダイナモと呼ばれ，広く研究されている．乱流ダイナモではしばしば，アルファ効果（α effect）と呼ばれる乱流場のヘリシティ（ねじれ度）と関連した効果が決定的な役割を果たしている[5]．アルファ効果を決めるのは運動ヘリシティ$\langle \mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'\rangle$［$\boldsymbol{\omega}'(=\nabla\times\mathbf{u}')$：ゆらぎ渦度］そのものではなく$\langle \mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'\rangle$と電流ヘリシティ$\langle \mathbf{b}'\cdot\mathbf{j}'\rangle$［$\mathbf{j}'(=\nabla\times\mathbf{b}')$：電流密度］の差，すなわち乱流残留ヘリシティ$H$：

$$H=-\langle \mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'-\mathbf{b}'\cdot\mathbf{j}'\rangle \quad\cdots(3)$$

であることがわかってきた[6]．残留ヘリシティが大きくなるひとつの因子は，運動エネルギーと磁場エネルギーの間に差がある場合である：

$$\langle \mathbf{u}'^2\rangle/2\text{と}\langle \mathbf{b}'^2\rangle/2\text{の差} \;\rightarrow\; \langle \mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'\rangle\text{と}\langle \mathbf{b}'\cdot\mathbf{j}'\rangle\text{の差}. \quad\cdots(4)$$

実際，残留ヘリシティHの方程式は

$$\frac{DH}{Dt}=C_{\rm HR}\frac{K}{\varepsilon}K_{\rm R}\left(M^{ab}\frac{\partial J^b}{\partial x^a}-S^{ab}\frac{\partial \Omega^b}{\partial x^a}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial R^{ab}}{\partial x^a}\Omega^b -C_{\rm HB}\frac{\varepsilon^2}{K^3}\mathbf{E}_{\rm M}\cdot\mathbf{B}-C_{\rm H}\frac{K}{\varepsilon}H +\nabla\cdot\left[-\frac{1}{2}(K+K_{\rm R})\boldsymbol{\Omega}+\frac{\nu_{\rm K}}{\sigma_{\rm H}}\nabla H\right] \quad\cdots(5)$$

の形で書かれる[2]．右辺第1項は残留エネルギーの存在（$K_R\neq 0$）で残留ヘリシティHが生成されうることを示している．また，右辺第5項で表される拡散項の最初の部分は，回転$\Omega_{\rm F}$の強い系では

$$P_\Omega=-(\boldsymbol{\Omega}_{\rm F}\cdot\nabla)(K+K_{\rm R}) \quad\cdots(6)$$

という形で書き表すことができる．これは系の回転によるHの生成とみなすこともできる．(6)式は回転球殻など回転系のダイナモで，ヘリシティ生成を担う主要項になることが予想される．(6)式で表される回転によるヘリシティ生成が，MHDエネルギーKそのものではなく，残留エネルギーによる補正も含めた$K+K_{\rm R}(=\langle \mathbf{u}'^2\rangle)$に依存している点が注目される．このことは，回転球殻ダイナモにおけるヘリシティ生成，およびその結果としての磁場生成の評価に残留エネルギーが重要な役割を果たすことを示唆している．

以上のような残留ヘリシティの重要性に鑑み，本研究で

*東京大学生産技術研究所　情報・システム部門

は残留エネルギーを支配する方程式を考察する．以下に見るように，この方程式は乱れ場の二次の相関をその表現に含む．統計理論的手法を用いてこれらの相関量を表現し，その結果から残留エネルギー方程式について閉じたモデルを構築することを目指す．

2. 統計理論による解析とその結果

2.1 基礎方程式

角速度$\mathbf{\Omega}_{\mathrm{F}}$で回転する系で，非圧縮性の電磁流体を支配する方程式は，$\mathbf{u}$を速度，$\mathbf{b}$を磁場として，

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}-(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{b}=-\nabla p_{\mathrm{M}}-2\mathbf{\Omega}_{\mathrm{F}}\times\mathbf{u}+\nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad\cdots\cdots(7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{u}=\lambda\nabla^2\mathbf{b}, \quad\cdots\cdots(8)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\nabla\cdot\mathbf{b}=0 \quad\cdots\cdots(9)$$

となる．ここでp_{M}は電磁流体の圧力，νは粘性率，λは磁気拡散率である．Elsässer変数：

$$\boldsymbol{\phi}=\mathbf{u}+\mathbf{b},\ \boldsymbol{\psi}=\mathbf{u}-\mathbf{b} \quad\cdots\cdots(10)$$

を用いて(7)-(9)式を書き換え，さらに，νとλの差がその和に比べて無視しうるとすると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t}+(\boldsymbol{\psi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\phi}=-\nabla p_{\mathrm{M}}-\mathbf{\Omega}_{\mathrm{F}}\times(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\psi})+\frac{\nu+\lambda}{2}\nabla^2\boldsymbol{\phi} \quad\cdots\cdots(11)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}+(\boldsymbol{\phi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\psi}=-\nabla p_{\mathrm{M}}-\mathbf{\Omega}_{\mathrm{F}}\times(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\psi})+\frac{\nu+\lambda}{2}\nabla^2\boldsymbol{\psi} \quad\cdots\cdots(12)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}=\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0 \quad\cdots\cdots(13)$$

となる．(11)式と(12)式，および(13)式を見ると，$\boldsymbol{\phi}\leftrightarrow\boldsymbol{\psi}$の置換で方程式系が不変であることがわかる．以下ではこのことを利用して統計計算を行なう．

2.2 平均とゆらぎ

速度$\mathbf{u}$や磁場$\mathbf{b}$あるいは$\boldsymbol{\phi}$，$\boldsymbol{\psi}$といった場の量を平均とそこからのゆらぎ部分に分ける：

$$f=F+f',\quad F=\langle f\rangle \quad\cdots\cdots(14)$$

ただし

$$f=(\mathbf{u},\mathbf{b},p_{\mathrm{M}},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}), \quad\cdots\cdots(15\,\mathrm{a})$$

$$F=(\mathbf{U},\mathbf{B},P_{\mathrm{M}},\mathbf{\Phi},\mathbf{\Psi}), \quad\cdots\cdots(15\,\mathrm{b})$$

$$f'=(\mathbf{u}',\mathbf{b}',p'_{\mathrm{M}},\boldsymbol{\phi}',\boldsymbol{\psi}') \quad\cdots\cdots(15\,\mathrm{c})$$

である．(14)式を(7)-(9)式あるいは(11)-(13)式に代入し，平均場の式とゆらぎ場の式を導く．

2.3 乱流残留エネルギーの方程式

(7)，(8)式と(14)式のレイノルズ分解から，乱流残留エネルギーK_{R}の方程式が

$$\begin{aligned}\frac{DK_{\mathrm{R}}}{Dt}&\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\right)K_{\mathrm{R}}\\&=-R_{\mathrm{T}}^{ab}\frac{\partial U^a}{\partial x^b}+W_{\mathrm{T}}^{ab}\frac{\partial B^a}{\partial x^b}-\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{B}\\&\quad-\nu\left\langle\frac{\partial u'^a}{\partial x^b}\frac{\partial u'^a}{\partial x^b}\right\rangle+\lambda\left\langle\frac{\partial b'^a}{\partial x^b}\frac{\partial b'^a}{\partial x^b}\right\rangle-\frac{\partial}{\partial x^a}\langle u'^a p'_{\mathrm{M}}\rangle\\&\quad-\frac{\partial}{\partial x^b}\left\langle u'^b\frac{1}{2}\left(u'^{a2}-b'^{a2}\right)\right\rangle+\frac{\partial^2}{\partial x^b\partial x^b}\left(\nu\frac{1}{2}\langle u'^{a2}\rangle-\lambda\frac{1}{2}\langle b'^{a2}\rangle\right)\\&\quad+\left\langle b'^b\left(u'^a\frac{\partial b'^a}{\partial x^b}-b'^a\frac{\partial u'^a}{\partial x^b}\right)\right\rangle\end{aligned} \quad\cdot(16)$$

となることがわかる．ここで，電磁自己相関$R_{\mathrm{T}}^{\alpha\beta}$，電磁クロス相関$W_{\mathrm{T}}^{\alpha\beta}$，およびクロス捩れベクトル$\mathbf{\Gamma}$は

$$R_{\mathrm{T}}^{\alpha\beta}\equiv\langle u'^\alpha u'^\beta+b'^\alpha b'^\beta\rangle, \quad\cdots\cdots(17)$$

$$W_{\mathrm{T}}^{\alpha\beta}\equiv\langle u'^\alpha b'^\beta+u'^\beta b'^\alpha\rangle, \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\Gamma^\alpha\equiv\left\langle b'^a\frac{\partial u'^a}{\partial x^\alpha}-u'^a\frac{\partial b'^a}{\partial x^\alpha}\right\rangle \quad\cdots\cdots(19)$$

で定義されている．

2.4 統計理論による解析

非一様な乱流場に適用可能な統計理論である二スケール直接相互作用近似（Two-Scale Direct-Interaction Approximation: TSDIA）の方法を用いて，(17)-(19)式の相関関数の表現を求める．

A 二スケールの導入

スケール・パラメータδを用いて変数$\mathbf{x}$とtを

$$\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x},\ \mathbf{X}=\delta\mathbf{x};\ \tau=t,\ T=\delta t \quad\cdots\cdots(20)$$

のように，ゆっくり変化する遅い変数$(\mathbf{X},T)$と細かな変動を記述するのに適した速い変数$(\boldsymbol{\xi},\tau)$とに分ける．これらの変数を用いると，空間微分と時間微分は，それぞれ

$$\nabla=\nabla_{\xi}+\delta\nabla_{\mathbf{X}},\quad\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau}+\delta\frac{\partial}{\partial T} \quad\cdots\cdots(21)$$

と表現される．

B フーリエ表現

速い変数$\boldsymbol{\xi}$についてフーリエ変換を行い，波数空間で方程式を表現する．すると，例えば$\boldsymbol{\phi}'(\mathbf{k},\mathbf{X};\tau,T)$を支配する方程式は

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\phi'^\alpha(\mathbf{k};\tau)}{\partial t}+\nu k^2\phi'^\alpha(\mathbf{k};\tau)-ik^\alpha p'_{\mathrm{M}}(\mathbf{k};\tau)\\&\qquad-ik^b\iint\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,\psi'^b(\mathbf{p};\tau)\phi'^\alpha(\mathbf{q};\tau)\\&=i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})\phi'^\alpha(\mathbf{k};\tau)-\varepsilon^{\alpha ab}\Omega_{\mathrm{F}}^a\left(\phi'^b(\mathbf{k};\tau)+\psi'^b(\mathbf{k};\tau)\right)\\&\quad+\delta\left(-\psi'^a(\mathbf{k};\tau)\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial X^a}-\frac{D\phi'(\mathbf{k};\tau)}{DT_{\mathrm{I}}}+B^a\frac{\partial\phi'^\alpha(\mathbf{k};\tau)}{\partial X_{\mathrm{I}}^a}-\frac{\partial p'_{\mathrm{M}}(\mathbf{k};\tau)}{\partial X_{\mathrm{I}}^\alpha}\right.\\&\quad\left.-\frac{\partial}{\partial X_{\mathrm{I}}^a}\iint\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,\psi'^a(\mathbf{p};\tau)\phi'^\alpha(\mathbf{q};\tau)\right),\end{aligned} \quad\cdot(22)$$

$$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\phi}'_{\mathrm{S}}(\mathbf{k};\tau)=0 \quad\cdots(23)$$

となる．ただし，

$$\boldsymbol{\phi}'(\mathbf{k};\tau)=\boldsymbol{\phi}'_{\mathrm{S}}(\mathbf{k};\tau)+\delta\left(-i\frac{\mathbf{k}}{k^2}\frac{\partial\phi'^{\alpha}(\mathbf{k};t)}{\partial X_{\mathrm{I}}^{\alpha}}\right), \quad\cdots(24)$$

また，波数空間の積分中の$\delta(\cdot)$はデルタ函数である．

***C*　スケール・パラメータによる展開**

場の量$\boldsymbol{\vartheta}=(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi})$をスケール・パラメータ$\delta$で展開する．

$$\boldsymbol{\vartheta}'=\boldsymbol{\vartheta}'_0+\delta\boldsymbol{\vartheta}'_1+\delta^2\boldsymbol{\vartheta}'_2+\cdots. \quad\cdots(25)$$

$\boldsymbol{\vartheta}_0$は平均場を含まない場である．さらに，外場すなわち平均磁場$\mathbf{B}$と回転$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{F}}$についての展開を行なう：

$$\boldsymbol{\vartheta}'=\boldsymbol{\vartheta}'_{\mathrm{B}}+\boldsymbol{\vartheta}'_{01}+\boldsymbol{\vartheta}'_{02}+\cdots+\boldsymbol{\vartheta}'_1+\boldsymbol{\vartheta}'_2+\cdots, \quad\cdots(26)$$

ここで，$\boldsymbol{\vartheta}_{\mathrm{B}}$は基本場であり，一様等方な乱流場に対応する．その結果，基本場を支配する方程式は，例えば$\boldsymbol{\phi}'_{\mathrm{B}}$について

$$\frac{\partial\phi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}(\mathbf{k};\tau)}{\partial\tau}+\nu k^2\phi'^{\alpha}_{\mathrm{B}} -ik^aD^{\alpha b}(\mathbf{k})\iint\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,\psi'^{a}_{\mathrm{B}}(\mathbf{p};\tau)\phi'^{b}_{\mathrm{B}}(\mathbf{q};\tau)=0 \quad\cdots(27)$$

となる．ただし，$D^{\alpha\beta}\left(=\delta^{\alpha\beta}-k^{\alpha}k^{\beta}/k^2\right)$は波数空間での射影演算子である．

***D*　グリーン函数を用いた計算**

例えば(27)式に対応して，基本場方程式のグリーン函数$G'^{\alpha\beta}_{\phi}(\mathbf{k};\tau,\tau')$を

$$\frac{\partial G'^{\alpha\beta}_{\phi}(\mathbf{k};\tau,\tau')}{\partial\tau}+\nu k^2G'^{\alpha\beta}_{\phi}(\mathbf{k};\tau,\tau') -ik^aD^{\alpha b}(\mathbf{k})\iint\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})d\mathbf{p}d\mathbf{q} \times\psi'^{a}_{\mathrm{B}}(\mathbf{p};\tau)G'^{b\beta}_{\phi}(\mathbf{q};\tau,\tau')=\delta^{\alpha\beta}\delta(\tau-\tau') \quad\cdots(28)$$

で定義する．これらのグリーン函数を用いて，$\boldsymbol{\vartheta}'_{01}$や$\boldsymbol{\vartheta}'_1$を形式的に解く．

***E*　基本場への統計的性質の仮定**

基本場一様等方であることから，$\boldsymbol{\vartheta}$や$\boldsymbol{\chi}$が$\boldsymbol{\phi}$または$\boldsymbol{\psi}$を表すとして，$\boldsymbol{\vartheta}$と$\boldsymbol{\chi}$について

$$\frac{\left\langle\vartheta^{\alpha}_{\mathrm{B}}(\mathbf{k};\tau)\chi^{\beta}_{\mathrm{B}}(\mathbf{k}';\tau')\right\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')}=D^{\alpha\beta}(\mathbf{k})Q_{\vartheta\chi}(k;\tau,\tau') +\frac{i}{2}\frac{k^a}{k^2}\varepsilon^{\alpha\beta a}H_{\vartheta\chi}(k;\tau,\tau') \quad\cdots(29)$$

$$\left\langle G'^{\alpha\beta}_{\vartheta}(\mathbf{k};\tau,\tau')\right\rangle=\delta^{\alpha\beta}G_{\vartheta}(k;\tau,\tau') \quad\cdots(30)$$

という統計的性質を仮定する．

さらにグリーン函数G_{ϕ}とG_{ψ}について，対称部分と反対称部分を

$$G_{\mathrm{S}}(k;\tau,\tau')=\frac{1}{2}\left(G_{\phi}(k;\tau,\tau')+G_{\psi}(k;\tau,\tau')\right) \quad\cdots(31\mathrm{a})$$

$$G_{\mathrm{A}}(k;\tau,\tau')=\frac{1}{2}\left(G_{\phi}(k;\tau,\tau')-G_{\psi}(k;\tau,\tau')\right) \quad\cdots(31\mathrm{b})$$

で定義しておく．

***F*　相関函数の計算**

以上にあげたTSDIAの形式的手続きに則って，(17)-(19)式の相関函数を

$$\left\langle\phi'^{\alpha}\phi'^{\beta}\right\rangle=\left\langle\phi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\phi'^{\beta}_{\mathrm{B}}\right\rangle+\left\langle\phi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\phi'^{\beta}_{01}\right\rangle+\left\langle\phi'^{\alpha}_{01}\phi'^{\beta}_{\mathrm{B}}\right\rangle+\cdots +\left\langle\phi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\phi'^{\beta}_{1}\right\rangle+\left\langle\phi'^{\alpha}_{1}\phi'^{\beta}_{\mathrm{B}}\right\rangle+\cdots, \quad\cdots(32\mathrm{a})$$

$$\left\langle\psi'^{\alpha}\psi'^{\beta}\right\rangle=\left\langle\psi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\psi'^{\beta}_{\mathrm{B}}\right\rangle+\left\langle\psi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\psi'^{\beta}_{01}\right\rangle+\left\langle\psi'^{\alpha}_{01}\psi'^{\beta}_{\mathrm{B}}\right\rangle+\cdots +\left\langle\psi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\psi'^{\beta}_{1}\right\rangle+\left\langle\psi'^{\alpha}_{1}\psi'^{\beta}_{\mathrm{B}}\right\rangle+\cdots, \quad\cdots(32\mathrm{b})$$

$$\left\langle\phi'^{\alpha}\frac{\partial\psi'^{\beta}}{\partial x^b}\right\rangle=\left\langle\phi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\frac{\partial\psi'^{\beta}_{\mathrm{B}}}{\partial x^b}\right\rangle+\left\langle\phi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\frac{\partial\psi'^{\beta}_{01}}{\partial x^b}\right\rangle+\left\langle\phi'^{\alpha}_{01}\frac{\partial\psi'^{\beta}_{\mathrm{B}}}{\partial x^b}\right\rangle+\cdots +\left\langle\phi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\frac{\partial\psi'^{\beta}_{1}}{\partial x^b}\right\rangle+\left\langle\phi'^{\alpha}_{1}\frac{\partial\psi'^{\beta}_{\mathrm{B}}}{\partial x^b}\right\rangle+\cdots, \quad\cdot(32\mathrm{c})$$

$$\left\langle\psi'^{\alpha}\frac{\partial\phi'^{\beta}}{\partial x^b}\right\rangle=\left\langle\psi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\frac{\partial\phi'^{\beta}_{\mathrm{B}}}{\partial x^b}\right\rangle+\left\langle\psi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\frac{\partial\phi'^{\beta}_{01}}{\partial x^b}\right\rangle+\left\langle\psi'^{\alpha}_{01}\frac{\partial\phi'^{\beta}_{\mathrm{B}}}{\partial x^b}\right\rangle+\cdots +\left\langle\psi'^{\alpha}_{\mathrm{B}}\frac{\partial\phi'^{\beta}_{1}}{\partial x^b}\right\rangle+\left\langle\psi'^{\alpha}_{1}\frac{\partial\phi'^{\beta}_{\mathrm{B}}}{\partial x^b}\right\rangle+\cdots \quad\cdot(32\mathrm{d})$$

を用いて計算する．

2.5　解析結果

TSDIAの解析から

$$I_n\{A\}=\int d\mathbf{k}k^{2n}A(k;\tau,\tau), \quad\cdots(33\mathrm{a})$$

$$I_n\{A,B\}=\int d\mathbf{k}k^{2n}\int_{-\infty}^{\tau}d\tau_1A(k;\tau,\tau_1)B(k;\tau,\tau_1) \quad\cdots(33\mathrm{b})$$

という略記法を用いて，$R_{\mathrm{T}}^{\alpha\beta}$，$W_{\mathrm{T}}^{\alpha\beta}$，$\Gamma$を

$$\begin{aligned}R_{\mathrm{T}}^{\alpha\beta}&\equiv\left\langle u'^{\alpha}u'^{\beta}+b'^{\alpha}b'^{\beta}\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle\phi'^{\alpha}\phi'^{\beta}+\psi'^{\alpha}\psi'^{\beta}\right\rangle\\&=\frac{2}{3}\delta^{\alpha\beta}I_0\{Q_{uu}+Q_{bb}\}\\&-\frac{7}{15}I_0\{G_{\mathrm{S}},(Q_{uu}-Q_{bb})\}S^{\alpha\beta}-\frac{7}{15}I_0\{G_{\mathrm{S}},(Q_{bu}-Q_{ub})\}M^{\alpha\beta}\\&+2\Omega_{\mathrm{F}}^{\alpha}\Lambda_R^{\beta}+2\Omega_{\mathrm{F}}^{\beta}\Lambda_R^{\alpha}+6\delta^{\alpha\beta}2\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{F}}\cdot\boldsymbol{\Lambda}_R,\end{aligned} \quad\cdots(34)$$

$$\begin{aligned}W_{\mathrm{T}}^{\alpha\beta}&\equiv\left\langle u'^{\alpha}b'^{\beta}+b'^{\alpha}u'^{\beta}\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle\phi'^{\alpha}\phi'^{\beta}-\psi'^{\alpha}\psi'^{\beta}\right\rangle\\&=\frac{2}{3}\delta^{\alpha\beta}I_0\{Q_{ub}+Q_{bu}\}\\&-\frac{7}{15}I_0\{G_{\mathrm{S}},(Q_{bu}-Q_{ub})\}S^{\alpha\beta}-\frac{7}{15}I_0\{G_{\mathrm{S}},(Q_{uu}-Q_{bb})\}M^{\alpha\beta}\\&+2\Omega_{\mathrm{F}}^{\alpha}\Lambda_W^{\beta}+2\Omega_{\mathrm{F}}^{\beta}\Lambda_W^{\alpha}+6\delta^{\alpha\beta}2\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{F}}\cdot\boldsymbol{\Lambda}_W,\end{aligned} \quad\cdots(35)$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\alpha}&\equiv\left\langle b'^{\alpha}\frac{\partial u'^{a}}{\partial x^{a}}-u'^{\alpha}\frac{\partial b'^{a}}{\partial x^{a}}\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle\phi'^{\alpha}\frac{\partial\psi'^{a}}{\partial x^{a}}-\psi'^{\alpha}\frac{\partial\phi'^{a}}{\partial x^{a}}\right\rangle\\&=\frac{4}{3}I_1\{G_{\mathrm{S}},(Q_{uu}-Q_{bb})\}B^{\alpha}+\frac{1}{3}I_0\{G_{\mathrm{S}},(H_{uu}+H_{bb})\}(\nabla\times\mathbf{B})^{\alpha}\\&-\frac{1}{3}I_0\{G_{\mathrm{S}},(H_{ub}+H_{bu})\}(\boldsymbol{\Omega}+2\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{F}})^{\alpha}\end{aligned} \quad\cdot(36)$$

のように表すことができる．ただし，

$$\mathbf{\Lambda}_R = \frac{1}{15}\left(I_{-1}\{G_S, \nabla H_{uu}\} + I_{-1}\{G_A, \nabla H_{ub}\}\right), \quad \cdots\cdots(37)$$

$$\mathbf{\Lambda}_W = \frac{1}{15}\left(I_{-1}\{G_S, \nabla H_{ub}\} + I_{-1}\{G_A, \nabla H_{uu}\}\right) \quad \cdots\cdots(38)$$

である．また，Q_{uu}，Q_{bb}，Q_{ub}，H_{uu}，H_{bb}，H_{ub}などは基本場のスペクトル関数で

$$\left\langle \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_B'^2 + \mathbf{b}_B'^2\right) \right\rangle = \int d\mathbf{k}\left(Q_{uu}(k;\tau,\tau) + Q_{bb}(k;\tau,\tau)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\left(Q_{\phi\phi}(k;\tau,\tau) + Q_{\psi\psi}(k;\tau,\tau)\right), \quad \cdots\cdots(39\text{ a})$$

$$\langle \mathbf{u}_B' \cdot \mathbf{b}_B' \rangle = \int d\mathbf{k} Q_{ub}(k;\tau,\tau)$$
$$= \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\left(Q_{\phi\phi}(k;\tau,\tau) - Q_{\psi\psi}(k;\tau,\tau)\right), \quad \cdots\cdots(39\text{ b})$$

$$\langle -\mathbf{u}_B' \cdot \mathbf{b}_B' + \mathbf{b}_B' \cdot \mathbf{j}_B' \rangle = \int d\mathbf{k}\left(-H_{uu}(k;\tau,\tau) + H_{bb}(k;\tau,\tau)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\left(H_{\phi\psi}(k;\tau,\tau) + H_{\psi\phi}(k;\tau,\tau)\right), \quad \cdots(39\text{ c})$$

$$\langle \mathbf{u}_B' \cdot \mathbf{j}_B' \rangle = \int d\mathbf{k} H_{ub}(k;\tau,\tau)$$
$$= \frac{1}{4}\int d\mathbf{k}\left(H_{\phi\phi}(k;\tau,\tau) - H_{\psi\psi}(k;\tau,\tau)\right) \quad \cdots\cdots(39\text{ d})$$

などの関係式を充たしている．

3. 残留エネルギー方程式のモデリング

3.1 乱流残留エネルギーのモデル方程式

前節で求めた$R_T^{\alpha\beta}$，$W_T^{\alpha\beta}$，Γの表式を利用して乱流残留エネルギーの方程式を導くことができる．(16)式は

$$\frac{DK_R}{Dt} = -R_T^{ab}\frac{\partial U^a}{\partial x^b} + W_T^{ab}\frac{\partial B^a}{\partial x^b} - \mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{B}$$
$$-C_{\varepsilon R}\frac{\varepsilon}{K}K_R + \nabla\cdot\left(\frac{\nu_K}{\sigma_{KR}}\nabla K_R\right) \quad \cdots\cdots(40)$$

となる．ただし，(34)-(36)式から

$$R_T^{\alpha\beta} = \frac{2}{3}K\delta^{\alpha\beta} - C_R\frac{K}{\varepsilon}K_R S^{\alpha\beta} + \text{H.R.T.}, \quad \cdots\cdots(41)$$

$$W_T^{\alpha\beta} = \frac{2}{3}W\delta^{\alpha\beta} - C_R\frac{K}{\varepsilon}K_R M^{\alpha\beta} + \text{H.R.T.} \quad \cdots\cdots(42)$$

および

$$\mathbf{\Gamma} = r_1\mathbf{B} + r_2\nabla\times\mathbf{B} + r_3(\mathbf{\Omega} + 2\mathbf{\Omega}_F), \quad \cdots\cdots(43)$$

$$r_1 = C_{r1}\frac{\varepsilon}{K^2}K_R,\quad r_2 = C_{r2}\frac{K}{\varepsilon}H_T,\quad r_3 = -C_{r3}\frac{W}{\varepsilon}H_T \quad \cdots\cdots(44)$$

である．ここでH.R.T.はヘリシティに関連する項，またH_Tは$H_T \equiv \langle \mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'\rangle + \langle \mathbf{b}'\cdot\mathbf{j}'\rangle$で定義される総ヘリシティである．$C_R$，$C_{\varepsilon R}$，$\sigma_{KR}$，$C_{rn}$ $(n=1-3)$は正のモデル定数である．モデル定数について，現時点で

$$C_R = O(10^{-1}),\quad C_{\varepsilon R} = O(10^{-1}) \sim O(1),\quad \sigma_{KR} \cong 1 \quad \cdots\cdots(45)$$

などの評価ができる．C_{rn}も含めて，詳しい値については，モデル方程式を現実の流れに適用することで今後定めていかねばならない．

残留エネルギー方程式についての考察の第一歩として，ヘリシティに関連する項［(41)，(42)式の第3項，および(43)式の第2，3項］については，当面の議論では無視することにする．

3.2 方程式の構造

ヘリシティに関連した項を除いた(41)-(43)式を(40)式に代入すると

$$\frac{DK_R}{Dt} = C_R\frac{K}{\varepsilon}K_R\left(S^2 - M^2\right) - C_{r1}\frac{\varepsilon}{K^2}K_R\mathbf{B}^2$$
$$-C_{\varepsilon R}\frac{\varepsilon}{K}K_R + \nabla\cdot\left(\frac{\nu_K}{\sigma_{KR}}\nabla K_R\right) \quad \cdots\cdots(46)$$

となる．(46)式の右辺のうち，第4項は拡散項であり，第3項はK_Rの散逸項である．後者は，残留エネルギーの大きさを減らす方向にはたらく．また，第2項でK_Rを除いた部分，すなわち$-C_{r1}$ (ε/K^2) $\mathbf{B}^2$は負号も含めて常に負である．このことは，この項も残留エネルギーの大きさを減らすようにはたらくことを示している．平均磁場$\mathbf{B}$が存在すると，乱れ部分の運動エネルギーと磁場エネルギーがより等分配に向かうということであり，アルベーン効果の現れと考えられる．残留エネルギーの生成項にあたる第1項は，K_Rが生成されるか否かは，平均速度の歪みSと平均磁場の歪みMのどちらが大きいかによって決まることを示している．

ヘリシティに関連する項を無視した(46)式の大きな特徴は，左辺で表されるK_Rの生成率が，右辺の形からわかるようにK_Rに比例する形で表現されることである．すなわち，初期に$K_R=0$の状況では，以降も$K_R=0$であり続ける．実際の現象では，多少なりともエネルギー等分配からのずれ，すなわち$K_R \neq 0$の状態が生じうる．その場合，K_Rの発展は平均速度と平均磁場との間の非一様性の差によって定められることになる．

4. 太陽風への応用

4.1 太陽風

太陽風（solar wind）は，太陽半径の数倍程度までに存在する高温（約百万度）のコロナ・ガスが自らの圧力によって太陽の外側方向に加速され，秒速数百kmのプラズマ流として四方八方に吹き出していく現象である[7,8]．彗星が常に太陽と反対の側に尾を曳くのは太陽風のためである．太陽は磁場をもち，磁力線が（局所的には）オープンになっている極近くの領域はコロナ・ホール（colonal hole）と呼ばれている．この付近から放出される太陽風は高速で800 km s^{-1}にも達する．一方，低緯度領域のコロナによって放出される太陽風は低速であり，その速さは400 km s^{-1}程度である．このように太陽風の速度は一様ではなく空間的に不均一な分布をもっている．

観測衛星を用いて太陽風の乱流状態が詳しく調べられてきた．その結果，

(i) 速度ゆらぎと磁場ゆらぎの間に強い相関が存在すること（クロス・ヘリシティの存在）；
(ii) 運動エネルギーよりも磁場エネルギーのほうが優勢であること（エネルギー等分配からのずれ）；
(iii) (i) および (ii) の程度は太陽からの距離 R（heliocentric distance）に依存して発展していくこと；
などがわかってきた[4]．

(i) は太陽風乱流がアルベーン波と密接な関係にあることを示唆している．平均磁場に対してアルベーン波は磁場と平行，反平行の両方向に伝わることが可能である．太陽風のアルベーン波は太陽からの外向き方向のみが観測されている．このことは，アルベーン波が太陽の近くを源にしていることを示している．

(ii) については，速度場と磁場の周波数 f についてのエネルギー・スペクトル関数 $E_u(f)$，$E_b(f)$ を用いて定義されるアルベーン比（Alfvén ratio）r_A：

$$r_A = \frac{E_u(f)}{E_b(f)} \qquad (47)$$

を考える．等分配状態では $r_A = 1$ である．太陽風では，太陽半径（7×10^8m）の3倍程度に存在する太陽風の起点面（source surface）付近で $r_A = 1 \sim 1.2$ である．アルベーン比 r_A は R とともに減少し，$R = 8$ AU付近で

$$r_A \cong 0.5 \qquad (48)$$

となる［AU $= 1.5\times10^{11}$m：天文単位（astronomical unit）］．それ以降，観測されている最遠距離である R = 20 AUまで r_A はあまり変化しないことが知られている．

4.2 太陽風の残留エネルギー方程式

実際の太陽風現象では，アルベーン波の効果，放射状に広がる効果，圧縮性の効果，などさまざまな要因を考慮する必要がある．しかし，r_A の発展が最も顕著な，高速流の小さいスケールの乱れにおいては圧縮性の効果は無視しうることが知られている．

太陽風現象に残留エネルギー方程式［(46)式］をあてはめることを考える．典型的な太陽風のパラメータは

$$|\mathbf{U}| \cong 400\ \mathrm{km\ s^{-1}}(\text{低速流}),\ 800\ \mathrm{km\ s^{-1}}(\text{高速流}), \qquad (49\,\mathrm{a})$$

$$|\mathbf{B}^*| = 5\ \mathrm{nT} = 50\ \mu\mathrm{G} \ \rightarrow\ |\mathbf{B}| = 50\ \mathrm{km\ s^{-1}}, \qquad (49\,\mathrm{b})$$

$$n \cong 5\ \mathrm{cm^{-3}} \left(= 5\times10^6\ \mathrm{m^{-3}}\right) \qquad (49\,\mathrm{c})$$

である．これらの値から，通常は

$$S^2 >> M^2 \qquad (50)$$

が成り立っているとみなして構わない．したがって，K_R の方程式は

$$\frac{DK_R}{Dt} \cong C_R \frac{K}{\varepsilon} K_R S^2 - C_{\varepsilon R} \frac{\varepsilon}{K} K_R + \nabla\cdot\left(\frac{\nu_K}{\sigma_{KR}} \nabla K_R\right) \qquad (51)$$

となる．

K_R が空間的に一様で，定常な場合には，生成項と散逸項のつりあい，すなわち

$$C_R \frac{K}{\varepsilon} K_R S^2 \cong C_{\varepsilon R} \frac{\varepsilon}{K} K_R \qquad (52)$$

が成り立つ．これは，乱れの時間スケール K/ε と平均場の時間スケール S^{-1} の比が

$$\left(\frac{KS}{\varepsilon}\right)^2 \cong \frac{C_{\varepsilon R}}{C_R} = O(1) - O(10^1) \qquad (53)$$

を充たすことを示唆している．

(51)の方程式あるいはその修正形を適当な幾何状況に適用してその是非を調べる点は，今後の興味深い課題として残っている．

5. おわりに

本研究で求めた残留エネルギーの方程式［(46) 式］は，乱れの運動エネルギーと磁場エネルギーの間に等分配が成り立つ場合（$K_R = 0$）には，残留エネルギーが生成されないことを，その特徴としていた．すなわち，等分配の系は等分配のまま保たれる．このような制約を取り払うための方法として次の二つが考えられる．まず，これまでのところ無視していたヘリシティに関連する項［(41)，(42)式の第3項，および(43) 式の第2，3項］を考慮に入れることである．別の方法として，速度乱れと磁場乱れの特徴的な時間スケール，τ_u と τ_b，の間に違いを導入することである．このような取り扱いをすると電磁自己相関 $R_T^{\alpha\beta}$ の表式に

$$\delta R_T^{\alpha\beta} = -\chi \frac{2}{3} \tau_T \left(S^{\alpha\beta} - \frac{W}{K} M^{\alpha\beta}\right) \qquad (54)$$

のような項が加わる．ここで，$\tau_T [= (\tau_u + \tau_b)/2]$ は時間スケールの平均，χ は

$$\chi = \frac{\tau_u - \tau_b}{\tau_u + \tau_b} = \frac{\tau_u - \tau_b}{2\tau_T} \qquad (55)$$

で定義される時間スケールの差の指標（$-1 \leq \chi \leq 1$）である．第4節の太陽風のような状況では，この χ を用いて残留エネルギーの大きさを評価することができる：

$$\frac{K_R}{K} \cong \chi \left[\frac{C_R}{C_{\varepsilon R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} S\right)^2 \Big/ 1 - \frac{C_R}{C_{\varepsilon R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} S\right)^2\right]. \qquad (56)$$

しかし，速度場と磁場の間の乱れの時間スケールの差という量は，それ自体として極めて微妙な評価を必要とするた

め，今後の検討を必要とする．

（2003年12月5日受理）

参 考 文 献

1) D. Biskamp, *Magnetohydrodynamic Turbulence*, (Cambridge, 2003).

2) A. Yoshizawa, *Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows: Modelling and Statistical Theory*, (Kluwer, 1998).

3) R. H. Kraichnan, "Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence," Phys. Fluids **8**, 1385 (1965).

4) C. -Y. Tu and E. Marsch, *MHD Structures, Waves and Turbulence in the Solar Wind: Observations and Theories*, (Kluwer, 1995).

5) H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, (Cambridge, 1978).

6) A. Pouquet, U. Frisch, and J. Léorat, "Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect," J. Fluid Mech. **77**, 321 (1976).

7) E. N. Parker, "Dynamics of interplanetary gas and magnetic fields," Astrophys. J. **128**, 664 (1958).

8) H. J. G. L. M. Larmers and J. P. Cassinelli, *Introduction to Stellar Winds*, (Cambridge, 1999).