

東京大学 大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

平成 30 年度

修士論文

推定誤差共分散の線形化手法の考案による
航法誤差最小な月惑星着陸軌道的高速生成

2019 年 1 月 29 日提出
指導教員 坂井 真一郎 准教授

47176059 新井 久旺

目次

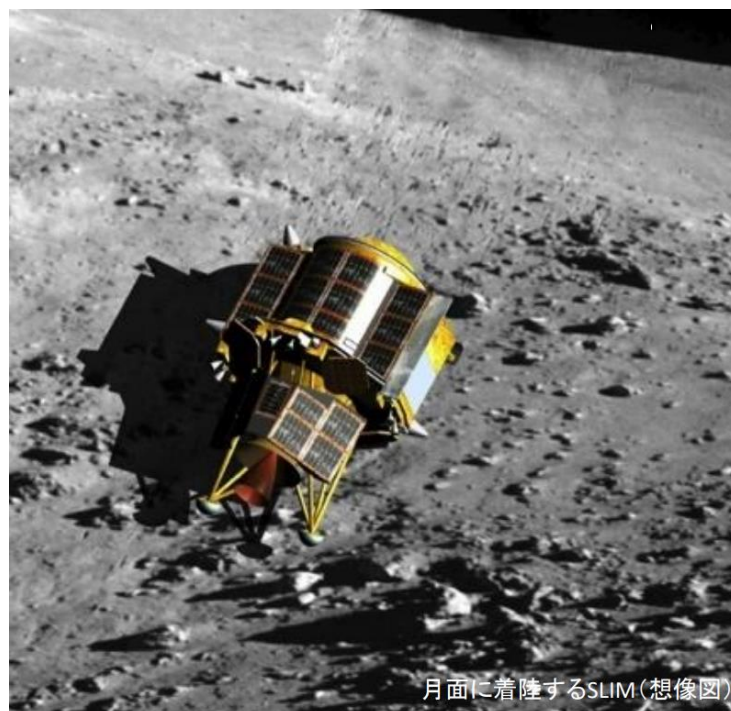
第 1 章	研究背景	2
1.1.	今後の人類の宇宙活動と惑星着陸の精度要求.....	2
1.2.	月惑星へのピンポイント着陸技術.....	3
1.3.	航法精度と誘導軌道の関係.....	5
1.4.	本研究について.....	6
第 2 章	航法最適な最適制御問題の提案.....	7
2.1.	航法最適の定義.....	7
2.2.	最適制御問題の評価関数.....	8
2.3.	提案する最適制御問題.....	10
第 3 章	提案する最適制御問題の解法.....	11
3.1.	近年の凸最適化を利用した高速解法.....	11
3.2.	推定誤差共分散の基準軌道に対する線形化手法の提案.....	13
3.2.1.	数学的仮定の考案.....	13
3.2.2.	時間発展式の線形化.....	14
3.2.3.	観測更新式の線形化.....	16
3.2.4.	推定誤差共分散の線形化結果.....	17
3.3.	非凸最適制御問題の凸問題への緩和.....	18
3.4.	解法アルゴリズムの提案.....	22
第 4 章	火星着陸例題での提案手法の検証設定.....	24
4.1.	火星着陸例題の問題設定.....	24
4.1.1.	宇宙機の運動モデル.....	25
4.1.2.	宇宙機の航法モデル.....	27
4.1.3.	TRN の観測ノイズモデル.....	29
4.2.	火星着陸例題の凸化.....	30
4.3.	火星着陸例題での数値設定.....	32
4.4.	アルゴリズムの製作と実行環境および計算時間.....	33
第 5 章	火星着陸例題での提案手法の検証結果.....	34
5.1.	航法最適軌道の生成過程.....	34
5.2.	モンテカルロ解析(MCA)による評価.....	49
5.3.	航法最適軌道の観測更新数と終端時間の影響.....	53
第 6 章	結論	60
第 7 章	謝辞	62
参考文献	63
発表文献リスト	65

第1章 研究背景

1.1. 今後の人類の宇宙活動と惑星着陸の精度要求

人類の宇宙活動は拡大が続けている。初期には科学探査や軍事的な活動、国威発揚のための有人活動から始められた。その後は、宇宙空間を利用した経済活動が増え、近年は月や火星への人類の入植を目的とした宇宙活動も計画されている[1]。

科学的な探査において、宇宙や銀河、太陽系の成り立ちや未来を解明する研究が行われ、その中で、太陽系を構成する様々な惑星は詳細に探査されつつある。これらの惑星探査では、地球の地表や軌道上の望遠鏡を利用した惑星の観測、惑星の周回軌道上からの地表や大気の観測、関心の高い地域に探査機を着陸させることによる地表や大気の観測が行われてきた。周回軌道からの観測の結果、月や火星の表面は、特に科学的価値の高い岩石や土壌等のサンプルが存在する位置が判明するほど、詳細なデータが得られている[2][3]。現在、これらのサンプルを地表で直接観測することで、宇宙空間からの遠隔観測より詳細なデータを得ることが期待されている。しかし、これらのサンプルは斜面や崖、クレータの淵などの険しい地形上に存在することが多く、探査ローバー等で遠方から接近することは難しい。そこで、サンプル近傍(~100m)に探査機を着陸させることで、これらの問題を解決することが考えられている[4]。実際に JAXA/ISAS の SLIM プロジェクトでは 100[m]精度での月面着陸を目指して開発が進められている[5]。



月面に着陸するSLIM(想像図)

Fig 1.1-1 SLIM プロジェクトでの斜面着陸の予想図[6]

有人宇宙開発は、かつては米ソの国威発揚で大きく進展した。アポロ計画では月面に有人宇宙船が 6 回着陸に成功した。その後、月表面への有人探査は行われてこなかったが、現在、地球の月や火星への継続的な有人宇宙飛行が複数研究・検討されている[1][7][8]。継続的な有人飛行は、惑星の成り立ちや未来の科学的な解明の他、経済活動を目的とした飛行や、人類のその惑星への入植への足掛かりにもなる。このような場合の有人飛行では、惑星表面の探査・居住拠点、水資源の豊富な月極域や火星の凍土域等の特定の地点へ、継続的に繰り返し有人宇宙船が飛行する必要がある。このような場合、NASA などの研究では、安全性の観点からも有人宇宙船には高い着陸精度(~100m)が必要としている[9]。

以上のように今後の惑星着陸の様々な場面において、100m 以上の精度での着陸、つまりピンポイント着陸が求められている。しかしこれまでの月や火星への直陸では数 km 以上の誤差が発生する可能性があった[10]。



Fig 1.1-2 SpaceX 社の火星移住計画(左)[1]と、
ロッキードマーティン社の有人火星探査のコンセプト図(右)[8]。

1.2. 月惑星へのピンポイント着陸技術

事前に予測できない様々な要因が、ピンポイント着陸を困難にする。地球からの軌道決定誤差、宇宙機の慣性計測装置 (Inertial Motion Unit: IMU) の誤差、事前に作成された惑星表面の地図誤差、宇宙機のロケットエンジンの推力誤差、更に、火星やタイタン等では大気モデル誤差などが宇宙機の着陸に不確実性を与える[11]。これらに対処するために、(A)惑星表面の地形情報を用いた航法と、(B) 現在位置から着陸目標地点までの最適着陸軌道の生成、を行う自律的な実時間技術が必要となる。

(A)については、画像照合などを用いた地形相対航法 (Terrain Relative Navigation: TRN) が検討されている。TRN は、惑星周回軌道上の探査機から予め得られた地形データと、着陸降下中の宇宙機によって得られた地形データとを比較することによって、宇宙機の位置、速度、および姿勢を推定する航法技術である[12][13][14]。宇宙機の航法アルゴリズムは、IMU

を用いた慣性航法値と TRN による航法値をカルマンフィルタによって融合することで、確率的に最適な航法値を推定する。TRN による航法値算出は着陸までの間に複数回行われるが、計算コストの関係などから、1Hz 以上で動作することは現在までに考えられていない。

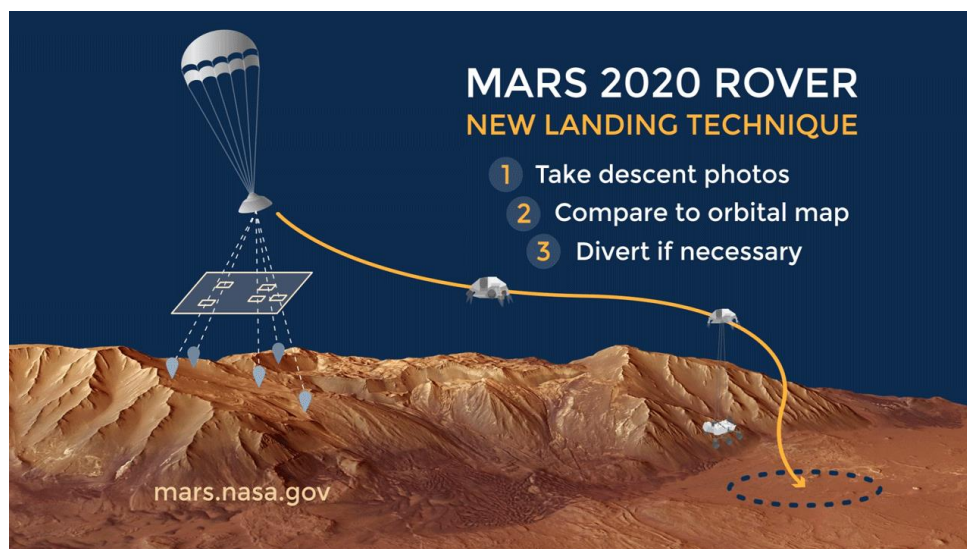


Fig 1.2-1 NASA/JPL の探査機 MARS2020 が TRN により着陸目標に接近する概念図[15].

(B)については、宇宙機の動力降下誘導(Powered Descent Guidance: PDG)アルゴリズムが実行可能な着陸軌道を迅速に生成しなければならない。これまで、事前に計算された最適軌道から近似計算によって軌道を生成する手法がアポロ計画以来用いられてきたが、低い計算コストと引き換えに、生成可能な軌道の制約が多いという欠点が存在していた[16]。そこで、宇宙機の着陸の最適制御問題を機上で実時間に解決する研究が盛んになされてきた。凸最適化問題は、所定の精度での大域的最適解への収束保証と、内点法 (Interior Point Method: IPM) を使用した迅速な解法手法が存在するため、宇宙機の自律着陸への利用が注目されている[17]。この際、宇宙機の非凸型の最適制御問題を凸最適化問題として扱うために、無損失凸化(Lossless Convexification)や、連続凸化(Successive Convexification: SCvx)等の手法が提案されている。無損失凸化は、いくつかの形式の最適制御問題を、一度の凸最適化計算で解くことを可能にする[18][19]。連続凸化は、凸最適化を反復的に用いることで、自由終端時間の一般的な非凸最適制御問題を迅速に解くことを可能にする[20]。凸最適化を用いた手法は、実際に NASA/JPL における火星探査機の着陸実験等で有効性が確認されている他[21]、SpaceX 社の Falcon 9/Heavy 等の再使用ロケットの着陸誘導制御にも用いられている[22]。



Fig 1.2-2 NASA/JPL による火星着陸誘導の実験(左)[21]と、
SpaceX 社による Falcon Heavy ロケットの着陸(右)[23]

1.3. 航法精度と誘導軌道の関係

着陸降下中の宇宙機の運動は航法精度に影響する。TRN の精度は地形取得のセンサ精度と照合に使われる地形の特徴密度によって異なる。地形取得用のセンサが宇宙機に固定されている場合、宇宙機の位置および姿勢は、TRN の精度を向上させる目的で変化させることができる。また 6 自由度の非線形運動による慣性航法の精度は、宇宙機の運動過程の影響を受ける。以上のことから、6 自由度の降下着陸軌道の全過程は、ピンポイント着陸の精度にとって重要な着陸時の航法精度に影響を与える。つまり、宇宙機の誘導軌道を適切に設定することで、着陸時の航法精度を最適化出来る。これまで、探査ローバーの走行経路と航法精度に関する研究では、A*法等の探索アルゴリズムにより航法最適な経路を求める研究がなされてきた[24]。宇宙機の航法を考慮した誘導に関する研究では、視覚センサを着陸目標付近に視線拘束することで、着陸地点周囲の危険の検出とともに、航法精度および着陸精度の向上を期待する研究にとどまっている[25][26]。そのため、航法精度や着陸精度を数値的に機上で最適化するためには、さらなる研究が必要である。

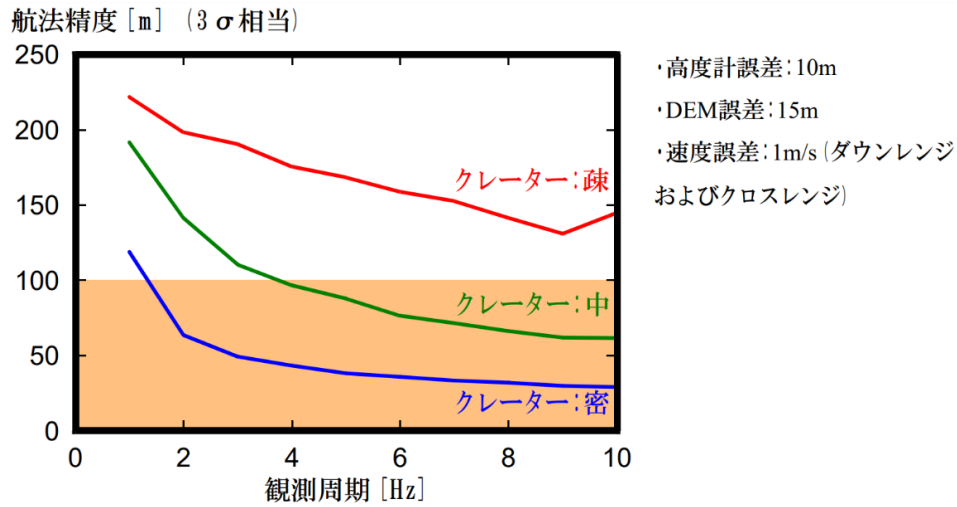


Fig 1.3-1 SELENE-B プロジェクトの初期検討における、
地形特徴量(クレータ密度)による航法精度の変化[27]

1.4. 本研究について

本研究の目標は、予測不可能な不確実性を確率モデルとして考慮することで、惑星着陸精度を最適化出来る誘導手法を提案することである。ここで、今回の修士論文で扱う不確実性とは、航法アルゴリズムの初期誤差、IMU のノイズと初期バイアス誤差、TRN のノイズである。探査機の運動や制御に関わる、推力誤差や大気モデル誤差等は含まず、航法に関わる不確実性にのみ着目する。この際、機器の故障やアルゴリズムエラー等により発生する、不連続な不確実性も除く。そして、すべての誤差とノイズはホワイトガウスノイズであるものとする。このようにすることで、発生する航法誤差を確率モデル上で議論できるようになる。また、制御系のノイズ等の不確実性を考慮しない為に、ここでの惑星着陸精度は航法精度と同義となる。以上の事から、今回の修士論文における最適化対象は航法精度であり、航法誤差最小な着陸軌道(航法最適軌道)を、機上で実時間に計算できる潜在性を持つアルゴリズムを提案する。

第2章 航法最適な最適制御問題の提案

本稿では、航法誤差最小を意味する航法最適を定義した後、得られる解が航法最適軌道となる最適制御問題を示す。

2.1. 航法最適の定義

今回は制御系の誤差を考えないので、最新の航法値から誘導軌道が生成された際、宇宙機の航法値上でそれに追従することは推力や制約の範囲内で可能である。そのため、着陸時は宇宙機の航法値は着陸目標地点となる。しかし、航法値には誤差があるため、航法誤差の分だけ着陸目標から離れる。そこで、着陸時の航法誤差が最小となる軌道、航法最適軌道を生成出来れば、着陸精度を向上させることが出来る。

ここで、航法最適を定義する。 N 回宇宙機が飛行した際の、各回 i での着陸時の航法値を $\mathbf{x}_{\text{Navi}}^i$ 、真の宇宙機位置を $\mathbf{x}_{\text{True}}^i$ とすれば、最小化すべきは二乗誤差 $(\mathbf{x}_{\text{True}}^i - \mathbf{x}_{\text{Navi}}^i)^2$ の平均 σ_{cost}^2 である。これは以下の式(2.1.1)の様に書き表すことができる。

$$\sigma_{\text{cost}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_{\text{True}}^i - \mathbf{x}_{\text{Navi}}^i)^2 \quad (2.1.1)$$

ここで、航法値は連続の値であることから回数 N は無限大に近づく必要がある。また、今回は着陸時の航法値は着陸目標となるので $\mathbf{x}_{\text{Navi}}^i = \mathbf{x}_{\text{Target}}$ である。式(2.1.1)は真の宇宙機位置の平均 $\bar{\mathbf{x}}_{\text{True}}$ を用いて以下のように書き換えることが出来る。

$$\sigma_{\text{cost}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[(\mathbf{x}_{\text{True}}^i - \bar{\mathbf{x}}_{\text{True}}) + (\bar{\mathbf{x}}_{\text{True}} - \mathbf{x}_{\text{Target}}) \right]^2, \quad N \rightarrow \infty \quad (2.1.2)$$

となり、ここから集合計算後にゼロになる項を除いて整理すると以下になる。

$$\sigma_{\text{cost}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[(\mathbf{x}_{\text{True}}^i - \bar{\mathbf{x}}_{\text{True}})^2 + (\bar{\mathbf{x}}_{\text{True}} - \mathbf{x}_{\text{Target}})^2 \right], \quad N \rightarrow \infty \quad (2.1.3)$$

そして、真の宇宙機位置の分散 σ_{True}^2 を用いれば

$$\sigma_{\text{cost}}^2 = \sigma_{\text{True}}^2 + (\bar{\mathbf{x}}_{\text{True}} - \mathbf{x}_{\text{Target}})^2 \quad (2.1.4)$$

となる。ここで、着陸誤差が航法誤差そのものであるので、航法値の分散 σ_{Navi}^2 と平均 $\bar{\mathbf{x}}_{\text{Navi}}$ は、

$$\sigma_{\text{Navi}}^2 = \sigma_{\text{True}}^2 \quad (2.1.5\text{-a})$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{\text{Navi}} = \bar{\mathbf{x}}_{\text{True}} \quad (2.1.5\text{-b})$$

である．これを用いれば最小化すべきは

$$\sigma_{\text{cost}}^2 = \sigma_{\text{Navi}}^2 + \left(\bar{\mathbf{x}}_{\text{Navi}} - \mathbf{x}_{\text{Target}} \right)^2 \quad (2.1.6)$$

となる．初期航法値や IMU, TRN の誤差やノイズがホワイトガウスノイズで，航法アルゴリズムが線形であれば， $\mathbf{x}_{\text{Target}} = \bar{\mathbf{x}}_{\text{Navi}}$ となる．一方，航法アルゴリズムが非線形の場合は分布に偏りが発生し $\mathbf{x}_{\text{Target}} \neq \bar{\mathbf{x}}_{\text{Navi}}$ となる．しかし，航法誤差の分布の大きさは分散 σ_{Navi}^2 の大きさと近似的に比例すると考えることが出来るので，

$$\sigma_{\text{Navi}}^2 \propto \left(\bar{\mathbf{x}}_{\text{Navi}} - \mathbf{x}_{\text{Target}} \right)^2 \quad (2.1.7)$$

となる．つまり，式(2.1.6)と式(2.1.7)を用いれば，

$$\sigma_{\text{cost}}^2 = \sigma_{\text{Navi}}^2 + \left(\bar{\mathbf{x}}_{\text{Navi}} - \mathbf{x}_{\text{Target}} \right)^2 \propto \sigma_{\text{Navi}}^2 \quad (2.1.8)$$

であるので，

$$\sigma_{\text{cost}}^2 \propto \sigma_{\text{Navi}}^2 \quad (2.1.9)$$

である．つまり，航法値の分散を最小化することで航法最適の解が得られる．

2.2. 最適制御問題の評価関数

航法誤差はセンサの計測ノイズによって発生するので，ノイズ強度の大きさを予め計測することで，誘導軌道を飛行した際の航法値の分散を飛行前に計算できる．惑星への着陸を行う宇宙機の航法アルゴリズムには，カルマンフィルタ等が用いられ，確率的に最適な航法値を計算する．この際，カルマンフィルタは航法値と共に，その値の推定誤差の大きさを示す共分散行列 \mathbf{P} も計算する．共分散の計算にはセンサのノイズ強度，推定誤差の時間発展と観測更新のモデルが必要である．そのため，誘導軌道が決まれば実際のセンサ入力が未知であっても航法値の分散は計算できる．非線形モデルを扱う拡張カルマンフィルタの場合，実際のモデルの線形化と離散化をとおして推定誤差共分散を計算するので，実際の分散と正確には一致しない．しかし，センサのノイズ強度から求めた分散と複数回のシミュレーションでの航法値から求めた分散は，相関の関係である．共分散行列 \mathbf{P} は正方の対称行列であり，対角項に分散値，非対角項が共分散値になっている．以後特に明示しない限り，共分散に分散が含まれるものとする．

本研究はこの相関関係を利用し、着陸時の航法精度を最小化するために、航法アルゴリズムのカルマンフィルタの共分散行列の成分和、 $\text{trace}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$ を評価関数に定める。そして、着陸時のカルマンフィルタの推定誤差共分散 \mathbf{P}_{k_f} は、IMU や TRN のノイズや誤差の分散値が事前の検証から明らかになり、宇宙機の真の着陸軌道が誘導軌道と一致すると仮定すると、前で示した通り事前に計算できる。実際の着陸降下での宇宙機の航法値は事前にはわからないが、航法最適な誘導軌道近傍に存在すると考えられる。ここで、元の推定誤差モデルが線形で時不変であれば、宇宙機の航法値の分布はフィルタの共分散行列と等しく、事前の誘導軌道から予測された共分散と一致する。そのため、事前の航法精度の予測と実際の航法精度の差は、離散化の精度の範囲内である。しかし、非線形の推定誤差モデルで拡張カルマンフィルタを使用した場合には、実際の宇宙機状態の推定値を利用したフィルタ行列により、フィルタが実行される。そのため、飛行毎の航法値の推定誤差共分散 \mathbf{P}_{k_f} も異なる。

これは次のような特徴をもたらす。一般的な最適制御問題の解の必要条件は、解が評価関数への勾配がゼロの停留点であることである。今回、真に最小化したいのは σ_{Navi}^2 である。以下の Fig 2.2-1 の通り、評価関数 $\text{trace}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$ の停留点上であったとしても、実際に宇宙機が飛行するのはその周辺の軌道であるため、 σ_{Navi}^2 上では停留点ではない場合もある。確率的に分布する航法精度の和というのは、移動平均のように作用し、今回の評価関数の局所的な最適性を失わせる場合がある。これは、評価関数 $\text{trace}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$ の停留点上での分散が大きい場合に発生しやすい。

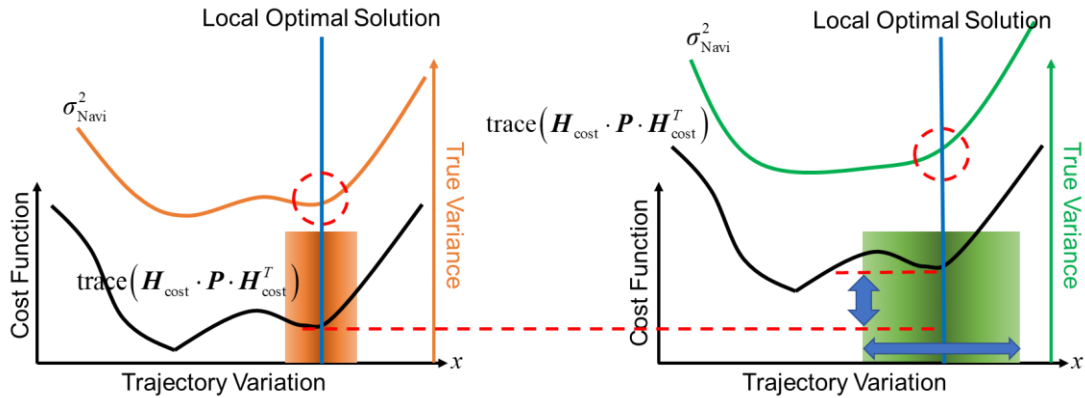


Fig 2.2-1 真に最小化したい評価関数 σ_{Navi}^2 と今回の評価関数 $\text{trace}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$ の違い。

以上のような特徴が存在するが、本論文では $\text{trace}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$ の停留点であれば、それを最適解と考える。

2.3. 提案する最適制御問題

以上の事を利用し、次に定める航法精度を最適化する最適制御問題を定めた。なお、今回は簡単のために、固定終端時間問題として定義する。

Problem1: Navigation-Optimal Non-Convex Optimal Control Problem

Minimize	$J_1 = \text{trace}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{k_f} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$	(2.3.1)
Subject to		
	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$	(2.3.2)
	$0 = \mathbf{g}_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \forall \varepsilon \in \{1, \dots, m\}$	(2.3.3)
	$0 \leq \mathbf{h}_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \forall \epsilon \in \{1, \dots, n\}$	(2.3.4)
	$\mathbf{P}_{k k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1 k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_k, \quad \forall k \in [0, k_f]$	(2.3.5)
	$\mathbf{P}_{K K} = \mathbf{P}_{K K-1} - \mathbf{P}_{K K-1} \mathbf{H}_{KF} (\mathbf{H}_{KF} \mathbf{P}_{K K-1} \mathbf{H}_{KF}^T + \mathbf{R}_K)^{-1} \mathbf{H}_{KF} \mathbf{P}_{K K-1}, \quad \forall K \in \mathbf{K} = \{K_1, \dots, K_f\} \subseteq [0, k_f]$	

ここで式(2.3.1)が評価関数を示しており、終端での共分散 \mathbf{P}_{k_f} の任意成分に重み行列 \mathbf{H}_{cost} を掛け、その答えの行列の対角成分の和が最小化すべき評価関数となる。式(2.3.2)は宇宙機の状態 \mathbf{x} と制御 \mathbf{u} より成り立つ状態運動方程式である。そして式(2.3.3)が動力降下開始時点と終端での境界条件を示し、式(2.3.4)は状態と制御の不等式制約を示している。不等式制約には推進力の上限下限値や、推力方向制約、機体の回転や姿勢の安全制約、飛行高度等の安全制約が含まれる。そして式(2.3.5)がカルマンフィルタの予測更新であり、式(2.3.6)が観測更新である。6自由度の非線形運動を推定する場合、カルマンフィルタは拡張カルマンフィルタとなる。つまりフィルタを構成する行列 \mathbf{F}_k は宇宙機の状態によって変化し、離散化された式(2.3.4)では \mathbf{Q}_k も状態に依存する。また、TRN の精度は宇宙機が取得する地表地形データに依存するため、観測精度 \mathbf{R}_k も宇宙機の状態に依存する。カルマンフィルタの終端のステップは k_f であり、各ステップ間で予測更新は実行される。観測更新はあらかじめ決定されたステップで観測更新を行うものとし、それらは一連のステップ \mathbf{K} で実行される。

第3章 提案する最適制御問題の解法

本稿では、前稿で提案された航法最適な最適制御問題を解くアルゴリズムについて示す。まず、推定誤差共分散が、提案する数学的仮定の下で線形化出来ることを示す。次に、近年の凸最適化を利用した最適化手法を参考に、航法最適軌道を生成するアルゴリズムを示す。

3.1. 近年の凸最適化を利用した高速解法

Problem 1 を潜在的に機上で実時間に解くために、近年の凸最適化を用いる最適化アルゴリズムを参考にする。凸最適化は内点法という数値最適化手法により、所定の精度での大域的最適解の計算が多項式時間ででき、収束が保証されている。また、凸最適化問題毎の数学的な構造を利用した、専用の改良コードを利用することで、小規模の問題であれば、一般的な内点法による凸最適化アルゴリズムより桁違いの時間で高速に解くことが可能である[28][29]。このような利点から、自律移動システムへの利用に適している。火星着陸における質点系宇宙機の燃料最適問題のような一部の問題は、緩和変数の導入や変数変換により、無損失に凸最適化問題に変形(無損失凸化)出来ることが、最大値原理を利用して証明されている[19]。NASA/JPL の研究では、火星着陸問題において、凸最適化問題への変形と専用の改良コードの利用により、最適化にかかる時間を 1000 倍程度高速化した実績がある(Fig 3.1-1)[30]。実際の火星探査機用のコンピュータ上で想定されるアルゴリズムを実行する実験から、要求されると想定される計算時間内で、着陸軌道が計算できることが可能とされた[31]。

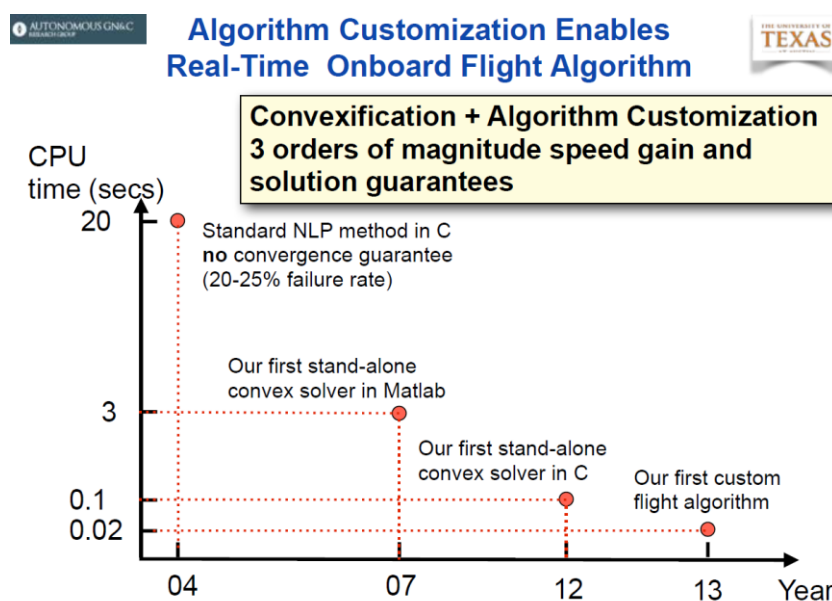


Fig 3.1-1 凸最適化の利用と改良コードの利用による 10 年で 1000 倍の高速化[30].

さらに、一般的な非凸の最適制御問題を、反復的な凸問題への緩和と凸最適化によって解く手法が注目されている。この手法では、最適化問題を基準軌道周りで凸化し、それを凸最適化で解き、生成された解を新たな基準軌道とすることを繰り返す。そして、最終的に基準軌道は変化しなくなり解は収束する。この際、緩和問題の収束解は元の非凸問題の局所解となる。このような手法は、古くは化学プラントの非線形モデル予測制御の解法として研究されていた[32]。また近年は、宇宙機の軌道上ランデブーや、小惑星への着陸軌道生成、6 自由度運動や空気抵抗を考慮した火星ロケットの着陸軌道生成、UAV の衝突回避機動の研究等で用いられている[33][34][20][35][36]。総称としては定まっていないものの、Yuanqi Mao 氏と Açıkmese, Behçet 氏らは連続凸化(Successive Convexification: SCvx)という名称を用い、一般化したアルゴリズムを示している[37][38]。SCvx としての研究は 2015 年頃から発表され始めており、2019 年 2 月現在研究途上ではあるものの、SQP 等の既存の手法より少ない反復回数で効率よく最適解を計算出来ることが判明している[39]。

SCvx の特徴は、連続時間最適制御問題の時間方向への離散化、非線形状態方程式の一次テーラー展開精度での線形化、緩和変数の導入による大域的な収束性の向上、信頼領域の導入による数値安定性の向上がある。アルゴリズムの概念フローを Fig 3.1-2 に示す。

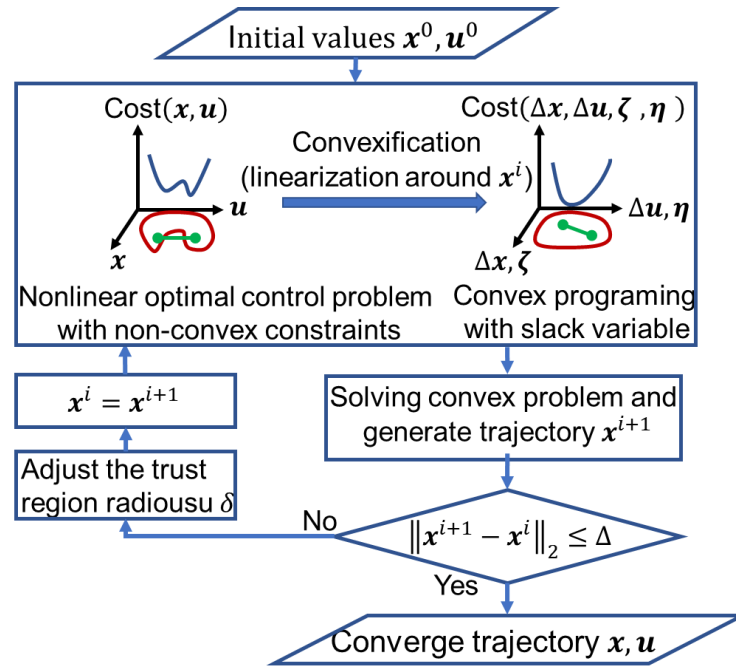


Fig 3.1-2 Successive Convexification の概念フロー。

Fig 3.1-2 によると、問題の線形化を実行するが、これらが適用できるのは、状態方程式等の確定的な値を用いる場合に限られる。本研究のカルマンフィルタのような観測も含む非線形確率システムの共分散行列を、基準軌道の状態要素に対し線形化する手法は、一般的な方法が無い。そこで、次節に示す数学的仮定を導入することで、今回提案した非凸の最適制御問題を凸化する。

3.2. 推定誤差共分散の基準軌道に対する線形化手法の提案

評価関数の推定誤差共分散のトレース値を線形化するために、次の(a)~(d)の計算を行う。

- (a) 連続する観測更新の間の区間 $k \in [K^-, K^+]$ における予測更新に関して、ステップ K^+ で観測更新直前の共分散のトレース値 $\text{tr}(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1})$ を、ステップ K^- で観測更新直後の共分散のトレース値 $\text{tr}(\mathbf{P}_{K^-|K^-})$ 、各ステップでの \mathbf{F}_k 、 \mathbf{Q}_k で微分する。ここで、 $K^- = K_i \in \{K_1, \dots, K_{f-1}\}$ であり、 $K^+ = K_{i+1}$ である。なお、 $K^- = K_{f-1}$ の場合は、区間は $k \in [K^-, K_f]$ となり、 $\text{tr}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{K_f|K_f-1} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$ を $\text{tr}(\mathbf{P}_{K_f-1|K_f-1})$ 、 \mathbf{F}_k 、 \mathbf{Q}_k で微分する。
- (b) 観測更新ステップ $k \in \{K_1, \dots, K_f\}$ における、観測更新直後の共分散行列のトレース値 $\text{tr}(\mathbf{P}_{K|K})$ を、観測更新直前の共分散行列 $\text{tr}(\mathbf{P}_{K|K-1})$ 、観測行列 \mathbf{R}_k で微分する。
- (c) カルマンフィルタの各ステップの行列 \mathbf{F}_k 、 \mathbf{Q}_k 、 \mathbf{R}_k を、各ステップでの状態 \mathbf{x}_k と制御 \mathbf{u}_k で微分する。
- (d) (a)(b)の結果に(c)の結果を掛けることで、評価関数を状態 \mathbf{x}_k と制御 \mathbf{u}_k に対し線形化する。

この際、ステップ(a)や(b)では共分散のトレース値 $\text{tr}(\mathbf{P}_{K^-|K^-})$ 、 $\text{tr}(\mathbf{P}_{K|K-1})$ で共分散のトレース値 $\text{tr}(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1})$ 、 $\text{tr}(\mathbf{P}_{K|K})$ を微分するが、これは数学的な方法が定義されていない。その為、次の数学的仮定を導入し、微分計算を行う。

3.2.1. 数学的仮定の考案

以下の数学的仮定 Assumption 1 を考案した。

Assumption 1:

基準軌道 \mathbf{x}^i の近傍であれば、式(3.2.1)が等号であると仮定して(a)(b)を計算した結果は、近似的に、状態 \mathbf{x}_k や制御 \mathbf{u}_k と評価関数間の勾配である。

$$\mathbf{P}_k \approx \frac{\text{tr}(\mathbf{P}_k)}{\text{tr}(\bar{\mathbf{P}}_k)} \bar{\mathbf{P}}_k \quad (3.2.1)$$

式(3.1)は共分散行列 \mathbf{P}_k のすべての成分が、近似的に基準軌道の共分散 $\bar{\mathbf{P}}_k$ とのトレース値の比で定まることを仮定している。実際には、式(3.2.1)が等号になることは $\mathbf{P}_k = \bar{\mathbf{P}}_k$ 以外にはほとんど考えられない。そして、この仮定によって線形化された問題の停留点が、元の問題の停留点であるかは現在検証中である。その為、生成軌道が最適解であるかは今後の検証によって判断される。検証では、生成軌道に変化が生じなくなるアルゴリズムの収束時に、 $\mathbf{P}_k = \bar{\mathbf{P}}_k$ となって式(3.2.1)が等号になる事実に着目している。Assumption 1 の導入と、後述の解法アルゴリズムでの収束に関する数学的に厳密な考察は、今後の重要課題の一つである。

3.2.2. 時間発展式の線形化

Assumption 1 を用いて, (a)(c)(d)の計算を行い, カルマンフィルタの時間発展式を基準軌道周りで線形化する.

観測更新の間の区間 $k \in [K^-, K^+]$ における, カルマンフィルタの時間発展式は,

$$\mathbf{P}_{K^+|K^+-1} = \left(\prod_{k=K^+-1}^{K^-} \mathbf{F}_k \right) \mathbf{P}_{K^-|K^-} \left(\prod_{k=K^-}^{K^+-1} \mathbf{F}_k^T \right) + \sum_{i=K^-}^{K^+-1} \left[\left(\prod_{k=K^+-1}^{i+1} \mathbf{F}_k \right) \mathbf{Q}_i \left(\prod_{k=i+1}^{K^+-1} \mathbf{F}_k^T \right) \right] \quad (3.2.2.1)$$

である. これの両辺でトレースを取ると

$$\text{tr}(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}) = \text{tr} \left\{ \left(\prod_{k=K^+-1}^{K^-} \mathbf{F}_k \right) \mathbf{P}_{K^-|K^-} \left(\prod_{k=K^-}^{K^+-1} \mathbf{F}_k^T \right) \right\} + \text{tr} \left\{ \sum_{i=K^-}^{K^+-1} \left[\left(\prod_{k=K^+-1}^{i+1} \mathbf{F}_k \right) \mathbf{Q}_i \left(\prod_{k=i+1}^{K^+-1} \mathbf{F}_k^T \right) \right] \right\} \quad (3.2.2.2)$$

となる. ここで式(3.2.2.2)の右辺を $\text{tr}(\mathbf{P}_{K^-|K^-})$, \mathbf{F}_k , \mathbf{Q}_k で微分する. $\text{tr}(\mathbf{P}_{K^-|K^-})$ で微分する場合は Assumption 1 を用いる. これらの結果は以下の通りになる.

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1})}{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K^-|K^-})} \approx \frac{1}{\text{tr}(\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-})} \text{tr} \left[\left(\prod_{k=K^+-1}^{K^-} \mathbf{F}_k \right) \bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-} \left(\prod_{k=K^+-1}^{K^-} \mathbf{F}_k^T \right)^T \right] \quad (3.2.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1})}{\partial \mathbf{F}_k} &= 2 \left(\prod_{l=K^+-1}^{k+1} \mathbf{F}_l \right)^T \left(\prod_{l=K^+-1}^{k+1} \mathbf{F}_l \right) \mathbf{F}_l \\ &\quad \cdot \left\{ \left(\prod_{l=k-1}^{K^--1} \mathbf{F}_l \right) \mathbf{P}_{K^-|K^-} \left(\prod_{l=k-1}^{K^--1} \mathbf{F}_l^T \right)^T + \sum_{i=K^-}^{k-1} \left[\left(\prod_{l=k-1}^{i+1} \mathbf{F}_l \right) \mathbf{Q}_i \left(\prod_{l=k-1}^{i+1} \mathbf{F}_l^T \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2.2.4)$$

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1})}{\partial \mathbf{Q}_k} = \left(\prod_{l=K^+-1}^{k+1} \mathbf{F}_l \right)^T \left(\prod_{l=K^+-1}^{k+1} \mathbf{F}_l \right) \quad (3.2.2.5)$$

ここで, 最終区間である $k \in [K_f, k_f]$ の場合は, $\mathbf{F}_{K^+|K^+-1}$ と \mathbf{Q}_{K^+-1} に関して式(3.2.2.6)の様に置き換えることで計算する.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{K^+|K^+-1} &= \mathbf{H}_{\text{cost}} \mathbf{F}_{K_f} \\ \mathbf{Q}_{K^+-1} &= \mathbf{H}_{\text{cost}} \mathbf{Q}_{K_f-1} \mathbf{H}_{\text{cost}}^T \end{aligned} \quad (3.2.2.6)$$

そして, 予測ステップの式(3.2.2.2)に関しての一次テーラー展開を行うと

$$\begin{aligned}
\text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right) - \text{tr}\left(\bar{\mathbf{P}}_{K^+|K^+-1}\right) &= \frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^-|K^-}\right)} \Bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-} \\ \bar{\mathbf{F}}_k}} \left[\text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^-|K^-}\right) - \text{tr}\left(\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-}\right) \right] \\
&+ \sum_{\text{SUM}} \left\{ \sum_{k=K^-}^{K^+-1} \left[\frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{F}_k} \Bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-} \\ \bar{\mathbf{F}}_k \\ \bar{\mathbf{Q}}_k}} \circ (\mathbf{F}_k - \bar{\mathbf{F}}_k) + \frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{Q}_k} \Bigg|_{\bar{\mathbf{F}}_k} \circ (\mathbf{Q}_k - \bar{\mathbf{Q}}_k) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.2.7-a}$$

の通りである．ここで \sum_{SUM} は、この論文においては、行列の全要素の合計を計算する計算記号とする．これを変形すると、

$$\begin{aligned}
\text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right) &= \frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^-|K^-}\right)} \Bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-} \\ \bar{\mathbf{F}}_k}} \cdot \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^-|K^-}\right) + \sum_{\text{SUM}} \left\{ \sum_{k=K^-}^{K^+-1} \left[\frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{F}_k} \Bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-} \\ \bar{\mathbf{F}}_k \\ \bar{\mathbf{Q}}_k}} \circ \mathbf{F}_k + \frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{Q}_k} \Bigg|_{\bar{\mathbf{F}}_k} \circ \mathbf{Q}_k \right] \right\} \\
&+ \text{tr}\left(\bar{\mathbf{P}}_{K^+|K^+-1}\right) - \frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^-|K^-}\right)} \Bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-} \\ \bar{\mathbf{F}}_k}} \cdot \text{tr}\left(\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-}\right) \\
&- \sum_{\text{SUM}} \left\{ \sum_{k=K^-}^{K^+-1} \left[\frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{F}_k} \Bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-} \\ \bar{\mathbf{F}}_k \\ \bar{\mathbf{Q}}_k}} \circ \bar{\mathbf{F}}_k + \frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{Q}_k} \Bigg|_{\bar{\mathbf{F}}_k} \circ \bar{\mathbf{Q}}_k \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.2.7-b}$$

となり、左辺の $\text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)$ は右辺 1 行目の $\text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^-|K^-}\right)$ 、 \mathbf{F}_k 、 \mathbf{Q}_k によって線形に表すことが出来る．

更に、 φ_{t_k} を予測ステップが行われる時刻 t_k における、状態 \mathbf{x}_{t_k} と制御 \mathbf{u}_{t_k} の要素の一つだとすると、 $\text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)$ を φ_{t_k} で微分した結果は次のようになる．

$$\frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \varphi_{t_k}} = \sum_{\text{SUM}} \left(\frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{F}_k} \circ \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \varphi_{t_k}} + \frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{Q}_k} \circ \frac{\partial \mathbf{Q}_k}{\partial \varphi_{t_k}} \right), \quad \forall \varphi_{t_k} \in \{\mathbf{x}_{t_k}, \mathbf{u}_{t_k}\} \tag{3.2.2.8}$$

以上の計算結果から、基準軌道から計算できる行列 $\mathbf{A}_{\text{P}, K^-}$ 、 $\mathbf{B}_{\text{P}, k}$ 、 $\mathbf{Z}_{\text{P}, K^-}$ を用いれば、カルマ

ンフィルタの時間更新は次のようになる。

$$\text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right) = \mathbf{A}_{p,K^-} \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^-|K^-}\right) + \sum_{k=K^-}^{K^+-1} \left(\mathbf{B}_{p,k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t_k} \\ \mathbf{u}_{t_k} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{Z}_{p,K^-} \quad (3.2.2.9)$$

$$\mathbf{A}_{p,K^-} = \frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^-|K^-}\right)} \bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-} \\ \bar{\mathbf{F}}_k}} \quad (3.2.2.9-a)$$

$$\mathbf{B}_{p,k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{x}_{t_k}^T} \bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-} \\ \bar{\mathbf{F}}_k \\ \bar{\mathbf{Q}}_k \\ \bar{\mathbf{x}}_{t_k}}}, \frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{u}_{t_k}^T} \bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-} \\ \bar{\mathbf{F}}_k \\ \bar{\mathbf{Q}}_k \\ \bar{\mathbf{u}}_{t_k}}} \end{bmatrix} \quad (3.2.2.9-b)$$

$$\mathbf{B}_{\varphi,p,k} = \sum_{\text{SUM}} \left\{ \sum_{k=K^-}^{K^+-1} \left[\frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{F}_k} \bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-} \\ \bar{\mathbf{F}}_k \\ \bar{\mathbf{Q}}_k}} \circ \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \varphi_{t_k}} \bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_{t_k} \\ \bar{\mathbf{u}}_{t_k}}} + \frac{\partial \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right)}{\partial \mathbf{Q}_k} \bigg|_{\bar{\mathbf{F}}_k} \circ \frac{\partial \mathbf{Q}_k}{\partial \varphi_{t_k}} \bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_{t_k} \\ \bar{\mathbf{u}}_{t_k}}} \right] \right\}, \quad \forall \mathbf{B}_{\varphi,p,k} \in \mathbf{B}_{p,k} \quad (3.2.2.9-c)$$

$$\mathbf{Z}_{p,K^-} = \text{tr}\left(\bar{\mathbf{P}}_{K^+|K^+-1}\right) - \mathbf{A}_{p,K^-} \text{tr}\left(\bar{\mathbf{P}}_{K^-|K^-}\right) - \sum_{k=K^-}^{K^+-1} \left(\mathbf{B}_{p,k} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{t_k} \\ \bar{\mathbf{u}}_{t_k} \end{bmatrix} \right) \quad (3.2.2.9-d)$$

3.2.3. 観測更新式の線形化

次に(b)(c)(d)を計算することで、観測更新を線形化する、
観測更新は以下の式(3.2.3.1)を行うことで実行できる。

$$\mathbf{P}_{K|K} = \mathbf{P}_{K|K-1} - \mathbf{P}_{K|K-1} \mathbf{H}^T \left(\mathbf{H} \mathbf{P}_{K|K-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_K \right)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{K|K-1} \quad (3.2.3.1)$$

両辺にトレース値を取ると、

$$\text{tr}\left(\mathbf{P}_{K|K}\right) = \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K|K-1}\right) - \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K|K-1} \mathbf{H}^T \left(\mathbf{H} \mathbf{P}_{K|K-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_K \right)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{K|K-1}\right) \quad (3.2.3.2)$$

である。ここで式(3.2.3.2)の右辺を $\text{tr}\left(\mathbf{P}_{K|K-1}\right)$, \mathbf{R}_K で Assumption 1 を利用して微分すると、その結果は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K|K})}{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K|K-1})} &\approx 1 - \frac{2}{\text{tr}(\bar{\mathbf{P}}_{K|K-1})} \text{tr} \left[\bar{\mathbf{P}}_{K|K-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{K|K-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_K)^{-1} \mathbf{H} \bar{\mathbf{P}}_{K|K-1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\text{tr}(\bar{\mathbf{P}}_{K|K-1})} \text{tr} \left[(\mathbf{H} \bar{\mathbf{P}}_{K|K-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_K)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{K|K-1}^T \mathbf{P}_{K|K-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \bar{\mathbf{P}}_{K|K-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_K)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{K|K-1} \mathbf{H}^T \right] \end{aligned} \quad (3.2.3.3)$$

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K|K-1})}{\partial \mathbf{R}_K} = \left[(\mathbf{H} \mathbf{P}_{K|K-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_K)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{K|K-1}^T \mathbf{P}_{K|K-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{K|K-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_K)^{-1} \right]^T \quad (3.2.3.4)$$

そして、基準軌道から計算できる行列 $\mathbf{A}_{m,k}$, $\mathbf{B}_{m,k}$, $\mathbf{Z}_{m,k}$ を用いれば、予測更新での式(3.2.2.7)式(3.2.2.8)と同様の手法により、基準軌道周りで線形化出来る。

$$\text{tr}(\mathbf{P}_{K|K}) = \mathbf{A}_{m,K} \text{tr}(\mathbf{P}_{K|K-1}) + \mathbf{B}_{m,K} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{I_k} \\ \mathbf{u}_{I_k} \end{bmatrix} + \mathbf{Z}_{m,K} \quad (3.2.3.5)$$

$$\mathbf{A}_{m,K} = \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K|K})}{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K|K-1})} \bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K|K-1} \\ \bar{\mathbf{R}}_K}} \quad (3.2.3.5-a)$$

$$\mathbf{B}_{m,K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K|K})}{\partial \mathbf{x}_{I_k}^T} \bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K|K-1} \\ \bar{\mathbf{R}}_K \\ \bar{\mathbf{x}}_{I_k}}}, \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K|K})}{\partial \mathbf{u}_{I_k}^T} \bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K|K-1} \\ \bar{\mathbf{R}}_K \\ \bar{\mathbf{u}}_{I_k}}} \end{bmatrix} \quad (3.2.3.5-b)$$

$$\mathbf{B}_{\varphi,m,K} = \sum_{\text{SUM}} \left[\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{K|K})}{\partial \mathbf{R}_K} \bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{P}}_{K|K-1} \\ \bar{\mathbf{R}}_K}} \circ \frac{\partial \mathbf{R}_K}{\partial \varphi_{I_k}} \bigg|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_{I_k} \\ \bar{\mathbf{u}}_{I_k}}} \right], \quad \forall \mathbf{B}_{\varphi,m,K} \in \mathbf{B}_{m,K} \quad (3.2.3.5-c)$$

$$\mathbf{Z}_{m,K} = \text{tr}(\bar{\mathbf{P}}_{K|K}) - \mathbf{A}_{m,K} \text{tr}(\bar{\mathbf{P}}_{K|K-1}) - \bar{\mathbf{B}}_{m,K} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{I_k} \\ \bar{\mathbf{u}}_{I_k} \end{bmatrix} \quad (3.2.3.5-d)$$

3.2.4. 推定誤差共分散の線形化結果

式(3.2.2.9)と式(3.2.3.5)より、評価関数は以下のように基準移動周りににおいて、状態 \mathbf{x}_k と制御 \mathbf{u}_k に対し以下のように線形化できる。

$$\begin{aligned}
\text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right) &= \mathbf{A}_{p, K^-} \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^-|K^-}\right) + \sum_{k=K^-}^{K^+-1} \left(\mathbf{B}_{p, k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t_k}^i \\ \mathbf{u}_{t_k}^i \end{bmatrix} \right) + \mathbf{Z}_{p, K^-}, \\
\text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+}\right) &= \mathbf{A}_{m, K^+} \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}\right) + \mathbf{B}_{m, K^+} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t_{K^+}} \\ \mathbf{u}_{t_{K^+}} \end{bmatrix} + \mathbf{Z}_{m, K^+}, \\
\forall [K^-, K^+] &\in \{[K_1, K_2], [K_2, K_3], \dots, [K_{f-1}, K_f]\}
\end{aligned} \tag{3.2.4.1}$$

$$J = \text{tr}\left(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{k_f|k_f-1} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T\right) = \mathbf{A}_{p, K_f} \text{tr}\left(\mathbf{P}_{K_f|K_f}\right) + \sum_{k=K_f}^{k_f} \left(\mathbf{B}_{p, k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t_k} \\ \mathbf{u}_{t_k} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{Z}_{p, K_f} \tag{3.2.4.2}$$

3.3. 非凸最適制御問題の凸問題への緩和

前節より評価関数が基準軌道周りで線形化出来ることが示された．この結果を利用し Problem 1 を高速に解く手法を示す．SCvx のような元の問題の凸問題への緩和と凸最適化を繰り返す場合，連続時間最適制御問題の離散化が行われる．式(2.3.2)等の状態方程式は，ここで時間方向に離散化される．今回は運動方程式の他にカルマンフィルタも存在するが，状態方程式とフィルタの離散化は同時刻に同区間で行われる方法をとるものとする．つまりこの離散時間間隔は，実際のフィルタの時間更新ステップと同一である必要はない．以上の事を踏まえて，次の(A)~(D)により，式(2.3.1)~式(2.3.6)の元の最適制御問題は凸化された緩和問題に変形される．

- (A) 非線形状態方程式の一次テーラー展開精度での線形化
- (B) 連続時間最適制御問題の時間方向への離散化
- (C) 緩和変数の導入
- (D) 信頼領域の導入

航法アルゴリズムの拡張カルマンフィルタは通常(A)(B)の計算を含んでいる．そこで，宇宙機の状態方程式や制約条件に関して，主に(A)(B)の計算を行う．(C)は大域的な収束性の向上のために行われ，これにより，収束の過程で状態方程式の拘束を逸脱しながら，より大域的な最適解に収束することが許される．最後に，(D)での信頼領域による制約条件により，局所的な最適値に収束する際の数値的安定性を高める．以下，式(2.3.1)~式(2.3.6)を(A)~(D)に従って凸型の緩和問題に変形する．

(A) 非線形状態方程式の一次テーラー展開精度での線形化

以下のように，状態方程式(2.3.2)は一次テーラー展開できる．

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.3.2)$$

$$\dot{\mathbf{x}} - \bar{\dot{\mathbf{x}}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\bar{\mathbf{x}} \atop \bar{\mathbf{u}}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{\bar{\mathbf{x}} \atop \bar{\mathbf{u}}} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \quad (3.3.1)$$

そして，これを整理すれば，基準軌道から計算できる行列 $\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_s, \mathbf{Z}_s$ を用いて，式(3.3.2)の様に線形化出来る．

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_s \mathbf{x} + \mathbf{B}_s \mathbf{u} + \mathbf{Z}_s \quad (3.3.2)$$

$$\mathbf{A}_s = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\bar{\mathbf{x}} \atop \bar{\mathbf{u}}} \quad (3.3.2-a)$$

$$\mathbf{B}_s = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{\bar{\mathbf{x}} \atop \bar{\mathbf{u}}} \quad (3.3.2-b)$$

$$\mathbf{Z}_s = \bar{\dot{\mathbf{x}}} - \mathbf{A}_s \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{B}_s \bar{\mathbf{u}} \quad (3.3.2-c)$$

次に式(2.3.4)の n 個の不等式制約のうち非凸の制約 ς について線形化を行う．状態方程式と同様に一次テーラー展開を行う．

$$0 \leq \mathbf{h}_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \forall \epsilon \in \{1, \dots, n\} \quad (2.3.4)$$

$$0 \leq \mathbf{h}_\varsigma(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_\varsigma}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\bar{\mathbf{x}} \atop \bar{\mathbf{u}}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_\varsigma}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{\bar{\mathbf{x}} \atop \bar{\mathbf{u}}} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}), \quad \{\forall \varsigma \in \{1, \dots, n\} | \text{Non Convex } \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\} \quad (3.3.3)$$

そして，これは次のように基準軌道から計算できる行列 $\mathbf{A}_{c,\varsigma}, \mathbf{B}_{c,\varsigma}, \mathbf{Z}_{c,\varsigma}$ で線形化出来る．

$$0 \leq \mathbf{A}_{c,\varsigma} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{c,\varsigma} \mathbf{u} + \mathbf{Z}_{c,\varsigma}, \quad \{\forall \varsigma \in \{1, \dots, n\} | \text{Non Convex } \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\} \quad (3.3.4)$$

$$\mathbf{A}_{c,\varsigma} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_\varsigma}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\bar{\mathbf{x}} \atop \bar{\mathbf{u}}} \quad (3.3.4-a)$$

$$\mathbf{B}_{c,\varsigma} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_\varsigma}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{\bar{\mathbf{x}} \atop \bar{\mathbf{u}}} \quad (3.3.4-b)$$

$$\mathbf{Z}_{c,\varsigma} = \mathbf{h}_\varsigma(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{A}_{c,\varsigma} \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{B}_{c,\varsigma} \bar{\mathbf{u}} \quad (3.3.4-b)$$

(B) 連続時間最適制御問題の時間方向への離散化

線形化された状態方程式(3.3.2)はまだ連続時間であり、これを離散時間化する。離散時間の区間幅が一様な場合については式(3.3.5)の様に離散時間時刻 t_k を定義する。

$$t_k \triangleq \frac{k}{k_f} t_f, \quad \forall k \in [0, k_f] \quad (3.3.5)$$

そして、連続時間での状態遷移の式(3.3.2)を、ステップ間の状態遷移に書き換える。この際、制御入力の非連続の変化を避けるため、SCvx では制御値が時間に対し線形に変化するものとしてモデル化している。これは、各ステップでの制御値と共に以下の式(3.3.6)で表せられる。

$$\mathbf{u}(t) = \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} \mathbf{u}_k + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \mathbf{u}_{k+1}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \quad (3.3.6)$$

この様な場合、あるステップ k と次のステップ $k+1$ の間の状態の関係は、以下の式(3.3.7)のようになる。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}_{s,k} \mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{B}}_{s,k}^- \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{B}}_{s,k}^+ \mathbf{u}_{k+1} + \tilde{\mathbf{Z}}_{s,k}, \quad \forall k \in [0, k_f] \quad (3.3.7)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{s,k} = e^{A_{s,jk} (t_{k+1} - t_k)} \quad (3.3.7-a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{s,k}^- = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} e^{A_{s,jk} (t - t_k)} \mathbf{B}_{s,jk} dt \quad (3.3.7-b)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{s,k}^+ = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} e^{A_{s,jk} (t - t_k)} \mathbf{B}_{s,jk} dt \quad (3.3.7-c)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{s,k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A_{s,jk} (t - t_k)} \mathbf{Z}_{s,jk} dt \quad (3.3.7-d)$$

(C) 緩和変数の導入

大域的な収束性の向上のため、各時刻 k の状態方程式に緩和変数 \mathbf{v}_k を加える。緩和変数は評価関数にも過大な重みと共に加えられ、アルゴリズム収束時には数値的に無視できる大きさになる。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}_{s,k} \mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{B}}_{s,k}^- \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{B}}_{s,k}^+ \mathbf{u}_{k+1} + \tilde{\mathbf{Z}}_{s,k} + \mathbf{v}_k, \quad \forall k \in [0, k_f] \quad (3.3.8)$$

(D) 信頼領域の導入

信頼領域は局所的な最適性が保たれる範囲 $\|\boldsymbol{\eta}\|_2$ を表す。解の生成範囲に制限を設けることで、数値的な安定性を確保する。生成された解から安定性が保たれてないと判れば、信頼範囲 $\boldsymbol{\eta}_{\max}$ を調整する。信頼範囲は次の式(3.3.9)のように計算される。

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \right\|_2 \quad (3.3.9)$$

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2 \leq \eta_{\max} \quad (3.3.10)$$

以上の結果を用いると、非凸の航法最適制御問題 Problem 1 は、以下の式(3.3.11)~式(3.3.19)の凸型の最適制御問題 Problem 2 に書き直される。ここで、評価関数(3.3.11)の w_p, w_v, w_η は重み値である。

Problem 2: Navigation-Optimal Convex Optimal Control Problem

Cost Function

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & J_2 = w_p \text{tr} \left(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{k_f} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T \right) + w_v \|\mathbf{v}\|_2 + w_\eta \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \\ \text{Subject to} \quad & \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Boundary Condition:

$$0 = \mathbf{g}_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \forall \varepsilon \in \{1, \dots, m\} \quad (3.3.12)$$

Dynamics:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}_{s,k} \mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{B}}_{s,k}^- \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{B}}_{s,k}^+ \mathbf{u}_{k+1} + \tilde{\mathbf{Z}}_{s,k} + \mathbf{v}_k, \quad \forall k \in [0, k_f] \quad (3.3.13)$$

Convex Constraints:

$$0 \leq \mathbf{h}_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \{\forall \epsilon \in \{1, \dots, n\} | \text{Convex} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\} \quad (3.3.14)$$

Non-Convex Constraints:

$$0 \leq \mathbf{A}_{c,\varsigma} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{c,\varsigma} \mathbf{u} + \mathbf{Z}_{c,\varsigma}, \quad \{\forall \varsigma \in \{1, \dots, n\} | \text{Non Convex} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\} \quad (3.3.15)$$

Navigation:

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1} \right) &= \mathbf{A}_{p,K^-} \text{tr} \left(\mathbf{P}_{K^-|K^-} \right) + \sum_{k=K^-}^{K^+-1} \left(\mathbf{B}_{p,k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t_k}^i \\ \mathbf{u}_{t_k}^i \end{bmatrix} \right) + \mathbf{Z}_{p,K^-}, \\ \text{tr} \left(\mathbf{P}_{K^+|K^+} \right) &= \mathbf{A}_{m,K^+} \text{tr} \left(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1} \right) + \mathbf{B}_{m,K^+} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t_{K^+}} \\ \mathbf{u}_{t_{K^+}} \end{bmatrix} + \mathbf{Z}_{m,K^+}, \\ \forall [K^-, K^+] &\in \{[K_1, K_2], [K_2, K_3], \dots, [K_{f-1}, K_f]\} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

$$\text{tr} \left(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{k_f|k_f-1} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T \right) = \mathbf{A}_{p,K_f} \text{tr} \left(\mathbf{P}_{K_f|K_f} \right) + \sum_{k=K_f}^{k_f} \left(\mathbf{B}_{p,k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t_k} \\ \mathbf{u}_{t_k} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{Z}_{p,K_f} \quad (3.3.17)$$

Trust region:

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \right\|_2 \quad (3.3.18)$$

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2 \leq \eta_{\max} \quad (3.3.19)$$

3.4. 解法アルゴリズムの提案

凸最適化問題に緩和された Problem 2 を繰り返し利用することで、元の最適制御問題を解くアルゴリズムを提案する。これまでの凸最適化による軌道生成では、カルマンフィルタの共分散は扱われておらず、今回初めて、それを考慮したアルゴリズムを提案する。

Algorithm 1:

Initialization:

初期軌道の状態 \mathbf{x}_k^0 , $\forall k \in [0, k_f]$ と制御 \mathbf{u}_k^0 , $\forall k \in [0, k_f]$ を選択する。

\mathbf{x}_k^0 と \mathbf{u}_k^0 を初期基準軌道 $\bar{\mathbf{x}}_k^{-1}$, $\bar{\mathbf{u}}_k^{-1}$ とする。

Successive Problem Convexification and Convex Optimization Loop:

for $i \in [1, i_{\max})$

Step (1): 基準軌道を宇宙機が飛行した際のカルマンフィルタの動作を計算する。フィルタの共分散 \mathbf{P}_k^i , フィルタ行列 \mathbf{F}_k^i , \mathbf{Q}_k^i , \mathbf{R}_k^i を計算する。

Step (2): 基準軌道とフィルタ共分散, フィルタ行列から, Problem 2 で用いる以下の行列を計算する。

• Dynamics: $\tilde{\mathbf{A}}_{s,k}^-$, $\tilde{\mathbf{B}}_{s,k}^-$, $\tilde{\mathbf{B}}_{s,k}^+$, $\tilde{\mathbf{Z}}_{s,k}$, $\forall k \in [0, k_f]$.

• Non-Convex Constraints: $\mathbf{A}_{c,\varsigma}$, $\mathbf{B}_{c,\varsigma}$, $\mathbf{Z}_{c,\varsigma}$
 $\{\forall \varsigma \in \{1, \dots, n\} | \text{Non Convex Constraint}\}$.

• Navigation: $\mathbf{A}_{p,K}$, $\mathbf{B}_{p,k}$, $\mathbf{Z}_{p,K}$, $\mathbf{A}_{m,K}$, $\mathbf{B}_{m,K}$, $\mathbf{Z}_{m,K}$, $\forall k \in [0, k_f]$, $\forall K \in \mathbf{K}$.

Step (3): Problem 2 を解き, 状態 \mathbf{x}_k^i と制御 \mathbf{u}_k^i , そして緩和値 ν を算出する。

Step (4): 収束判定, 基準軌道の再設定, 信頼領域の調整を行う。

If $\|\mathbf{x}_k^i - \mathbf{x}_k^{i-1}\|_2 \leq \Delta$

Break;

else

• 信頼領域 η_{\max} の調整。

• 得られた状態 \mathbf{x}_k^i と制御 \mathbf{u}_k^i を次の基準軌道 $\bar{\mathbf{x}}_k^{i+1}$, $\bar{\mathbf{u}}_k^{i+1}$ とする。

End

End

最初に、初期軌道となる状態 \mathbf{x}_k^0 と制御 \mathbf{u}_k^0 を入力する。この初期軌道における各離散時刻の変数間では、運動学的な一貫性が成り立つ必要はない。その後、非凸最適制御問題の凸化と凸最適化を最大 i_{\max} 回繰り返す。Step (1)では基準軌道を飛行した場合のカルマンフィルタの動作を計算し、基準となるフィルタの行列や共分散を計算する。Step (2)では Problem 1 の非凸最適制御問題を Problem 2 の凸最適制御問題にするための各線形化行列を計算する。Step (3)では Problem 2 を凸最適化で解く。Step (4)では凸最適化により得られた解から、収束判定、基準軌道への設定、信頼領域の調整を行う。解の変化量が小さく数値的に無視できる大きさ Δ 以下だった場合は、解が収束値であるとみなし、計算を終了する。また、計算が収束しない場合でも繰り返し回数が i_{\max} に到達した場合は計算を終了する。もし、Step (3)で

得られた軌道が、数値的に無視できる誤差の範囲内で基準軌道と一致している場合、得られた軌道では Assumption 1 は等式となる。そのため、この軌道は Problem 1 の実行可能解の一つであることは保証されている。

第4章 火星着陸例題での提案手法の検証設定

本稿では、火星着陸例題を利用した提案手法の検証設定について示す。火星着陸例題では、(a)提案アルゴリズムでの航法最適軌道の生成と燃料最適との比較、(b)モンテカルロ解析による生成された航法最適軌道の評価、(c)航法センサの観測更新数と終端時間の変化による生成軌道の変化、を検証する。今回は、火星への宇宙機着陸の終端誘導制御を例にする。着陸の状況については、NASA/JPL のキュリオシティの例を参考に設定した[40]。

4.1. 火星着陸例題の問題設定

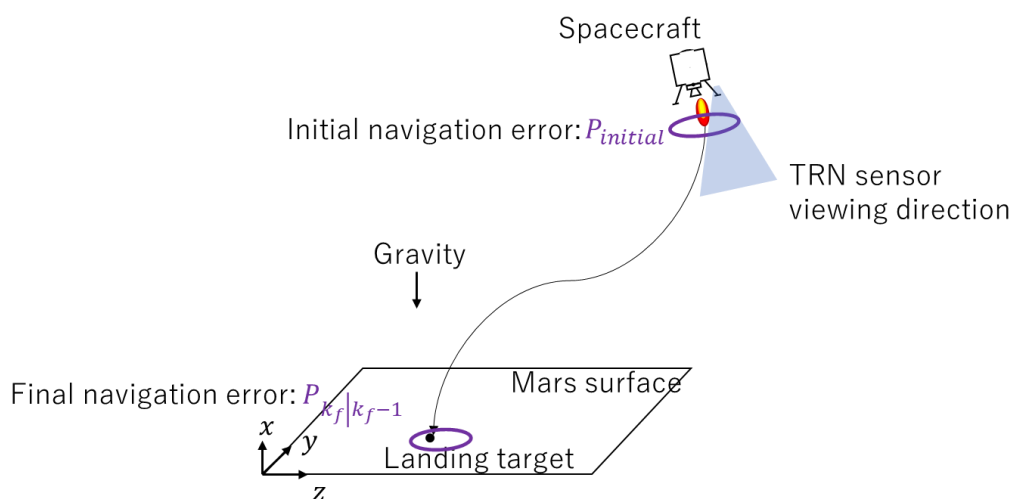


Fig 4.1-1 火星への宇宙機着陸問題の概念図

本例題で扱う問題設定を示す。まず座標系について示す。今回宇宙機に固定された機体座標系(B系)と惑星表面に固定された座標系(I系)がある。B系の座標原点は宇宙機の重心にあり機軸方向がX軸正方向である。またI系は惑星表面に固定された座標系で、地表上向きに垂直な方向をX軸とする。重力は惑星表面のX軸負方向のみに作用し、水平方向に関しては慣性系が成り立つものとする。宇宙機には推力を発生させるロケットエンジンと、IMU、TRN用のセンサが搭載されている。ロケットエンジンは2軸のジンバル上に固定されており、重心から距離 $r_{T \leftarrow B}$ の位置で推力を発生させる。TRN用のセンサは機体に固定されておりX軸負方向を向いている。機体質量は推進剤の消費と共に軽くなるが、重心位置と機体の慣性モーメントは変化しないものとする。

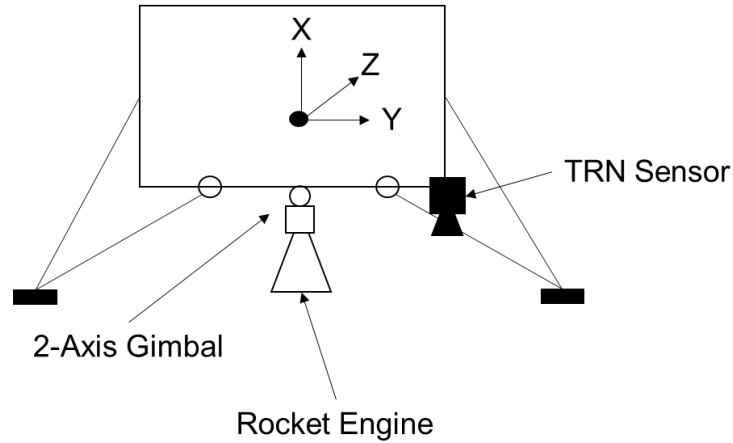


Fig 4.1-2 火星着陸例題での宇宙機の模式図

火星着陸におけるシナリオは次の通りである。宇宙機は火星大気突入前、地球からの電波を用いた軌道決定(Delta Differential One-way Range: DDOR)を行い、最新の航法データを取得する。そして火星大気突入を行い滑空飛行する。滑空中は IMU の計測データをもとに航法と制御が行われ、この間、航法誤差は拡大を続ける。高度が低下すると火星大気密度は上昇し、機体の速度は一層低下する。大気突入前の機体の運動エネルギーのほとんどは、対気抵抗で失われる。そして高度数キロメートルでロケットエンジンを噴射し、動力降下し着陸する。この際、機体に取り付けられた TRN センサを用いて、大気減速中に発生した IMU の航法値の航法誤差をカルマンフィルタにより修正する。高度が低下しセンサの視線距離が短くなると、地形をより詳細に取得することが可能になり、TRN 精度は向上する。しかし視線距離が短くなりすぎると、宇宙機に事前に記録されている地図情報の粗さの影響から、地形照合が難しくなる。

今回は、動力降下開始から着陸までを扱う。機体運動は 6 自由度でモデル化され、TRN では機体の位置と速度が計測されるものとする。

4.1.1. 宇宙機の運動モデル

宇宙機の状態量は $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{20 \times 1}$ と制御量 $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ は以下の通りである。

$$\mathbf{x}(t) \triangleq [m \quad \mathbf{r}_I \quad \mathbf{v}_I \quad \mathbf{q}_{I \leftarrow B} \quad \boldsymbol{\omega}_B \quad \mathbf{T}_B \quad \dot{\mathbf{T}}_B]^T \quad (4.1.1.1)$$

$$\mathbf{u}(t) \triangleq [\ddot{\mathbf{T}}]^T \quad (4.1.1.2)$$

ここで、状態量 $\mathbf{x}(t)$ における m は機体質量で、 \mathbf{r}_I と \mathbf{v}_I は I 系での位置と速度である。 $\mathbf{q}_{I \leftarrow B}$ は宇宙機の姿勢を表すクォータニオンであり、B 系から I 系への姿勢変化を示す。 $\boldsymbol{\omega}_B$ は B 系での機体の角速度ベクトルである。 \mathbf{T}_B は B 系で見た宇宙機の推力ベクトルであり、 $\dot{\mathbf{T}}_B$ は推力の時間変化である。また、制御量 $\mathbf{u}(t)$ における $\ddot{\mathbf{T}}$ は推力の時間変化の 2 階微分値である。

次に, 宇宙機の状態方程式 $\mathbf{f}_k(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ を示す. これは, ロケットエンジンの比推力の I_{sp} , 地球の標準重量の g_{earth} , B 系から I 系へ方向余弦行列(Direction Cosine Matrix: DCM)の $\mathbf{C}_{I \leftarrow B}$, 機体角速度 $\boldsymbol{\omega}_B$ の成分からなる交代行列 $\boldsymbol{\Omega}$, 機体の慣性テンソル \mathbf{I}_B , また重力ベクトル \mathbf{g}_I から計算され, 以下のように書ける.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \triangleq \begin{bmatrix} -\frac{1}{g_{earth} \cdot I_{sp}} \|\mathbf{T}_B(t)\|_2 \\ \mathbf{v}_I(t) \\ \frac{1}{m(t)} \mathbf{C}_{I \leftarrow B}(t) \mathbf{T}_B(t) + \mathbf{g}_I \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_B(\boldsymbol{\omega}_B(t)) \cdot \mathbf{q}_{I \leftarrow B}(t) \\ \mathbf{I}_B^{-1} (\mathbf{r}_{T \leftarrow B} \times \mathbf{T}_B(t) - \boldsymbol{\omega}_B(t) \times \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B(t)) \\ \dot{\mathbf{T}}_B(t) \\ \dot{\mathbf{T}}_B(t) \end{bmatrix} \quad (4.1.1.3)$$

ここで, $\mathbf{C}_{I \leftarrow B}(t)$ と $\boldsymbol{\Omega}_B(\boldsymbol{\omega}_B(t))$ は次のように表される.

$$\mathbf{C}_{I \leftarrow B}(t) = \begin{bmatrix} q_4^2 - q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 & 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & 2(q_2 q_4 + q_1 q_3) \\ 2(q_3 q_4 + q_1 q_2) & q_4^2 - q_3^2 + q_2^2 - q_1^2 & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) & 2(q_1 q_4 + q_2 q_3) & q_4^2 + q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.1.1.4)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_B(\boldsymbol{\omega}_B(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.1.5)$$

ここに, 機体の運動に関する複数の制約条件が追加される. まず機体の設計上の制約を示す. 最初に, 機体質量は, 推進が含まれない乾燥質量 m_{dry} 以上である必要があるため,

$$m_{dry} \leq m(t) \quad (4.1.1.6)$$

である. また推力は最小推力 T_{min} と最大推力 T_{max} からなるスロットリング幅内である必要があるため.

$$T_{min} \leq \|\mathbf{T}_B(t)\|_2 \leq T_{max} \quad (4.1.1.7)$$

である. さらに, ジンバル角の最大駆動角 δ_{max} の制約から,

$$\cos(\delta_{max}) \|\mathbf{T}_B(t)\|_2 \leq T_x(t) \quad (4.1.1.8)$$

となる. 次に機体運動の安全制約を示す. 機体が着陸地点周囲の障害物と衝突することを避

けるため、機体の降下軌道が、着陸地点に頂点を持つ逆円錐状の領域のみ飛行することを許す滑空傾斜制約を設ける。この時の頂点での半頂角を γ_{gs} とすれば、

$$\sqrt{r_y^2(t) + r_z^2(t)} \cdot \tan(\gamma_{gs}) \leq r_x(t), \quad (4.1.1.9)$$

である。さらに、機体機軸方向の最大傾斜角 θ_{\max} の制約は、クォータニオンの成分を用いて、

$$\cos(\theta_{\max}) \leq 1 - 2[q_2^2(t) + q_3^2(t)] \quad (4.1.1.10)$$

である。最後に、最大角速度制約 ω_{\max} として

$$\|\omega_B(t)\|_2 \leq \omega_{\max} \quad (4.1.1.11)$$

を設ける。

4.1.2. 宇宙機の航法モデル

宇宙機の航法アルゴリズムは、IMU の時間積分による慣性航法と、間欠的に地形データを取得し照合する TRN を、拡張カルマンフィルタで融合した複合航法である。IMU の時間積分による慣性航法は、IMU のバイアス誤差とホワイトガウスノイズによって精度が悪化していく。カルマンフィルタは、直接 TRN で計測される位置や速度の他に、誤差の時間発展のダイナミクスから姿勢や IMU のバイアス誤差も推定する。以下に慣性航法で用いられる状態量 $\mathbf{x}_{\text{INS}} \in \mathbb{R}^{16 \times 1}$ と、カルマンフィルタで使われる状態量 $\mathbf{x}_{\text{KF}} \in \mathbb{R}^{16 \times 1}$ 、観測量 $\mathbf{y}_{\text{KF}} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ を示す。

$$\mathbf{x}_{\text{INS}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{q}_{1 \leftarrow B} & \mathbf{b}_{\text{ac}} & \mathbf{b}_{\text{gy}} \end{bmatrix}^T \quad (4.1.2.1)$$

$$\mathbf{x}_{\text{KF}} \triangleq \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_1 & \delta \mathbf{v}_1 & \delta \mathbf{q}_{1 \leftarrow B} & \delta \mathbf{b}_{\text{ac}} & \delta \mathbf{b}_{\text{gy}} \end{bmatrix}^T \quad (4.1.2.2)$$

$$\mathbf{y}_{\text{KF}} \triangleq \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_1 & \delta \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^T \quad (4.1.2.3)$$

ここで、 \mathbf{b}_{ac} と \mathbf{b}_{gy} はそれぞれ IMU の加速度と角速度のバイアス推定値である。カルマンフィルタの状態量 \mathbf{x}_{KF} は慣性航法の各変数の誤差である。慣性航法での計算過程は次の通りである。

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{INS}}(t) = \mathbf{f}_{\text{INS}}(\mathbf{x}_{\text{INS}}(t), \mathbf{a}_{\text{IMU}}(t), \boldsymbol{\omega}_{\text{IMU}}(t)) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_I(t) \\ \mathbf{C}_{I \leftarrow B}(t) \cdot [\mathbf{a}_{\text{IMU}}(t) - \mathbf{b}_{\text{ac}}(t)] + \mathbf{g}_I \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{\text{IMU}}(t) - \mathbf{b}_{\text{gy}}(t)) \mathbf{q}_{I \leftarrow B}(t) \\ -\frac{\mathbf{b}_{\text{ac}}(t)}{\mathbf{T}_{b_{\text{ac}}}} \\ -\frac{\mathbf{b}_{\text{gy}}(t)}{\mathbf{T}_{b_{\text{gy}}}} \end{bmatrix} \quad (4.1.2.4)$$

ここで、 $\mathbf{T}_{b_{\text{ac}}}$ と $\mathbf{T}_{b_{\text{gy}}}$ はそれぞれ IMU の加速度と角速度のバイアス変化の時定数である。慣性航法では、 $\mathbf{f}_{\text{INS}}(\mathbf{x}_{\text{INS}}(t), \mathbf{a}_{\text{IMU}}(t), \boldsymbol{\omega}_{\text{IMU}}(t))$ を微小時間ごとに積分し、誘導制御に使われる最新の航法値を算出する。

次に、慣性航法の誤差を推定するカルマンフィルタの推定アルゴリズムを示す。まず、慣性航法の誤差 \mathbf{x}_{KF} の時間発展式と、 \mathbf{y}_{KF} による観測式は次のように書くことが出来る。

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{KF}}(t) = \mathbf{f}_{\text{KF}}(\mathbf{x}_{\text{INS}}(t), \mathbf{a}_{\text{IMU}}(t), \boldsymbol{\omega}_{\text{IMU}}(t)) + \mathbf{w}_p(t) \quad (4.1.2.5)$$

$$\mathbf{y}_{\text{KF}}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}_{\text{KF}}(t) + \mathbf{w}_m(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (4.1.2.6)$$

ここで、 \mathbf{w}_p は IMU のホワイトガウスノイズを示しており、このノイズ強度は宇宙機の運動によって変化しない。また $\mathbf{w}_m(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ は TRN 用センサの観測ノイズを示しており、これはセンサの視線距離等によって変化するため、宇宙機の状態量 $\mathbf{x}(t)$ や制御量 $\mathbf{u}(t)$ が変数に含まれている。式(4.1.2.5)でのフィルタ状態量の時間変化 $\mathbf{f}_{\text{KF}}(\mathbf{x}_{\text{INS}}(t), \mathbf{a}_{\text{IMU}}(t), \boldsymbol{\omega}_{\text{IMU}}(t))$ は次のように書き表せる。

$$\mathbf{f}_{\text{KF}}(\mathbf{x}_{\text{INS}}(t), \mathbf{a}_{\text{IMU}}(t), \boldsymbol{\omega}_{\text{IMU}}(t)) = \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{INS}}((\mathbf{x}_{\text{INS}}(t), \mathbf{a}_{\text{IMU}}(t), \boldsymbol{\omega}_{\text{IMU}}(t)))}{\partial \mathbf{x}_{\text{INS}}^T} \quad (4.1.2.7)$$

また、式(4.1.2.5)による時間発展のノイズ \mathbf{w}_p は、加速度と角速度のノイズを $\mathbf{w}_{\text{ac}}, \mathbf{w}_{\text{gy}}$ として

$$\mathbf{w}_p(t) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{3 \times 1} & \mathbf{0}^{3 \times 1} & \mathbf{0}^{4 \times 1} & \mathbf{w}_{\text{ac}}^{3 \times 1}(t) & \mathbf{w}_{\text{gy}}^{3 \times 1}(t) \end{bmatrix}^T \quad (4.1.2.8)$$

であり、プロセスノイズ行列 $\mathbf{q}_p \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ は、 \mathbf{w}_{ac} と \mathbf{w}_{gy} の分散値をそれぞれ $\mathbf{q}_{\text{ac}}, \mathbf{q}_{\text{gy}}$ と表すと

$$\mathbf{q}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{10 \times 10} & \mathbf{0}^{10 \times 3} & \mathbf{0}^{10 \times 3} \\ \mathbf{0}^{3 \times 10} & \mathbf{q}_{\text{ac}}^{3 \times 3} & \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ \mathbf{0}^{3 \times 10} & \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{q}_{\text{gy}}^{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.1.2.9)$$

である。また観測式(4.1.2-6)のノイズ \mathbf{w}_m と観測行列 \mathbf{H} は、位置と速度の計測ノイズを

$\mathbf{w}_r, \mathbf{w}_v$ として,

$$\mathbf{w}_m(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{w}_r^{3 \times 1}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) & \mathbf{w}_v^{3 \times 1}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{bmatrix}^T \quad (4.1.2.10)$$

$$\mathbf{H} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{3 \times 3} & \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{0}^{3 \times 4} & \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{I}^{3 \times 3} & \mathbf{0}^{3 \times 4} & \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{0}^{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.1.2.11)$$

であり, 観測ノイズ行列 \mathbf{R}_k は, 位置と速度の観測ノイズ $\mathbf{w}_r, \mathbf{w}_v$ の分散値をそれぞれ $\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_v$ として,

$$\mathbf{R}_k \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r^{3 \times 3}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k)) & \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{q}_v^{3 \times 3}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k)) \end{bmatrix} \quad (4.1.2.12)$$

である. 最後に, 連続時間で表されている式(4.1.2-5)を, 離散化時刻 t_k ごとに離散化すると以下のようになる.

$$\mathbf{F}_k \triangleq \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\mathbf{f}_{\text{KF}}(t)] dt \quad (4.1.2.13)$$

$$\mathbf{Q}_k \triangleq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ \mathbf{f}_{\text{KF}}(t) \cdot \mathbf{q}_p \cdot \mathbf{f}_{\text{KF}}(t)^T \right\} dt \quad (4.1.2.14)$$

4.1.3. TRN の観測ノイズモデル

TRN の観測ノイズモデルについて示す. 今回の問題設定では, センサの視線距離によって観測精度が変化するモデルであるが, 接近しすぎると精度の低下や地形照合の失敗が発生する. そこで, 観測ノイズの式を, 視線距離に対し線形に増減する項と, 逆数として作用し視線距離ゼロでは無限大に発散する項で構成する. 式(4.1.3.1)に観測ノイズを示す.

$$\mathbf{R}_k = \left(L + \frac{l_{\text{opt}}^2}{L} \right)^2 \mathbf{R}^* \quad (4.1.3.1)$$

$$L = \frac{r_x}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)} \quad (4.1.3.1\text{-a})$$

$$\mathbf{R}^* \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r^{*3 \times 3} & \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{q}_v^{*3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.1.3.1\text{-b})$$

ここで, l_{opt} は観測ノイズが最小になる視線距離を示している. また \mathbf{R}^* は基準となる距離での観測ノイズ行列である. そして L は視線距離を表し, 宇宙機の高度 r_x と姿勢を表すクォータニオンによって変化する. 視線距離が $l_{\text{opt}} \leq L$ の場合, 視線距離が大きくなるに従

い視線距離 L と観測精度は線形の関係に近づくが、 $L \leq l_{opt}$ の場合は、視線距離 L が小さくなるにつれて急速に観測精度が悪化する。

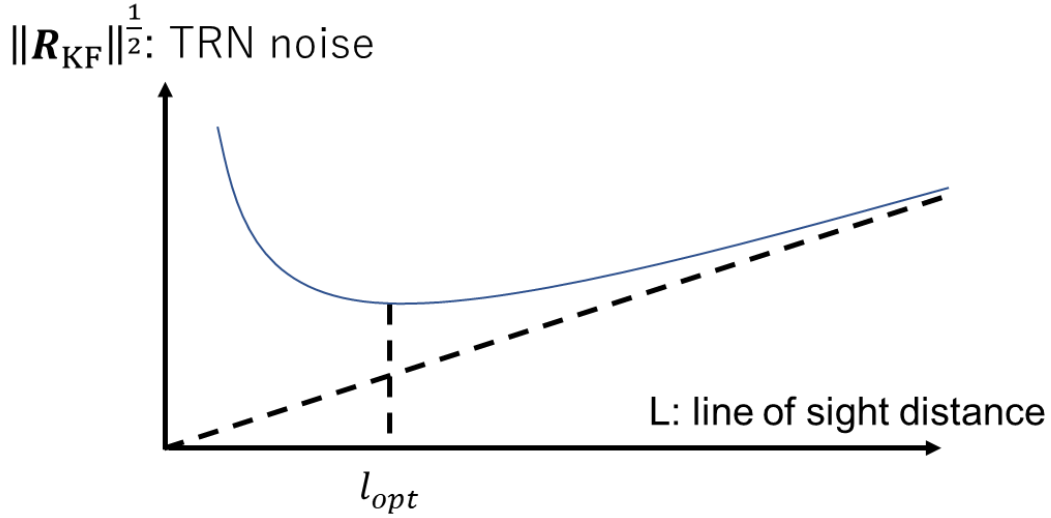


Fig 4.1.3-1 火星着陸例題における観測モデル

4.2. 火星着陸例題の凸化

前節で示した問題設定を、3章に示した凸化手順に従って計算することで凸最適化問題に変形する。そして、動力降下開始と着陸時の2点における境界条件を等式制約として加える。降下開始時の境界条件には、宇宙機の初期共分散 $\mathbf{tr}(\mathbf{P}_i)$ 、初期質量 m_i 、初期位置 $\mathbf{r}_{i,i}$ 、初期速度 $\mathbf{v}_{i,i}$ 、初期姿勢 $\mathbf{q}_{i \leftarrow B, i}$ 、初期角速度 $\boldsymbol{\omega}_{i \leftarrow B, i}$ があり、着陸時には終端位置 $\mathbf{r}_{i,f}$ 、終端速度 $\mathbf{v}_{i,f}$ 、終端姿勢 $\mathbf{q}_{i \leftarrow B, f}$ 、終端角速度 $\boldsymbol{\omega}_{i \leftarrow B, f}$ がある。

ここで、初期共分散は以下のように与える。

$$\mathbf{P}_i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\mathbf{r_init}}^{3 \times 3} & \dots & \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ & \mathbf{q}_{\mathbf{v_init}}^{3 \times 3} & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{q}_{\mathbf{q_init}}^{4 \times 4} \\ & & \frac{2}{T_{h_{ac}}} \mathbf{q}_{ac}^{3 \times 3} \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & \dots & \frac{2}{T_{h_{gy}}} \mathbf{q}_{gy}^{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

ここで、 $\mathbf{q}_{\mathbf{r_init}}^{3 \times 3}$ 、 $\mathbf{q}_{\mathbf{v_init}}^{3 \times 3}$ 、 $\mathbf{q}_{\mathbf{q_init}}^{3 \times 3}$ はそれぞれ動力降下開始時の航法値推定誤差の分散値である。最後に、今回の問題設定のまとめを Problem 3 に示す。各文字の右上添字の i は、Algorithm1 におけるループ回数を示す。

Problem 3: Navigation-Optimal Convex Optimal Control Problem

Cost Function

$$\text{Minimize} \quad w_p \text{tr} \left(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{k_f} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T \right) + w_v \left\| \mathbf{v}^i \right\|_2 + w_\eta \left\| \boldsymbol{\eta}^i \right\|_2$$

Subject to

Boundary Condition:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{P}_{0|0}) &= \text{tr}(\mathbf{P}_l) \\ m_0^i &= m_i, \\ \mathbf{r}_{1,0}^i &= \mathbf{r}_{1,i}, \quad \mathbf{r}_{1,k_f}^i = \mathbf{r}_{1,f} \\ \mathbf{v}_{1,0}^i &= \mathbf{v}_{1,i}, \quad \mathbf{v}_{1,k_f}^i = \mathbf{v}_{1,f} \\ \mathbf{q}_{1 \leftarrow B,0}^i &= \mathbf{q}_{1 \leftarrow B,i}, \quad \mathbf{q}_{1 \leftarrow B,k_f}^i = \mathbf{q}_{1 \leftarrow B,f} \\ \boldsymbol{\omega}_{1 \leftarrow B,0}^i &= \boldsymbol{\omega}_{1 \leftarrow B,i}, \quad \boldsymbol{\omega}_{1 \leftarrow B,k_f}^i = \boldsymbol{\omega}_{1 \leftarrow B,f} \end{aligned}$$

Dynamics:

$$\mathbf{x}_{k+1}^i = \tilde{\mathbf{A}}_k \mathbf{x}_k^i + \tilde{\mathbf{B}}_k^- \mathbf{u}_k^i + \tilde{\mathbf{B}}_k^+ \mathbf{u}_{k+1}^i + \tilde{\mathbf{Z}}_k + \mathbf{v}_k^i, \quad \forall k \in [0, k_f - 1]$$

Convex Constraints:

$$\begin{aligned} m_{dry} &\leq m_k^i \\ \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r}_k^i \right\|_2 &\leq \frac{1}{\tan(\gamma_{gs})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r}_k^i, \\ \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}_k^i \right\|_2 &\leq \frac{1 - \cos(\theta_{\max})}{2} \\ \left\| \boldsymbol{\omega}_{B,k}^i \right\|_2 &\leq \omega_{\max} \\ \left\| \mathbf{T}_{B,k}^i \right\|_2 &\leq T_{\max} \\ \left\| \mathbf{T}_{B,k}^i \right\|_2 &\leq \frac{1}{\cos(\delta_{\max})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}_{B,k}^i \end{aligned}$$

Non-Convex Constraints:

$$0 \leq \left[\frac{\bar{\mathbf{T}}_{B,k}^i}{\left\| \bar{\mathbf{T}}_{B,k}^i \right\|_2} \right]^T \cdot \mathbf{T}_{B,k}^i - T_{\min}$$

Navigation:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}) &= \mathbf{A}_{p,K^-} \text{tr}(\mathbf{P}_{K^-|K^-}) + \sum_{k=K^-}^{K^+-1} \left(\mathbf{B}_{p,k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t_k}^i \\ \mathbf{u}_{t_k}^i \end{bmatrix} \right) + \mathbf{Z}_{p,K^-}, \\ \text{tr}(\mathbf{P}_{K^+|K^+}) &= \mathbf{A}_{m,K^+} \text{tr}(\mathbf{P}_{K^+|K^+-1}) + \mathbf{B}_{m,K^+} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t_{K^+}}^i \\ \mathbf{u}_{t_{K^+}}^i \end{bmatrix} + \mathbf{Z}_{m,K^+}, \\ &\quad \forall [K^-, K^+] \in \{[K_1, K_2], [K_2, K_3], \dots, [K_{f-1}, K_f]\} \\ \text{tr}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{k_f|k_f-1} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T) &= \mathbf{A}_{p,K_f} \text{tr}(\mathbf{P}_{K_f|K_f}) + \sum_{k=K_f}^{k_f} \left(\mathbf{B}_{p,k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t_k}^i \\ \mathbf{u}_{t_k}^i \end{bmatrix} \right) + \mathbf{Z}_{p,K_f} \end{aligned}$$

Trust region:

$$\begin{aligned} \left\| \boldsymbol{\eta}^i \right\|_2 &= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}^i \\ \mathbf{u}^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^{i-1} \\ \bar{\mathbf{u}}^{i-1} \end{bmatrix} \right\|_2 \\ \left\| \boldsymbol{\eta}^i \right\|_2 &\leq \eta_{\max} \end{aligned}$$

4.3. 火星着陸例題での数値設定

まず、航法センサが関わらない数値設定を以下の Table 1 に示す。着陸目標は I 系の座標原点であり、着陸時は I 系の X 軸負方向に -1 [m/s] である。降下開始時の位置は高度 2 [km], Y 軸方向に 1 [km] の位置であり、着陸目標とは離れる方向(Y 軸正方向)に 20 [m/sec], 垂直方向に 100 [m/sec] の速度を持っている。降下開始時と着陸時の宇宙機の姿勢は、共に機軸が I 系の X 軸方向を向いている。また角速度ベクトルは共にゼロである。宇宙機の質量は計 3000 [kg] であり、推進剤は 500 [kg] である。

今回は計 40 区間に離散化を行った。この離散化点数の場合、最小着陸時間は約 57 [sec] であり燃料は 85.7 [%] を消費する。また終端時間が 76 [sec] の時、燃料最小軌道でも着陸時の推奨がゼロになる。

Table 2 Parameters

Parameters	Value	Unit	Parameters	Value	Unit
I_{sp}	220	sec	$\mathbf{r}_{l,i}$	[2000,1000,0]	m
m_{dry}	2500	kg	$\mathbf{r}_{l,f}$	[0,0,0]	m
m_{wet}	3000	kg	$\mathbf{v}_{l,i}$	[-100,20,0]	m/s
T_{min}	500	N	$\mathbf{v}_{l,f}$	[-1,0,0]	m/s
T_{max}	4000	N	$\mathbf{q}_{I \leftarrow B, i}$	[1,0,0,0]	-
$\mathbf{r}_{T \leftarrow B}$	[-1,0,0]	m	$\mathbf{q}_{I \leftarrow B, f}$	[1,0,0,0]	-
δ_{max}	10	deg	$\boldsymbol{\omega}_{B, i}$	[0,0,0]	deg/sec
θ_{max}	20	deg	$\boldsymbol{\omega}_{B, f}$	[0,0,0]	deg/sec
γ_{max}	20	deg	k_f	30	-
ω_{max}	30	deg/s	i_{max}	6	-
\mathbf{g}_I	[-0.37114,0,0]	m/sec ²	w_p	10^3	-
η_{max}	10.0	-	w_η	10^{-1}	-
			w_v	10^4	-
			H_{cost}	$1 \cdot \mathbf{I}^{16 \times 16}$	

次に航法精度に関する数値設定を示す。まず基準となる数値例(Case 1)として Table 2 を示す。ここで、TRN の精度はセンサの視線距離が 1 [km] の時を基準にしており、最も精度が高くなるのは $l_{opt}=200$ [m] の時である。そして、TRN による観測更新は計 5 回行う。動力降下開始時に一度行い、その後は等時間間隔で、 \mathbf{K} で指定されたステップで行われる。最後の観測更新は $K=30$ で行われ、その後は予測更新のみで着陸降下する。

これに対して、観測更新が降下開始時に一度行われるだけで、軌道の変化で予測更新のみ影響される数値例が Case 2 である。

Table 2 Case 1 Parameters		
Parameters	Value	Unit
$T_{b_{ac}}$	300	sec
$T_{b_{gy}}$	300	sec
$\mathbf{q}_{ac}^{3 \times 3}$	$10^{-8} \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	m^2/sec^4
$\mathbf{q}_{gy}^{3 \times 3}$	$10^{-8} \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	$\text{rad}^2/\text{sec}^2$
$\mathbf{q}_r^{3 \times 3}$	$100 \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	m^2
$\mathbf{q}_v^{3 \times 3}$	$1 \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	m^2/sec^2
l_{opt}	200	m
$\mathbf{q}_{r_init}^{3 \times 3}$	$100 \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	m^2
$\mathbf{q}_{v_init}^{3 \times 3}$	$1 \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	m^2/sec^2
$\mathbf{q}_{q_init}^{4 \times 4}$	$0.01 \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	-
\mathbf{K}	[0,10,20,30]	-

Table 3 Case 2 Parameters		
Parameters	Value	Unit
$T_{b_{ac}}$	300	sec
$T_{b_{gy}}$	300	sec
$\mathbf{q}_{ac}^{3 \times 3}$	$10^{-8} \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	m^2/sec^4
$\mathbf{q}_{gy}^{3 \times 3}$	$10^{-8} \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	$\text{rad}^2/\text{sec}^2$
$\mathbf{q}_r^{3 \times 3}$	$100 \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	m^2
$\mathbf{q}_v^{3 \times 3}$	$1 \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	m^2/sec^2
l_{opt}	200	m
$\mathbf{q}_{r_init}^{3 \times 3}$	$100 \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	m^2
$\mathbf{q}_{v_init}^{3 \times 3}$	$1 \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	m^2/sec^2
$\mathbf{q}_{q_init}^{4 \times 4}$	$0.01 \cdot \mathbf{I}^{3 \times 3}$	-
\mathbf{K}	[0]	-

最後に Algorithm 1 の実行状態について示す．Step (3)での凸最適化後，生成された軌道の収束判定を行うが，今回は簡単のため収束判定を行わずに， $i = i_{\max}$ まで計算を続ける．また，信頼領域 $\boldsymbol{\eta}_{\max}$ の調整も同様の理由で行わない．

4.4. アルゴリズムの製作と実行環境および計算時間

今回の例題を実施するに当たり，MATLAB 上で提案手法のプログラムコードを作成した．数式部分のコード作成は，数式処理ソフト wxMaxima 等を利用した．生成された数式を MATLAB にコピー＆ペーストすることで，直接コードを書く手間を省き，なおかつ間違えの無いコードを作成することが出来た．

また，アルゴリズム中で凸最適化を行うが，ここには MATLAB 用の汎用凸最適化ソルバー，CVX SDPT3 を用いた．そして，作成したコードと凸最適化ソルバーは，intel CORE i7-7700 を搭載したデスクトップ PC 上で動作させた．

計算時間は，Step (1)(2)で 0.20~0.25[sec]，Step (3)で 0.5~0.75[sec]であり，一回の繰り返し計算に必要な時間は 1[sec]程であった．ソルバーの起動時間を除けば 6[sec]程度で計算を終了出来た．また後述に示す通り，収束解が得られるまでであれば 3[sec]で計算が負えられたことになる．Fig 3.1-1 にある通り，NASA/JPL での研究においても当初は MATLAB 上で動作(当時の動作環境で計算時間が 3[sec])させていたが，アルゴリズムの C 言語での記述や，凸最適化問題毎の数学的構造を利用した専用の改良コードの利用で，計算時間を大幅に短縮し，宇宙機用の CPU に実装できた[31]．このため，今回のアルゴリズムも潜在的に宇宙機用の CPU に実装できる可能性がある．

第5章 火星着陸例題での提案手法の検証結果

本稿では、火星着陸例題を利用した提案手法の検証結果について示す。火星着陸例題では、(a) 提案アルゴリズムでの航法最適軌道の生成と燃料最適との比較、(b)モンテカルロ解析による生成された航法最適軌道の評価、(c)航法センサの観測更新数と終端時間の変化による生成軌道の変化、を検証する。

5.1. 航法最適軌道の生成過程

本節では、例題を利用して提案手法による航法最適軌道の生成を行う。そして、提案アルゴリズムによる解の収束過程や、燃料最適軌道との比較を行う。

Fig 5.1-1 に、 $t_f = 67\text{sec}$ における Case 1 のパラメータで生成された航法最適軌道を示す。また比較のために燃料最適軌道も Fig 5.1-2 示す。この2つの軌道は、Algorithm 1 で求められた宇宙機状態 x と制御値 u のうち、制御値 u を時間方向に積分して得られた軌道である。つまり、緩和変数 v はこの軌道の構成要素に含まれておらず、計算が収束した際の生成軌道では数値的に無視できる値であったことがわかる。2つの軌道の違いは観測更新時の視線距離であり、航法最適の場合の方がより低い高度で観測更新を行う軌道を飛行している。それぞれの場合のカルマンフィルタの動作は Fig 5.1-3 で比較されている。3つのグラフは、一番上が共分散のトレース値の時間推移、2番目が TRN センサの視線距離の時間推移、3番目が共分散の時間遷移行列 F の各成分の二乗和の時間推移である。この3つのグラフからは、 $k=0, (t=0[\text{sec}])$ での最初の観測更新直後は、時間遷移行列 F が燃料最適の方が大きく、 $\text{trace}(P)$ が燃料最適の方が大きく上昇。その後は航法最適の場合の方が視線距離は短くなり、観測更新精度が高いため、 $k=30, (t=50.25[\text{sec}])$ では燃料最適の場合の $\text{trace}(P)$ より小さくなる。また終盤は燃料最適の時間遷移行列 F が大きい為、燃料最適の場合はより $\text{trace}(P)$ も大きくなる。終端での $\text{trace}(P)$ の大きさは Table 5.1-1 にまとめた。

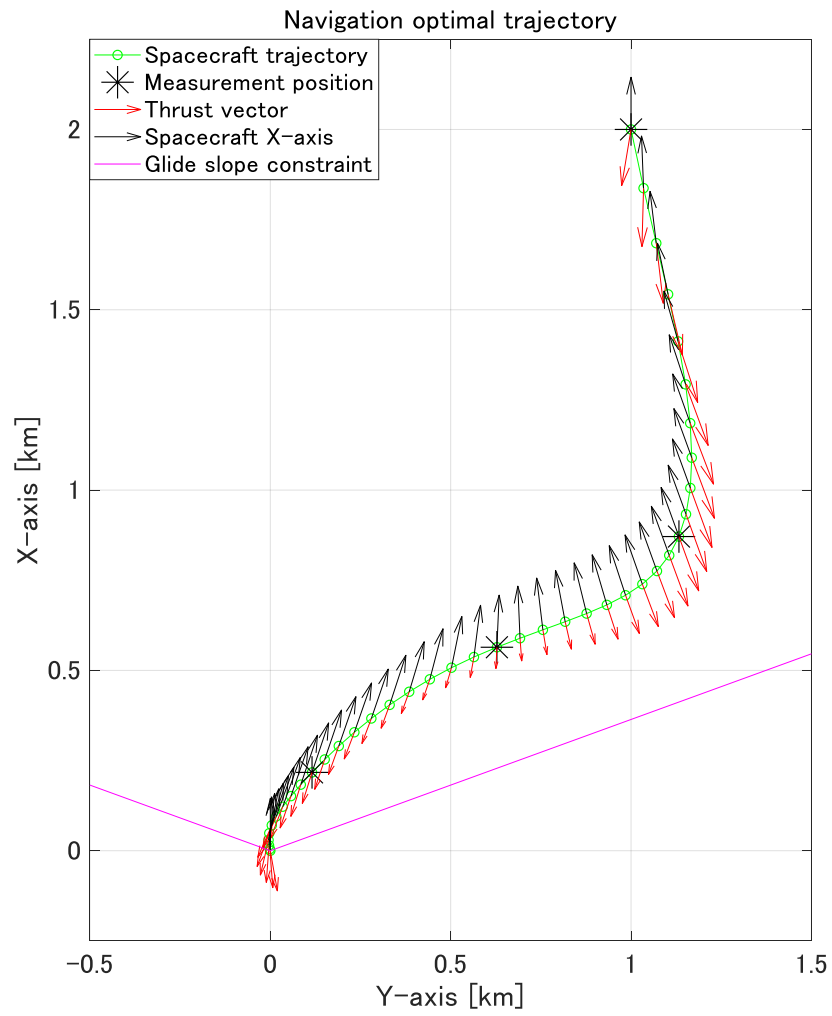


Fig 5.1-1 Case1, $t_f = 67 \text{ sec}$ での航法最適軌道

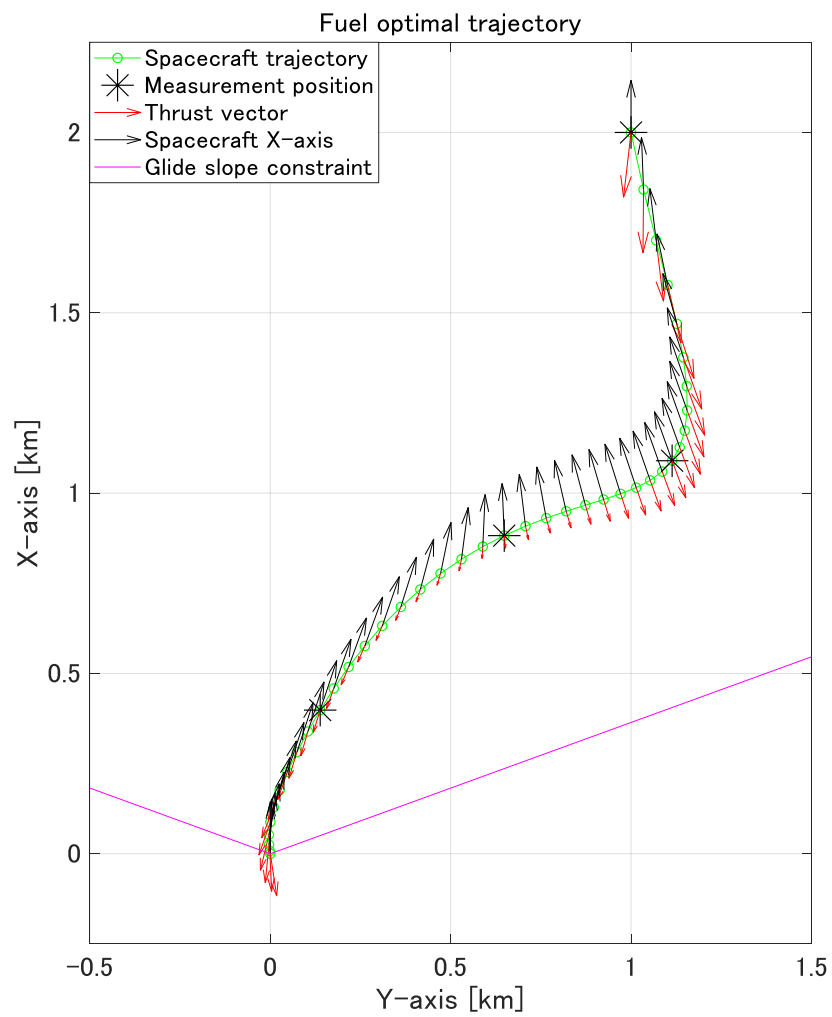


Fig 5.1-2 $t_f = 67 \text{ sec}$ での燃焼最適軌道

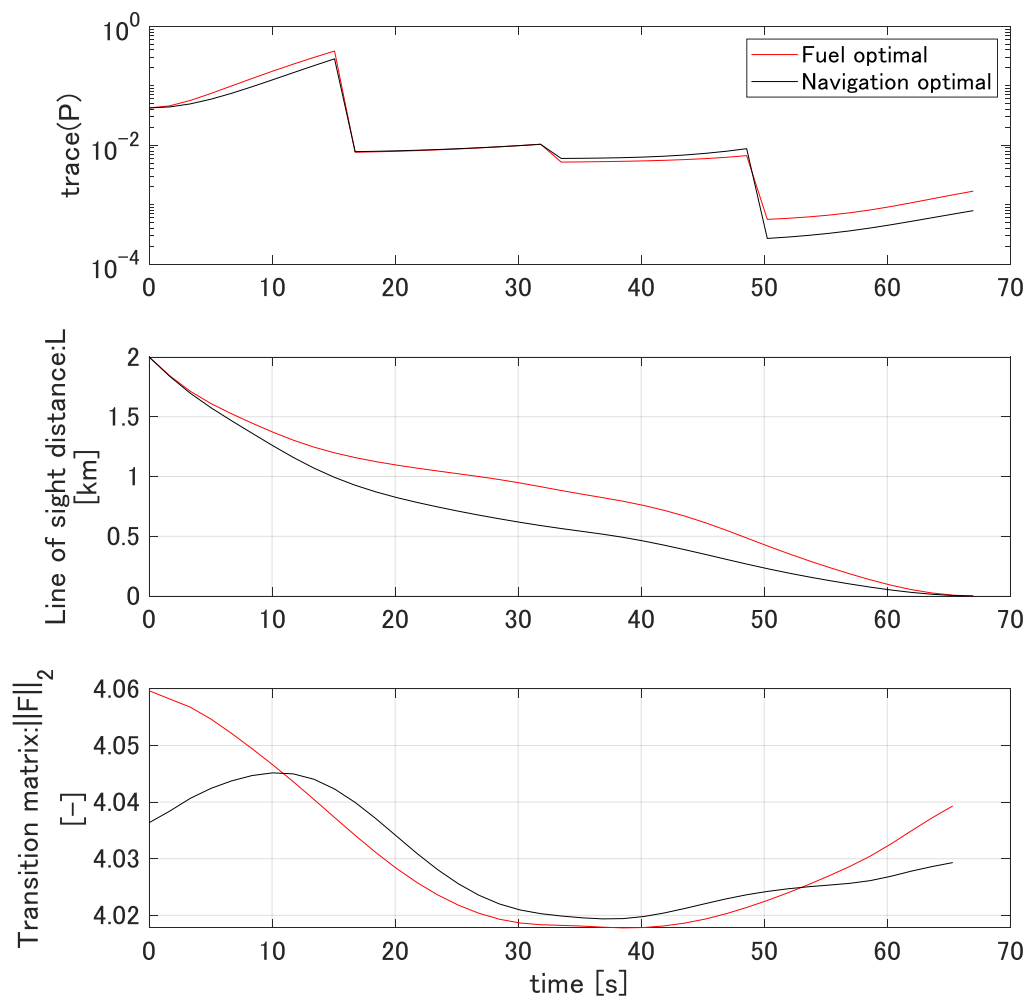


Fig 5.1-3 $t_f = 67 \text{ sec}$ での燃料最適軌道と航法最適軌道でのカルマンフィルタの動作比較

Table 5.1-1 終端での共分散行列のトレース値

	Navigation Optimal	Fuel Optimal
$\text{trace}(\mathbf{P}_{k_f})$	7.9×10^{-4}	16.9×10^{-4}

次に、2つの軌道の姿勢と推力に関する履歴を比較する。Fig5.1-4 と Fig5.1-5 が航法最適の場合の推力と姿勢の各変数の履歴である。制約条件はグラフの上枠下枠である。また Fig5.1-6 と Fig5.1-7 が燃料最適の場合である。まず推力履歴に関して比較すると、燃料最適の場合の方が、推力の最大値と最小値が制約条件に近い。またジンバル角度に関しては、航法最適の場合の方が末端で大きくなっている。これに伴い、姿勢の角速度を比較すると、共に航法最適の場合の方が制約条件に接触している時刻が多い様に見受けられる。

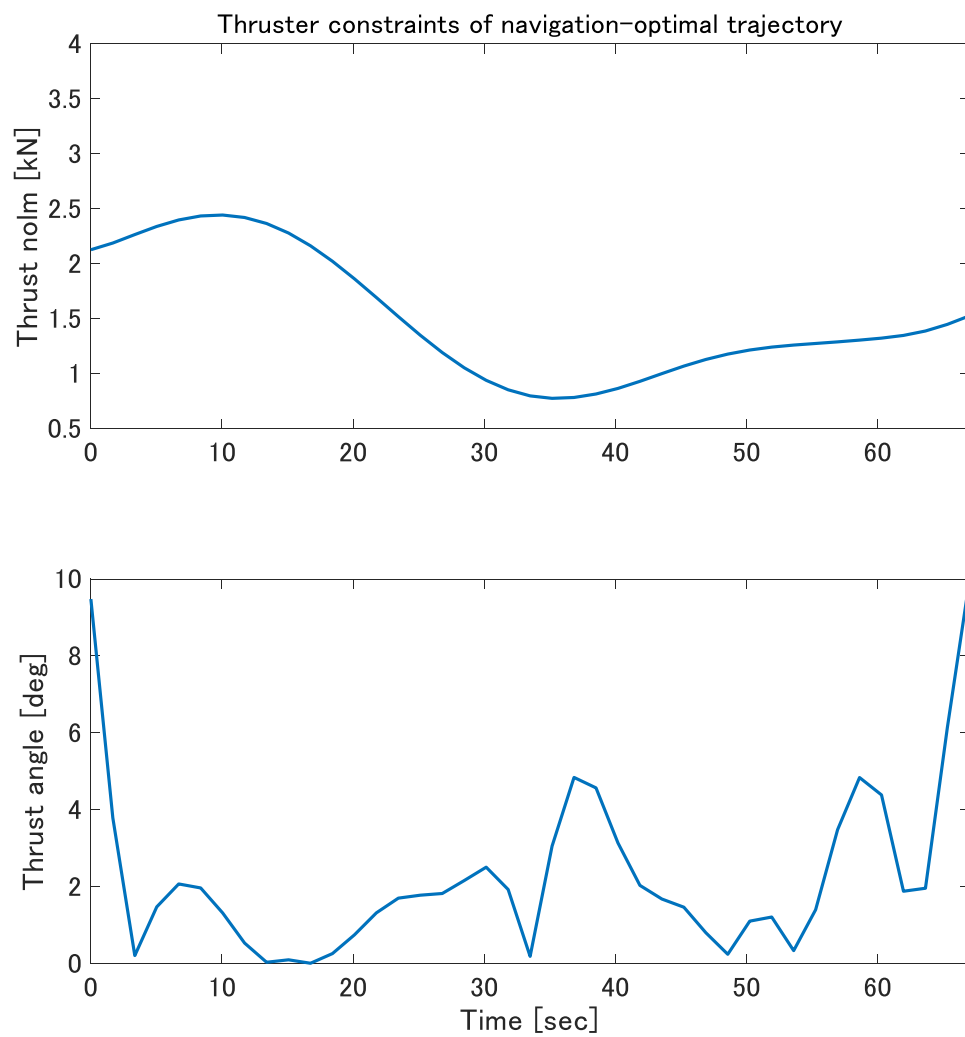


Fig 5.1-4 Case1, $t_f = 67 \text{ sec}$ での航法最適軌道での推力履歴

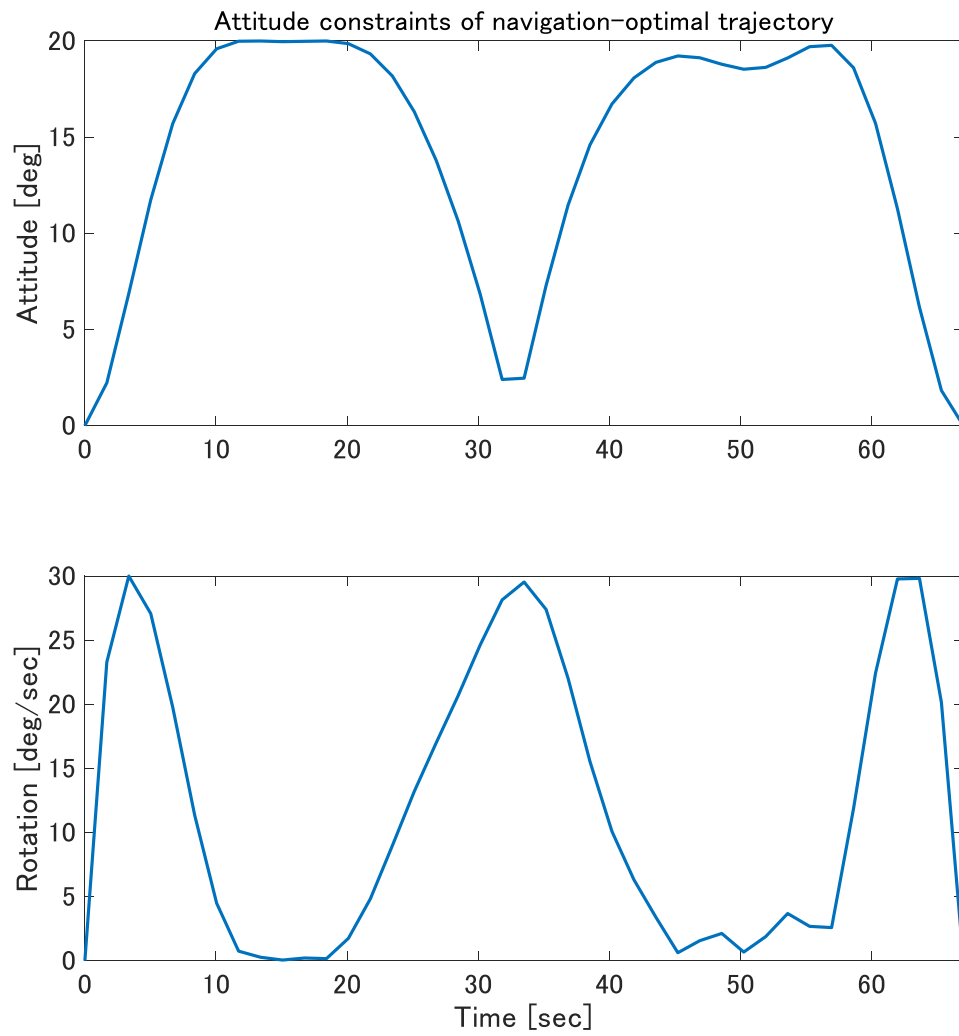


Fig 5.1-5 Case1, $t_f = 67 \text{ sec}$ での航法最適軌道での姿勢履歴

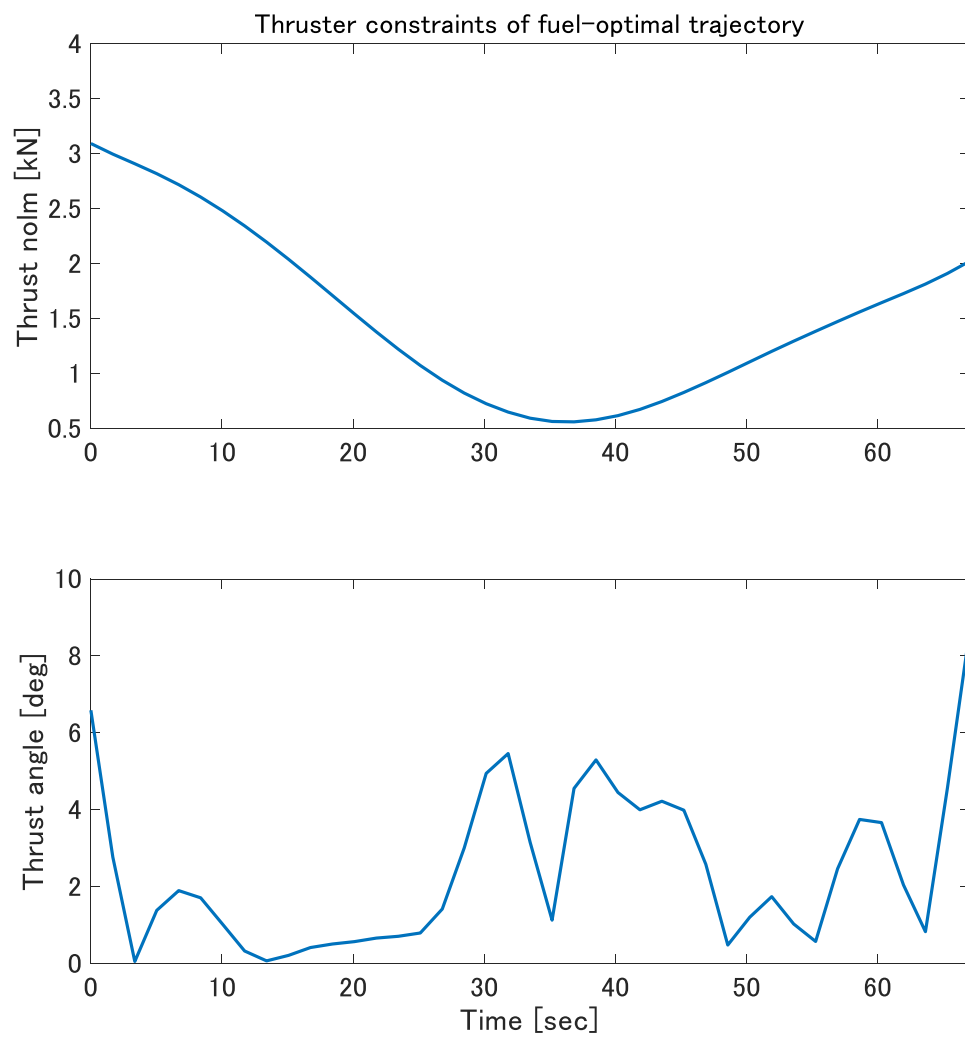


Fig 5.1-6 $t_f = 67 \text{ sec}$ での燃料最適軌道での推力履歴

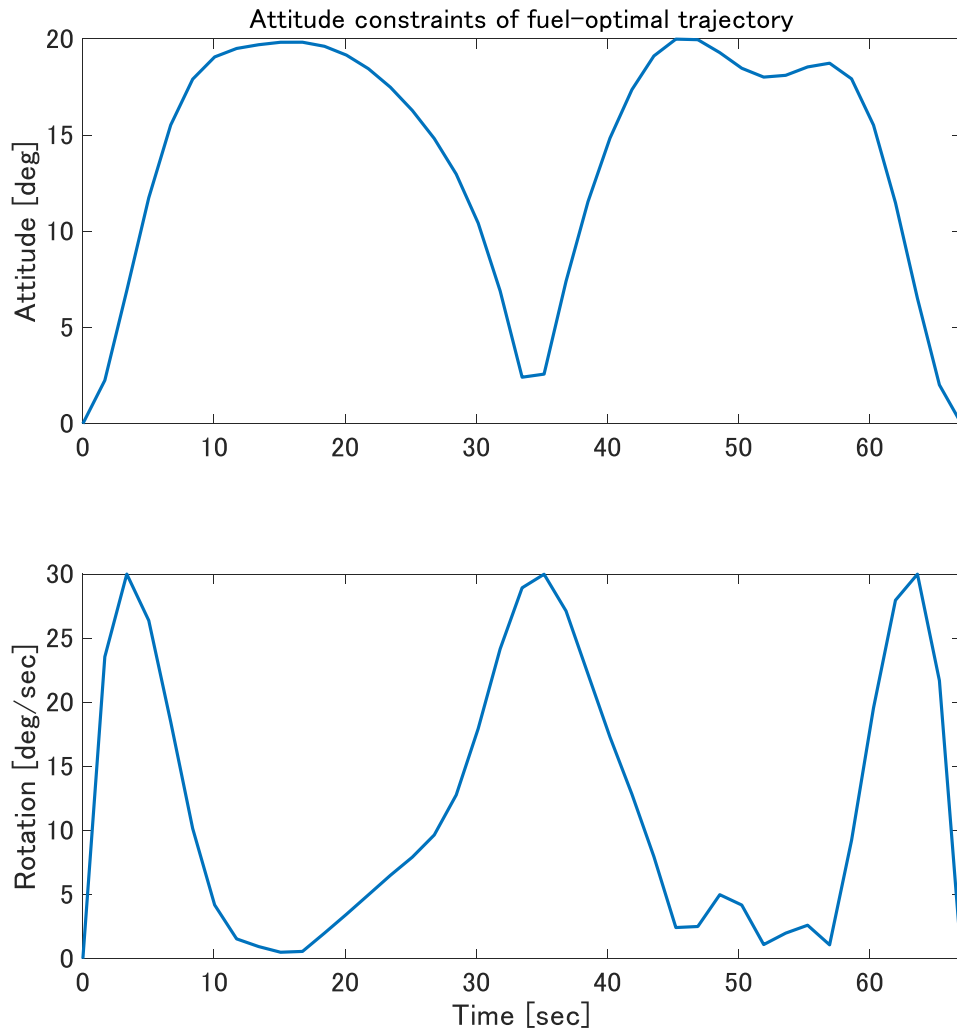


Fig 5.1-7 $t_f = 67\text{sec}$ での燃料最適軌道での姿勢履歴

最後に、二つの場合の収束過程を比較する。Fig 5.1-8 に航法最適の場合の軌道の収束履歴、Fig 5.1-9 に最適化変数の収束履歴、Fig 5.2-10 に評価関数と緩和変数、信頼領域の首足履歴を示す。また上記の順で Fig 5.1-11~Fig 5.1-13 に燃料最適の場合も示す。

まず、Algorithm 1 の Step (3)では緩和変数 ν を含む軌道 \mathbf{x} が生成される。新しい基準軌道にはこの緩和変数を含む軌道が用いられるが、この基準軌道と、緩和変数 ν を含まず制御値 \mathbf{u} だけで生成出来る軌道が数値的に無視できる誤差で一致する場合、その軌道は実行可能解である。軌道収束履歴の Fig 5.1-8 と Fig 5.1-11 は $i=0\sim 3$ での緩和を含む軌道と、含まない軌道、そして収束軌道とを示している。航法最適の場合は $i=2$ の時に初めて緩和を含む軌道と含まない軌道が一致しており、最初の実行可能解となっている。そして $i=3$ の軌道は収束軌道とほぼ一致しており、この段階で解が収束していたことを示している。これらは Fig 5.1-10 の信頼領域と緩和変数の推移から数値として確認することが出来る。つま

り、 $i=2$ で緩和変数が大きく低下したことは実行可能解となったことを示し、 $i=4$ の以降の大きく低下し変化の無い信頼領域は、 $i=3$ の時点で既に解が局所的に収束していたことを示している。次に燃料最適の場合の軌道の収束履歴 Fig 5.1-11 を見ると、 $i=2$ の段階で実行可能解が生成され、さらにそれがほとんど収束解であったとわかる。これは Fig 5.1-13 から明らかなである。

航法最適軌道の場合は共分散が Assumption 1 に基づいて線形化され、凸最適化される。そのため、非収束軌道の段階では、Step (3)で計算される $\text{tr}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{k_f} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$ は生成軌道での値とは大きく異なる場合がある。Step (3)で生成される $\text{tr}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{k_f} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$ と、その時の軌道 \mathbf{x} を基準軌道として Step (1)でカルマンフィルタを再計算した時の $\text{tr}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{k_f} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$ を比較したのが、Fig 5.1-9 および Fig 5.1-12 である。ここでは上段が終端質量、中段が先程の二つの $\text{tr}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{k_f} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$ の数値、下段がその差を示している。これによると $i=1$ のような実行可能解が生成されない段階では二つの値は大きく異なり、収束解が生成された次のステップから、 $\text{tr}(\mathbf{H}_{\text{cost}} \cdot \mathbf{P}_{k_f} \cdot \mathbf{H}_{\text{cost}}^T)$ の値は凸最適化時と再計算時で一致する。ここからも、航法最適での $i=3$ 、燃料最適での $i=2$ 、の時点で収束軌道が生成されていたことが示されている。

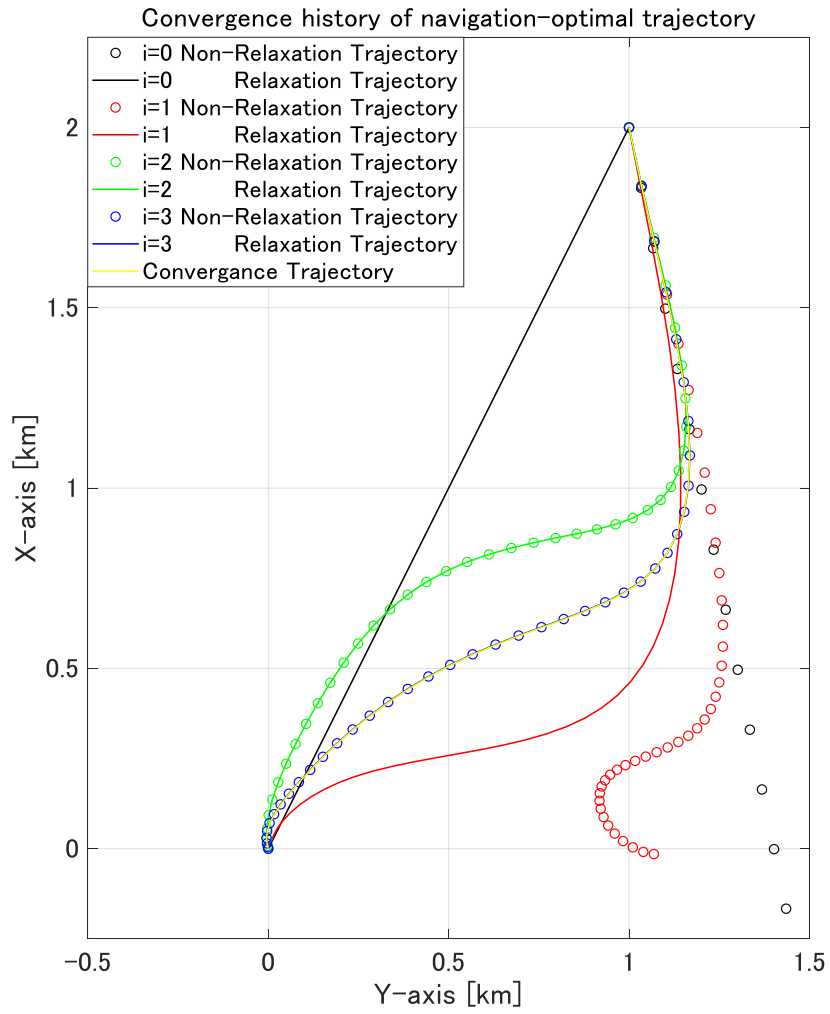


Fig 5.1-8 Case1, $t_f = 67 \text{ sec}$ での航法最適軌道の軌道収束過程

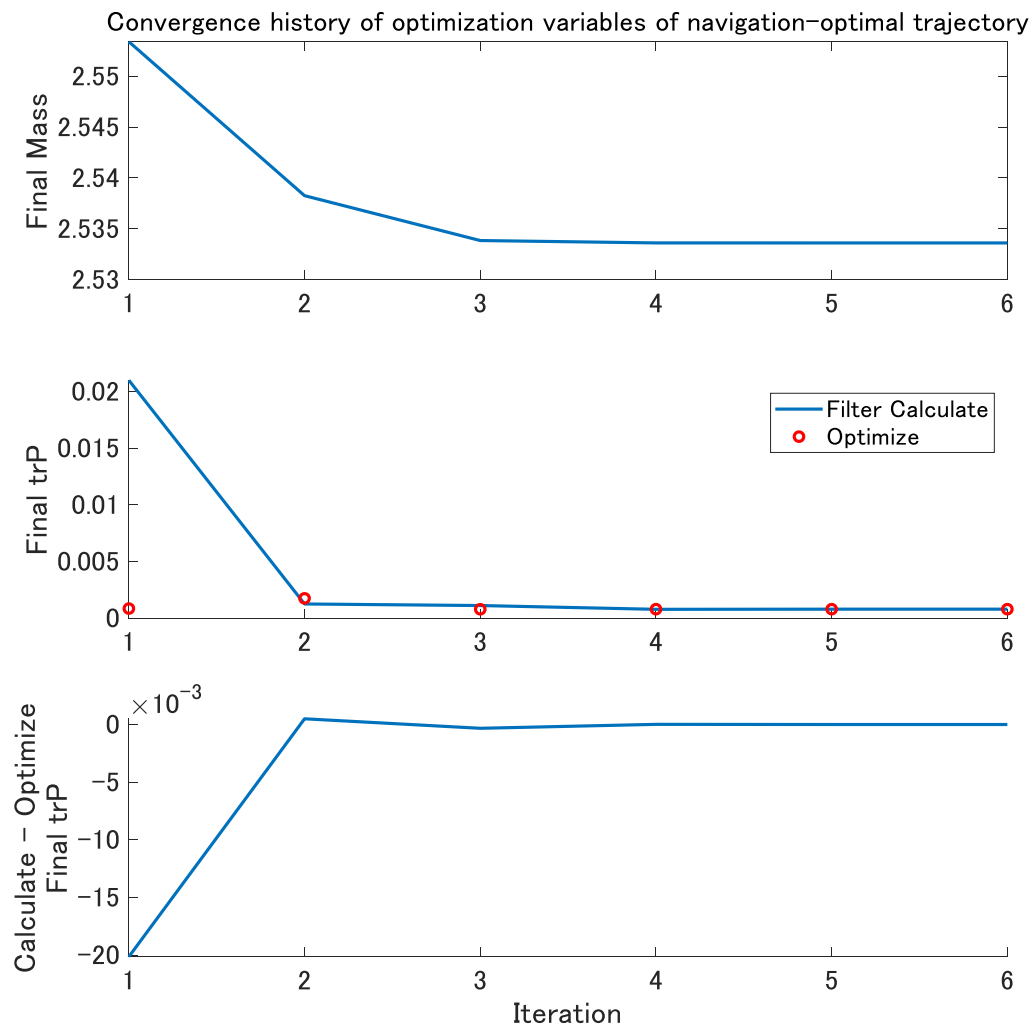


Fig 5.1-9 Case1, $t_f = 67\text{sec}$ での航法最適軌道の最適化変数の収束過程

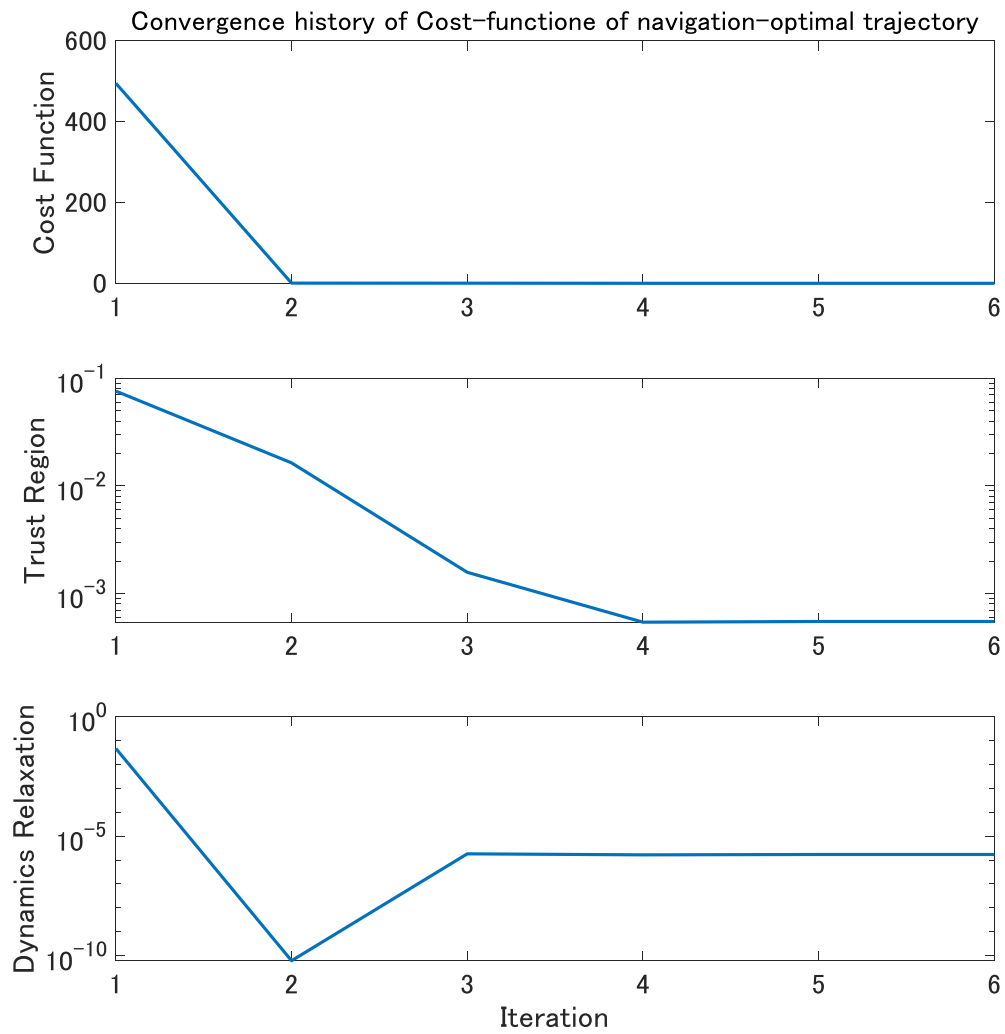


Fig 5.1-10 Case1, $t_f = 67 \text{ sec}$ での航法最適軌道の評価関数の収束過程

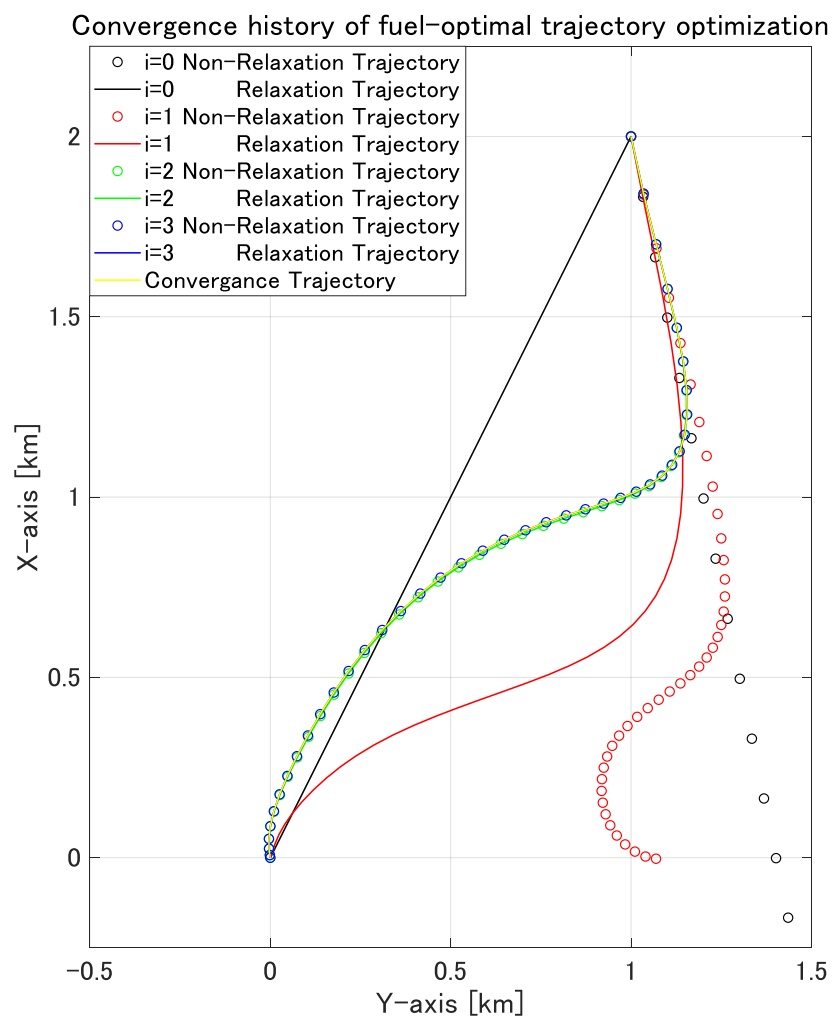


Fig 5.1-11 $t_f = 67 \text{ sec}$ での燃料最適軌道の軌道収束過程

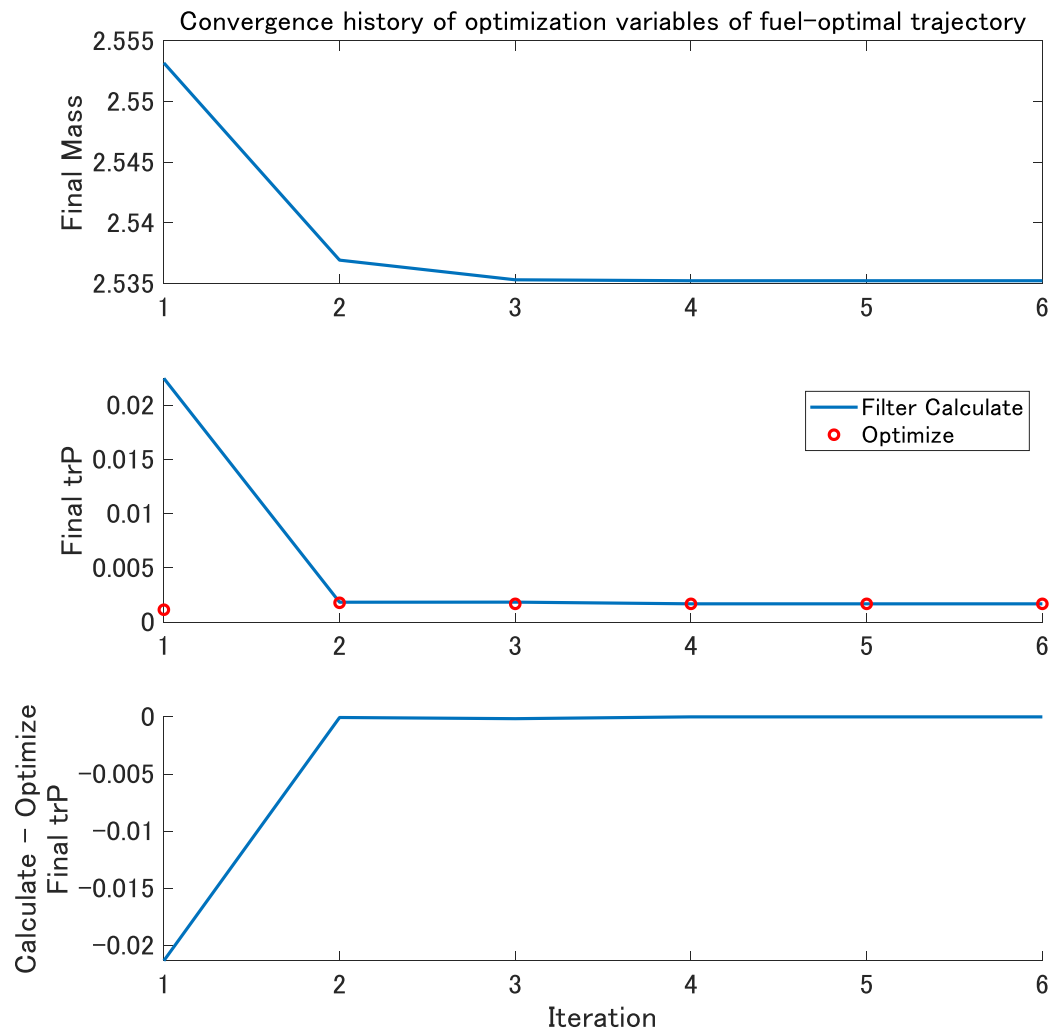


Fig 5.1-12 $t_f = 67 \text{ sec}$ での燃料最適軌道の最適化変数の収束過程

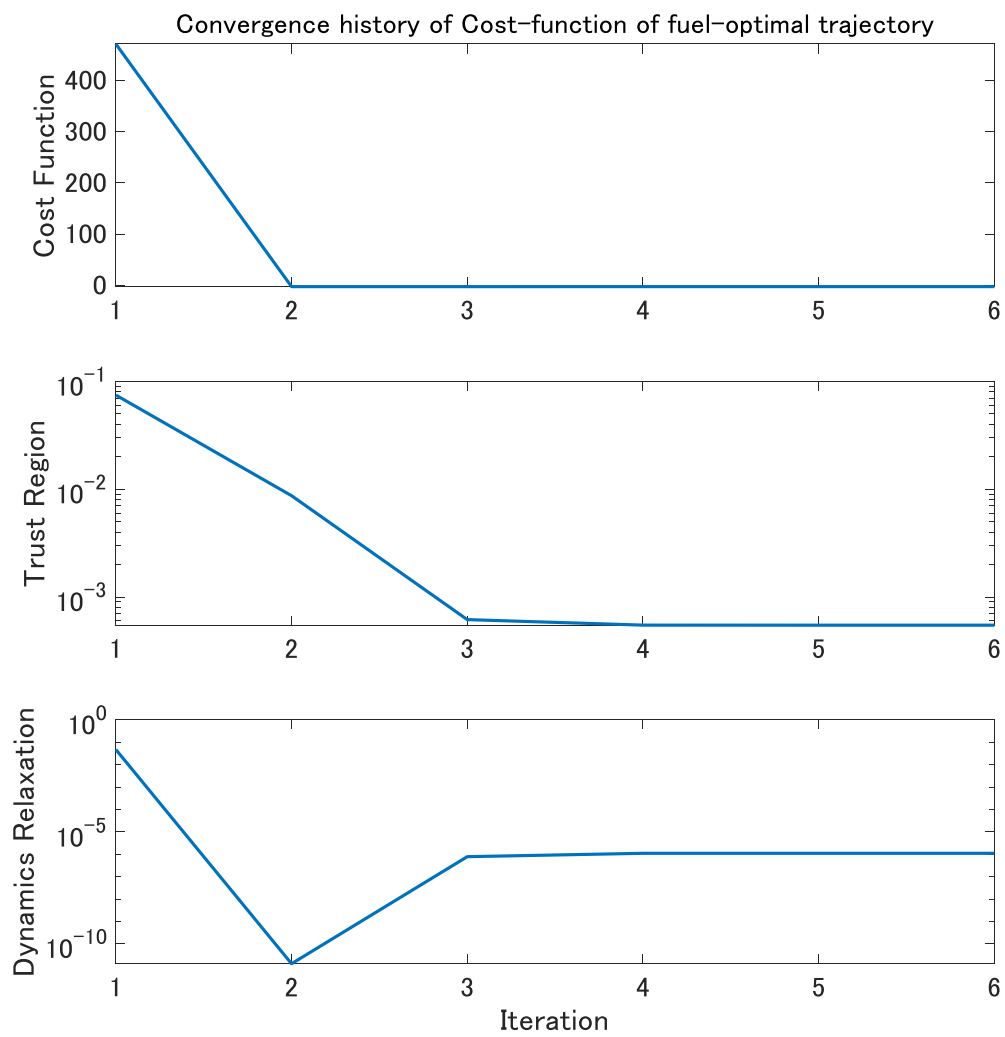


Fig 5.1-13 $t_f = 67 \text{ sec}$ での燃料最適軌道の評価関数の収束過程

5.2. モンテカルロ解析(MCA)による評価

本節では生成された航法最適軌道のモンテカルロ解析(Monte Carlo Analysis: MCA)による評価を行う。生成された軌道は、センサのノイズを共分散として考え最適化していたが、MCA では、生成された軌道上を宇宙機が飛行した場合にセンサノイズから航法値が統計的にどのような分散を持つかを分析する。この際、航法誤差の分散を位置、速度、姿勢等で求め、IMU の固有のノイズの分散も含めて足し合わせれば、それは $\text{trace}(\mathbf{P})$ と同義となる。これを利用し、航法最適軌道を飛行すると燃料最適軌道よりも航法精度が向上することを検証する。

MCA では、各時刻間の間隔を 100 等分し降下着陸中の航法センサの挙動と航法アルゴリズムを再現する。ガウスホワイトノイズが付加された IMU の値をもとに式(4.1.2.4)の慣性航法計算を実施し、同時に式(4.1.2.13)の行列を利用した、カルマンフィルタの予測更新も実施する。予測更新の時間遷移行列や観測ノイズ行列は、その時刻に航法アルゴリズムが保持している航法値をもとに生成し、予測更新と観測更新を実施する。そして、シミュレーション中に得られる TRN の観測値には、宇宙機の真の状態値に基づいたガウスホワイトノイズが付加される。以下の Fig 5.2-1 に、 $t_f = 67 \text{ sec}$ での航法最適軌道飛行時のモンテカルロ解析結果、Fig 5.2-2 に燃料最適軌道時の結果を示す。また、着陸時の航法値の分散を、航法最適の場合は Fig 5.2-3、燃料最適の場合は Fig 5.2-4 に示す。黒線が生成された誘導軌道、緑線が各シミュレーションにおける航法値がとった軌道を示している。

二つの結果とも、降下中の最初の観測更新までの期間に、航法値の誤差が大きく拡大することが分かる。これは初期の姿勢推定誤差や IMU のバイアス推定誤差に起因するものである。そして、燃料最適軌道の場合の方が、この期間の減速度量が大きいため航法誤差の拡大も大きい。そして、ともに観測更新により航法精度が大きく改善する。観測更新高度は航法最適軌道の場合の方が低く、視線距離が短くなる影響で、観測更新時の TRN 精度は航法最適軌道の場合の方が高くなる。航法最適の場合の最後の観測更新での視線距離は 250m 程度である。

Table 5.2-1 に MCA による、位置と速度の誤差分散と平均値、Table 5.2-2 に MCA より求めた $\text{trace}(\mathbf{P})$ を示す。

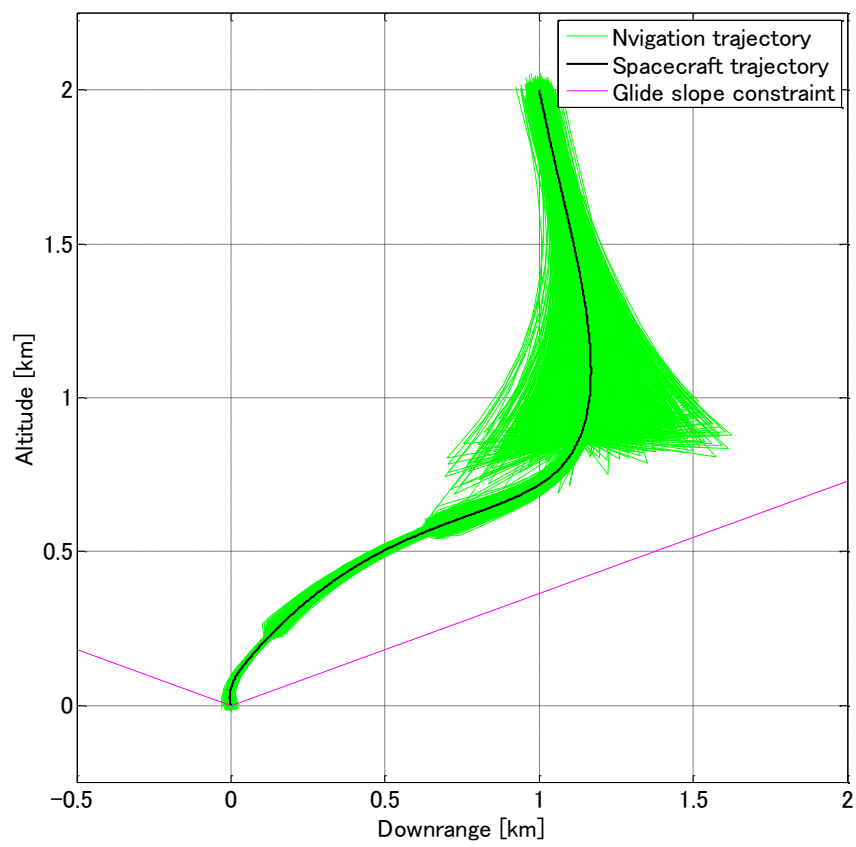


Fig 5.2-1 モンテカルロ解析による航法最適軌道での航法値軌跡

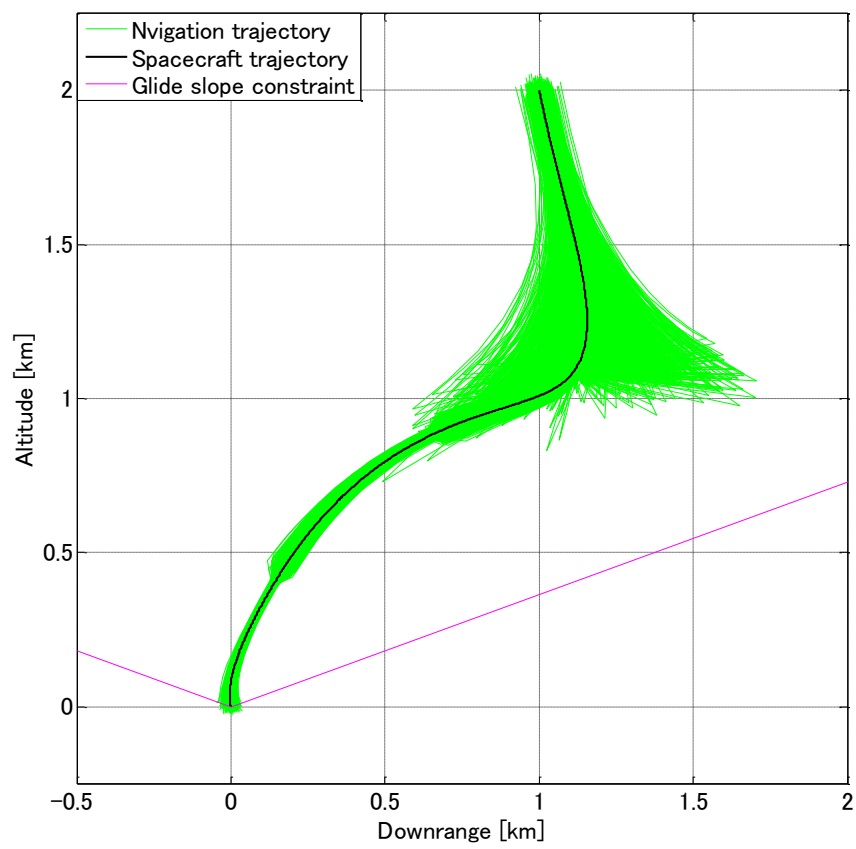


Fig 5.2-2 モンテカルロ解析による燃料最適軌道での航法値軌跡

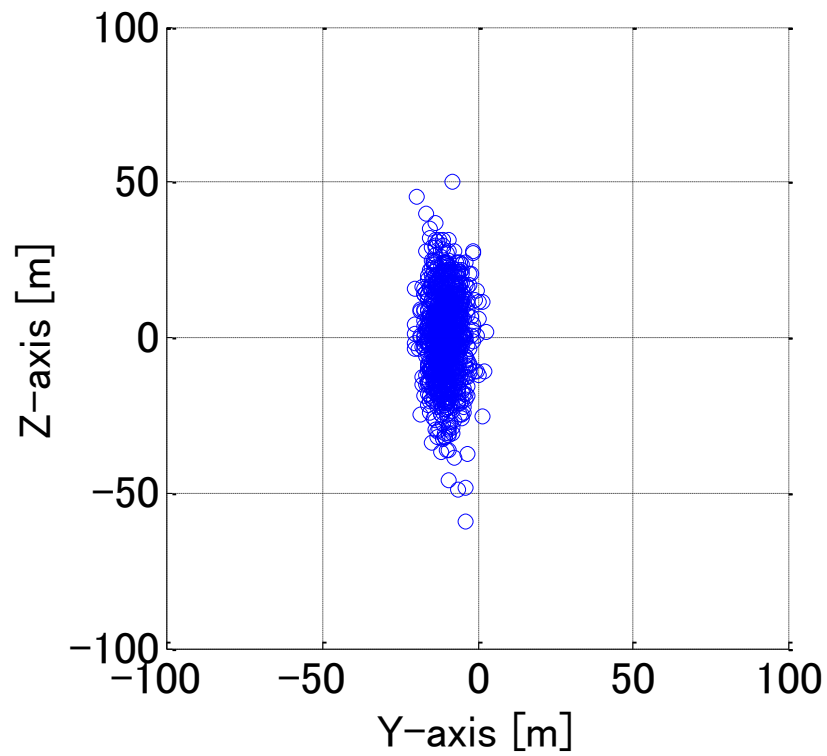


Fig 5.2-3 モンテカルロ解析による航法最適軌道での着陸時航法値の水平分散

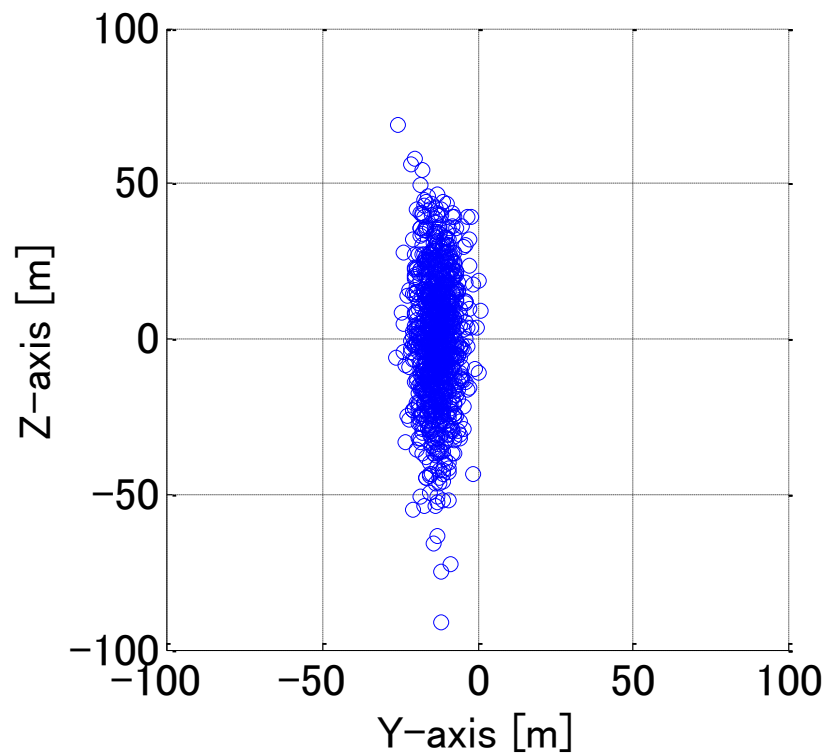


Fig 5.2-4 モンテカルロ解析による燃料最適軌道での着陸時航法値の水平分散

Table 5.2-1 位置と速度の誤差の標準偏差と平均

	Position [m]		Velocity [m/sec]	
	Variance	Mean	Variance	Mean
Navigation Optimal	18.0	1.4	2.79	0.33
Fuel Optimal	26.2	2.3	5.69	0.42

Table 5.2-2 最適化時と MCA での trP

	Terminal trP	
	Optimization	MCA
Navigation Optimal	7.94×10^{-4}	7.69×10^{-4}
Fuel Optimal	16.91×10^{-4}	17.40×10^{-4}

Table 5.2-1 より航法最適軌道の方が、位置と速度の分散平均すべてにおいて、誤差が縮小していることが分かる。特に速度の分散値は 50%以下にまで低下している。本来、このような着陸直前の状況においては、レーダー等を用いた速度測定が実施される。TRN と IMU における速度推定精度が向上することは、着陸直前におけるその他のセンサへの要求値を下げることに繋がる。

また Table 5.2-2 より、MCA から計算された trP の大きさは高い精度で一致していることが分かる。このことから、今回の数値例においては、最適化計算は実際の分散の傾向をよく表していると分かる。

5.3. 航法最適軌道の観測更新数と終端時間の影響

Case2 の場合を見る。Fig 5.3-1 の Case2 は最初に観測更新を 1 度だけ行う場合であるが、推力は Case1 に比べて Fig5.3-2 のように Bang-Bang になった。これは、降下着陸中の共分散の時間発展の増加を減少させることが目的と考えられる。しかし、Case2 での着陸時共分散は 23.17 であったが、燃料最適で観測更新数が 1 回の場合は 22.66 であり、航法最適の場合の方が、わずかに分散が大きくなってしまった。これは、Case1 では観測精度を上げることの比重が大きく、それによるより大域的な解に接近しやすかったのに対し、予測更新精度のみで航法最適な軌道を作ると、局所的な最適値に収束しやすい為と考えられる。この問題については今後より詳細な分析を進める予定である。

最後に、固定の終端時間にどの程度解が依存するかを検証することで、航法精度がどのように変化するかを考察する。の各場合で軌道を生成し、消費燃料と、MCA による実際の trP の結果と合わせて比較する。

Table 5.3-1 より、終端時間が短い場合は、航法最適軌道は燃料最小軌道とよく一致することが分かる。そのため、着陸時の消費燃料はほぼ等しく、MCA から計算した trP の値も大きな差は無いことが分かる。しかし、航法最適の場合の方がわずかに低い航法精度であった。

また終端時間が長くなると、航法最適軌道の航法精度は向上していくものの、燃料最適軌道の場合は航法最適程のような改善は見られない。この傾向は、終端時間が短い場合は、物理的に軌道に自由度が無いため燃料最小軌道に近い軌道しか飛行出来ないものの、終端時

間が長くなることで、燃料制約の範囲内で自由に軌道が変化できるからだと考えられる。そのため、より低い高度で観測更新を行う軌道を選択でき、航法精度が改善された。

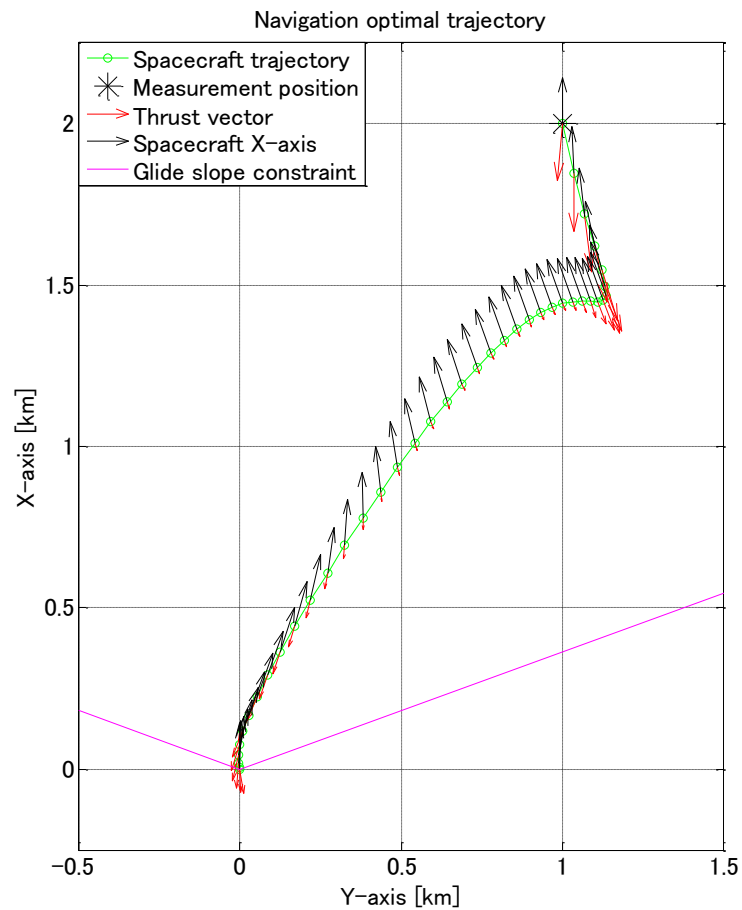


Fig 5.3-1 Case2, $t_f = 67 \text{ sec}$ での航法最適軌道

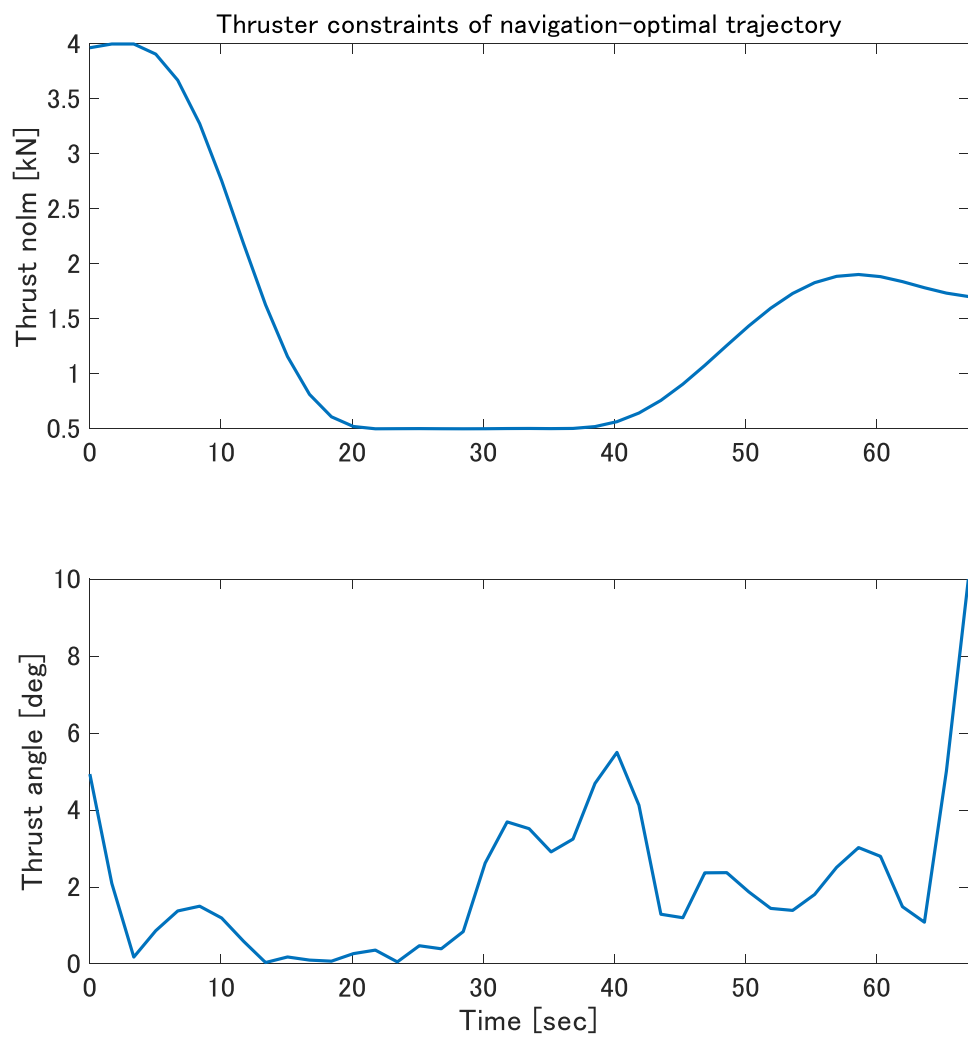


Fig 5.3-2 Case2, $t_f = 67 \text{ sec}$ での推力履歴

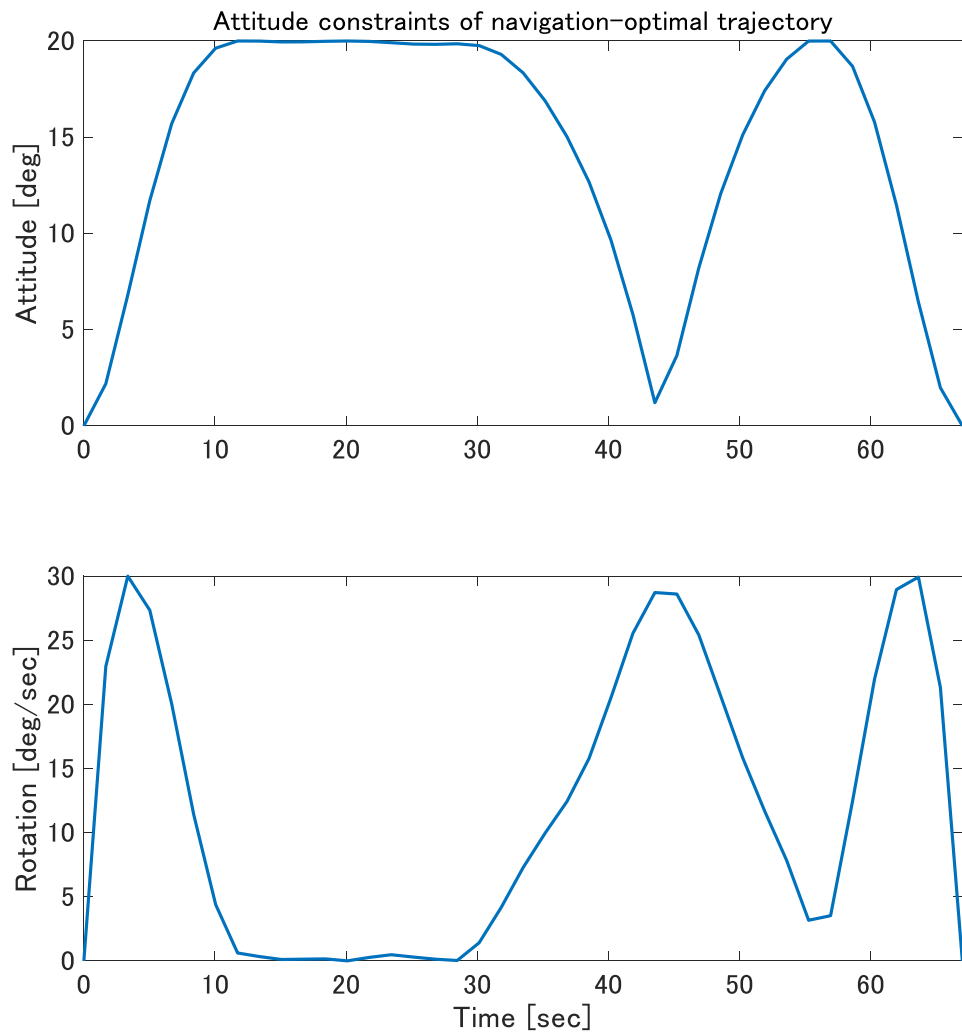


Fig 5.3-3 Case2, $t_f = 67$ sec での姿勢履歴

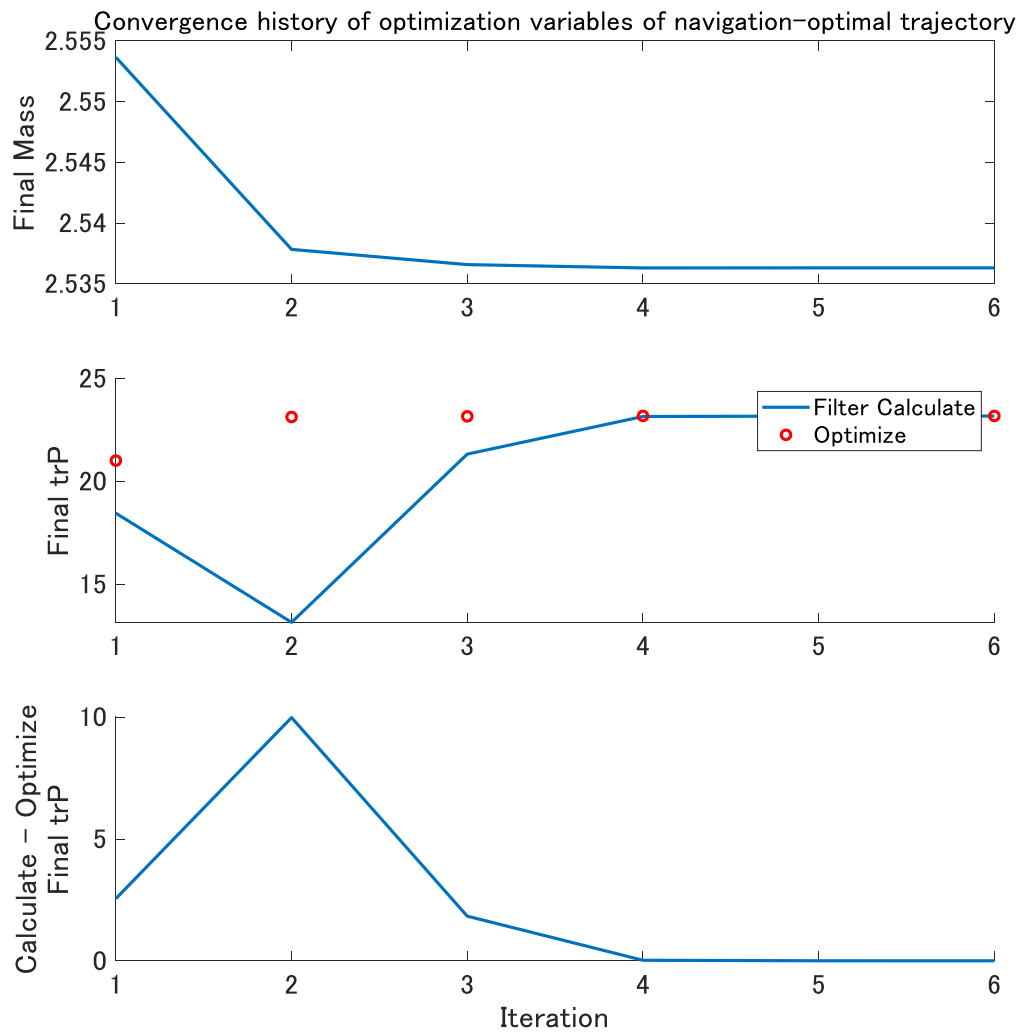


Fig 5.3-4 Case2, $t_f = 67\text{sec}$ での航法最適軌道の最適化変数の収束過程

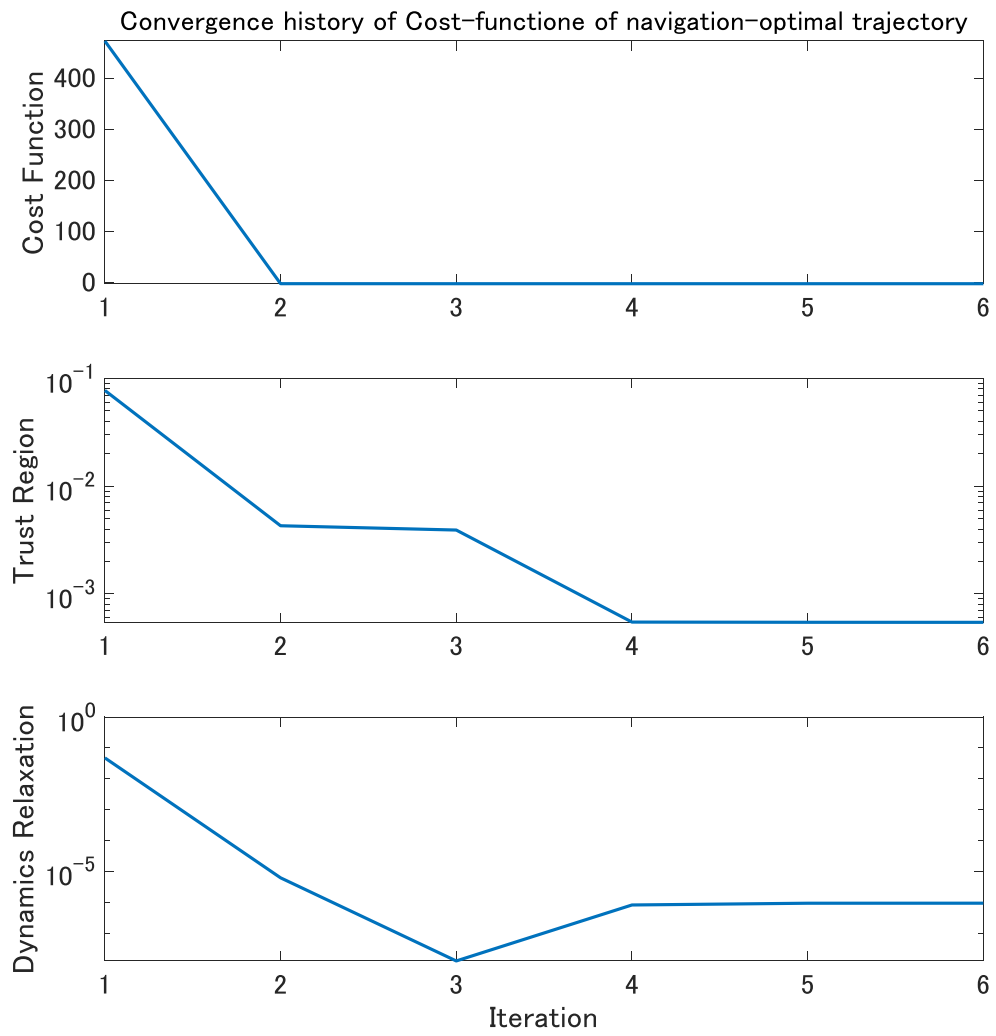
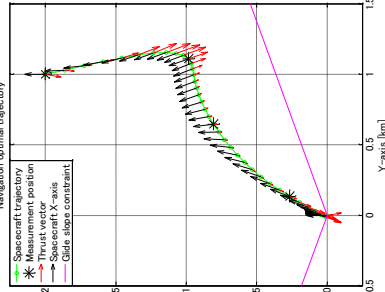
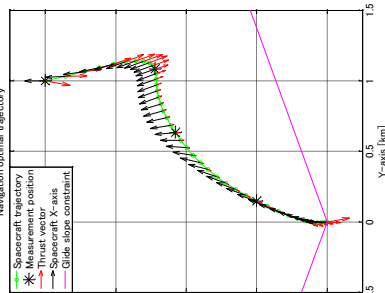
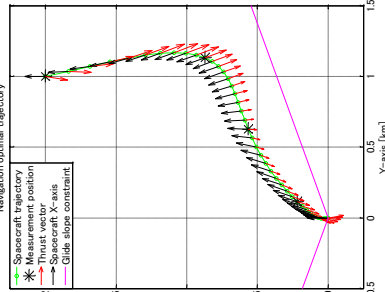
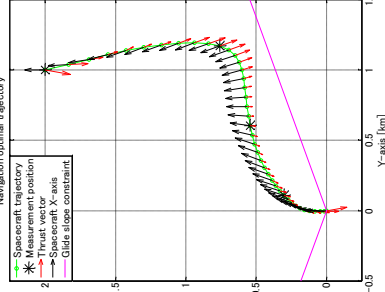
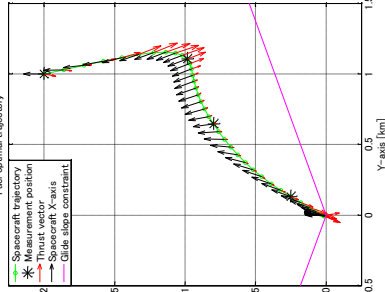
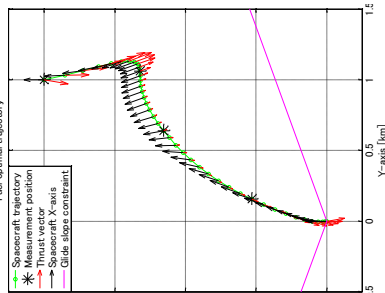
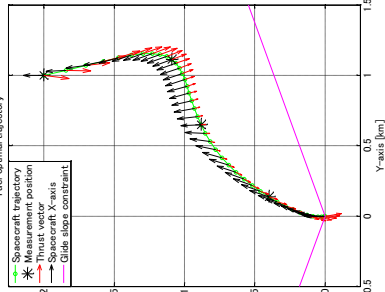
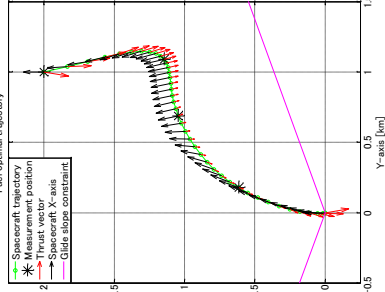


Fig 5.1-10 Case2, $t_f = 67 \text{ sec}$ での航法最適軌道の評価関数の収束過程

Table 5.3-1 終端時間解析

	$t_f = 57.0$ [s]		$t_f = 62.0$ [s]		$t_f = 67.0$ [s]		$t_f = 72.0$ [s]	
Navigation Optimal trajectory								
MCA trace(P)	29.91×10^{-3}	36.58×10^{-3}	7.94×10^{-3}	7.75×10^{-4}				
Fuel [%]	84.8	89.4	93.5	97.7				
Fuel Optimal trajectory								
MCA trace(P)	30.56×10^{-4}	51.86×10^{-4}	14.27×10^{-4}	38.61×10^{-4}				
Fuel [%]	84.8	89.3	92.7	96.9				

第6章 結論

本論文では航法最適軌道を計算可能な最適制御問題 Problem 1 を定義したのち、この問題が参照軌道周りで Problem 2 に凸化出来ることを示した。この際、Assumption 1 が成り立つとしたうえで、カルマンフィルタの共分散行列のトレース値を軌道に対し線形化する手法を示した。そして、問題の凸化と凸最適化を繰り返し実行することで、航法値の分散が小さい実行可能な軌道が生成されることを数値例上で示した。最後に、モンテカルロ解析により、生成された軌道が燃料最適軌道より航法精度の面で実際に優れていることを確認できた。

今後の検討事項を以下に示す。

(1) Assumption 1 の数学的な検証

Assumption 1 を用いた最適化手法は、今回の数値例近傍においてのみ収束解が得られるのか、もしくは全く別の問題設定にも適用できるのか、現時点ではわかっていない。そこで、今回提案した推定誤差共分散の線形化手法が、どのようなモデルや数値範囲で収束の保証があるのか、数学的に示す必要がある。

また、Assumption 1 を用いた際に線形化された問題の停留点が、Assumption 1 を用いる前の問題の停留点の一つであるかは現時点ではわかっていない。そこで、ここについても検証する必要がある。

(2) 地表特徴量分布を考慮したアルゴリズムの構築

本論文では、視線距離でのみ TRN の精度が変化するとしたが、実際は画像照合に必要な画像特徴量の分布の差も大きく影響するはずである。そこで、特徴量の多い画像データが得やすい軌道や姿勢で飛行することが必要になる。本論文のアルゴリズムを拡張し、二次元の特徴量マップを用いた手法を構築する。これは、例えば月極域の日陰領域が多い地域への着陸に特に有効であると考えられる。

同様に今後の展望は次の通り

(1) 確率システムの高速な最適化手法による他のアプリケーションへの応用

これまで、確率システムの共分散を最適制御問題として扱う事例は、確率微分動的計画法など、いくつか存在したが、それらは計算コストが高く、変化し続けるその瞬間の状況に合わせた最適化は難しかった。本手法は複数のセンサデータから確率的に最適な値を求めるカルマンフィルタの観測更新も含めてそれを可能にしたので、センサの観測精度が確率分布である、様々なアプリケーションに応用できる可能性がある。

(2) 実験を通した提案手法の検証

提案手法は様々なアプリケーション上で、実時間で動作する潜在性を持つ。しかし、シミュレーションと実際の環境とでは、発生するノイズ等が異なり、どの程度有効性があるかは明らかではない。その為、何らかのアプリケーションで実用化する場合はそれに向けた実験が必要である。現在、カメラ画像で屋内を飛行する UAV に利用することを

検討しており、シミュレーション中において、TRN 精度が異なる地表面上を飛行する際の解析を行っている。提案アルゴリズムを動作させた事例は Fig 6.1-1 の通りである。

今後, JAXA/ISAS の深宇宙探査実験棟で実験を行い, 有効性を検証する予定である。

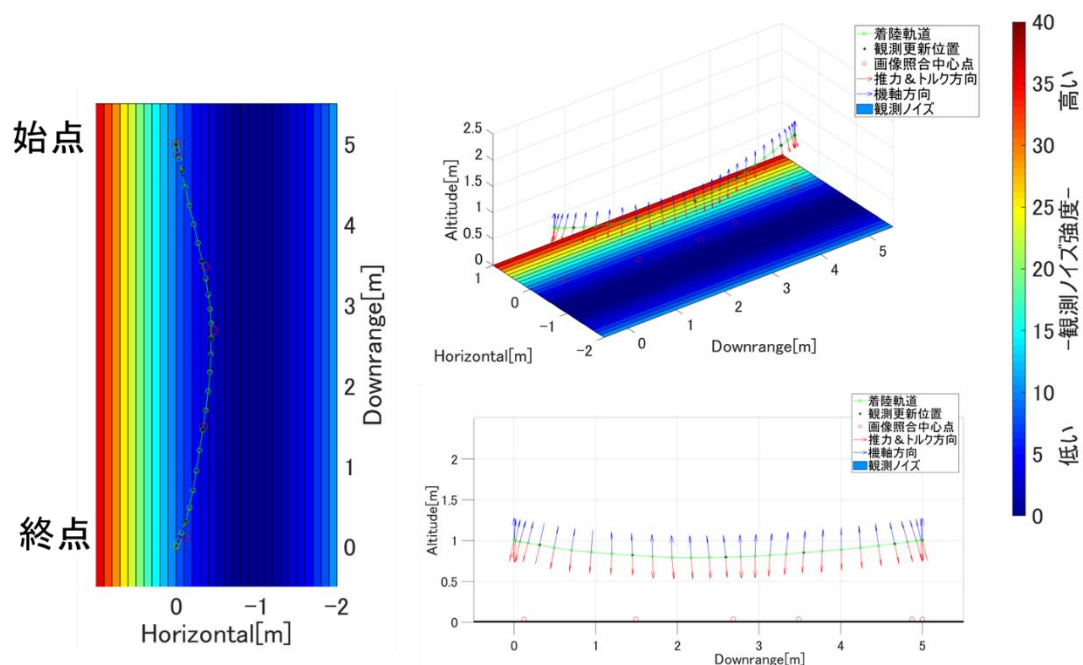


Fig 6.1-1 クアドロータ型 UAV の飛行実験における想定軌道

第7章 謝辞

学部3年の時、SpaceXのFalcon 9ロケットの第1段が人工衛星打ち上げ後に着陸する映像を見て、私は感動しました。それ以来、宇宙に行くことや、宇宙で何かをすることと同じくらい、宇宙から惑星に降り立つ技術が重要であると考えようになりました。そして、その技術の発展の余地が、多くの人の想像より数多く存在し、彼らの常識がそれらを隠してしまっていたことを、Falcon 9の着陸成功に対する注目度が示していると思います。SpaceXの着陸に関する技術の一端は、米国のニュースサイトを読むことで知ることが出来ました。その中でも特に、凸最適化を利用した誘導制御技術に、自分は一番興味を惹かれました。そのため、大学院で研究するのなら着陸と制御が出来る研究室が良いと考え、現在の研究室に進学することを決めました。

その為、坂井先生に相談する前から、惑星着陸の誘導制御という研究の大きな方向性は、心の中では決まっていました。しかし、具体的な研究のアプローチとなると、面白い案がなかなか見つかりませんでした。面白く無い案を却下して下さった先生の姿勢に本当に感謝しております。テーマが決まるまでの間は、ISAS/東大電気系の橋本先生がプロマネの月探査機OMOTENASHIの着陸減速時の運動解析や、SpaceXで着陸誘導に取り組んでいる研究者と関わりの深い研究者の着陸誘導研究の再現等を行っていました。そんな中、修士1年の12月頃に現在の研究テーマを見つけました。テーマが決まった直後、Assumption 1すら考えていなかった時に、最初の学会発表(計測自動制御学会)を申し込むことを、坂井先生が許可して下さいたことには大変感謝しております。前刷原稿提出まで1カ月しかない状況だったからこそ、今回の研究成果の核であるAssumption 1を考案できたことは、疑う余地がありません。その後も、日ごろの研究へのアドバイスや、海外での学会参加、理論を実証する実験の準備等での金銭的な支援など、JAXAのプロジェクトでお忙しい中指導して下さい、本当に感謝しております。

来年度、私は現在の研究の理論面での発展と、他のアプリケーションへの拡大を軸に、博士課程に進学する予定です。専門性や金銭面の観点から、指導教員は変わることになる予定ですが、月惑星着陸という研究の領域では、今後も坂井先生からアドバイスが得られる予定であることに感謝しております。

振り返るとあっという間の2年間でしたが、実りある2年間にすることが出来ました。今後ともよろしくお願い致します。

参考文献

- 1 MARS | SpaceX. URL:<https://www.spacex.com/mars>(2019 年 1 月 28 日閲覧)
- 2 Barker, M. K., et al. "A new lunar digital elevation model from the Lunar Orbiter Laser Altimeter and SELENE Terrain Camera." *Icarus* 273 (2016): 346-355.
- 3 橋本樹明, et al. "第 48 回月・惑星シンポジウム パネルディスカッション-将来の探査ミッション創出に向けて-概要報告." title 第 48 回月・惑星シンポジウム Proceedings of the 48th ISAS Lunar and Planetary Symposium. 2015.
- 4 Hashimoto, Tatsuaki, et al. "Lunar polar Exploration Mission." title 第 17 回宇宙科学シンポジウム 講演集 Proceedings of the 17th Space Science Symposium. 2017.
- 5 澤井秀次郎, et al. "小型月着陸実証機 SLIM のシステム設計." *航空宇宙技術* 17 (2018): 35-43.
- 6 JAXA/ISAS. "小型月着陸機 SLIM". URL:<http://www.isas.jaxa.jp/outreach/events/opencampus2018/leaflet/leaflet/4-7.pdf> (2019 年 1 月 28 日閲覧)
- 7 NASA, "Human Exploration & Operations Overview", URL: https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/nasa_exploration_update_29_aug_2018_tagged.pdf (2019 年 1 月 28 日閲覧)
- 8 Cichan, T., et al. "Mars Base Camp Updates and New Concepts." 68th International Astronautical Congress. 2017.
- 9 Braun, Robert D., and Robert M. Manning. "Mars exploration entry, descent, and landing challenges." *Journal of spacecraft and rockets* 44.2 (2007): 310-323.
- 10 JAXA, "小型月着陸実証機 (SLIM) プロジェクト移行審査の結果について", URL: http://www.jaxa.jp/press/2016/07/files/20160714_slim_01_j.pdf (2019 年 1 月 28 日閲覧)
- 11 Wolf, Aron A., et al. "Toward improved landing precision on Mars." Aerospace Conference, 2011 IEEE. IEEE, 2011.
- 12 Wilson, Michael, Jennifer Trosper, and Fernando Abilleira. "NASA Mars 2020 landed mission development." (2017).
- 13 Johnson, A.E., and Montgomery, J.F., "Overview of Terrain Relative Navigation Approaches for Precise Lunar Landing", Proc. of the IEEE Aerospace Conference, Big Sky, Montana, 2008.
- 14 Johnson, Andrew E., et al. "Real-time terrain relative navigation test results from a relevant environment for Mars landing." AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. 2015.
- 15 NASA, MARS2020 EDL, URL: <https://mars.nasa.gov/mars2020/mission/technology/entry-descent-landing/> (2019 年 1 月 28 日閲覧)
- 16 Chomel, Christina Tvrdik. Development of an analytical guidance algorithm for lunar descent. The University of Texas at Austin, 2007.
- 17 Açıkmeşe, Behçet, and Scott R. Ploen. "Convex programming approach to powered descent guidance for mars landing." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 30.5 (2007): 1353-1366.
- 18 Blackmore, Lars, Behçet Acikmese, and Daniel P. Scharf. "Minimum-landing-error powered-descent guidance for Mars landing using convex optimization." *Journal of guidance, control, and dynamics* 33.4 (2010): 1161-1171.
- 19 Blackmore, Lars, Behçet Açıkmeşe, and John M. Carson III. "Lossless convexification of control constraints for a class of nonlinear optimal control problems." *Systems & Control Letters* 61.8 (2012): 863-870.
- 20 Szmuk, Michael, and Behçet Acikmese. "Successive Convexification for 6-DoF Mars Rocket

-
- Powered Landing with Free-Final-Time." 2018 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. 2018.
- 21 Scharf, Daniel P., et al. "Implementation and Experimental Demonstration of Onboard Powered-Descent Guidance." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* (2016).
- 22 Blackmore, Lars. "Autonomous precision landing of space rockets." *The Bridge* 4.46 (2016): 15-20.
- 23 SpaceX. Twitter. URL: <https://twitter.com/spacex/status/961084879432597504> (2019 年 1 月 28 日閲覧)
- 24 井上博夏, 小野雅裕, 足立修一: 位置推定精度向上のための火星探査ローバーの経路計画, 宇宙科学技術連合講演会, 1E04, 2015
- 25 Lee, Unsik, and Mehran Mesbahi. "Optimal Power Descent Guidance with 6-DoF Line of Sight Constraints via Unit Dual Quaternions." *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. 2015.
- 26 Lee, Unsik, and Mehran Mesbahi. "Constrained Autonomous Precision Landing via Dual Quaternions and Model Predictive Control." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* (2016).
- 27 SELENE-B 検討グループ. "SELENE-B 着陸航法誘導制御系に関する検討". SELENE-B シンポジウム. 平成 13 年 7 月.
- 28 Mattingley, Jacob, and Stephen Boyd. "CVXGEN: A code generator for embedded convex optimization." *Optimization and Engineering* 13.1 (2012): 1-27.
- 29 Dueri, Daniel, Jing Zhang, and Behçet Açikmese. "Automated custom code generation for embedded, real-time second order cone programming." *IFAC Proceedings Volumes* 47.3 (2014): 1605-1612.
- 30 Behçet Açikmese. "Real-Time Convex Optimization for Control of Autonomous Systems", University of Texas at Austin. URL: https://sites.erau.edu/dbae/wp-content/uploads/sites/14/2014/11/BAcikmese_aut_pdf.compressed.pdf (2019 年 1 月 28 日閲覧)
- 31 Dueri, Daniel, et al. "Customized real-time interior-point methods for onboard powered-descent guidance." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 40.2 (2016): 197-212.
- 32 Diehl, Moritz, et al. "Real-time optimization and nonlinear model predictive control of processes governed by differential-algebraic equations." *Journal of Process Control* 12.4 (2002): 577-585.
- 33 Liu, Xinfu, and Ping Lu. "Solving nonconvex optimal control problems by convex optimization." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 37.3 (2014): 750-765.
- 34 Yang, Hongwei, Xiaoli Bai, and Hexi Baoyin. "Rapid generation of time-optimal trajectories for asteroid landing via convex optimization." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 40.3 (2017): 628-641.
- 35 Szmuk, Michael, Behçet Açikmese, and Andrew W. Berning. "Successive convexification for fuel-optimal powered landing with aerodynamic drag and non-convex constraints." *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. 2016.
- 36 Szmuk, Michael, et al. "Convexification and real-time on-board optimization for agile quad-rotor maneuvering and obstacle avoidance." *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2017 IEEE/RSJ International Conference on*. IEEE, 2017.
- 37 Mao, Yuanqi, Michael Szmuk, and Behçet Açikmese. "Successive convexification of non-convex optimal control problems and its convergence properties." *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on*. IEEE, 2016.
- 38 Mao, Yuanqi, et al. "Successive Convexification of Non-Convex Optimal Control Problems with State Constraints." *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017): 4063-4069.
- 39 Mao, Yuanqi, Michael Szmuk, and Behçet Açikmese. "Successive Convexification: A Superlinearly Convergent Algorithm for Non-convex Optimal Control Problems." *arXiv preprint arXiv:1804.06539* (2018).
- 40 Way, David W., et al. "Mars Science Laboratory: Entry, descent, and landing system performance." *2007 IEEE Aerospace Conference*. IEEE, 2007.

発表文献リスト

査読付き学術論文誌(採録決定)

- [1] 著 者 新井久旺, 坂井真一郎,
題 名 月惑星精密着陸のための航法値推定誤差分散の凸化による航法最適誘導
論文誌名 日本航空宇宙学会論文集

査読付き国際会議論文

- [2] 著 者 Hisaaki ARAI, Shinichiro SAKAI.
題 名 Rapid Generation of Navigation-Optimal Trajectories for Planetary Landing via
Convex Optimization
会 議 名 AIAA Guidance Navigation and Control Conference
場 所 San Diego
発 表 日 8th, January, 2019
開催期間 7th-11th, January, 2019

査読無し国際会議論文

- [3] 著 者 Hisaaki ARAI, Naoki MORISHITA, Tatsuaki HASHIMOTO,
題 名 Analysis of Trajectory and Attitude Error of Micro-Spacecraft due to Lateral Thrust
Disturbance of Solid Rocket Motor
会 議 名 Astrodynamics2018
場 所 Sagamihara
発 表 日 30th, July, 2018
開催期間 30th~31th, July, 2018
- [4] 著 者 Hisaaki ARAI, Shinichiro SAKAI,
題 名 Study of Navigation Optimal Landing Guidance for Planetary Lander by Convex
Optimization
会 議 名 Astrodynamics2018
場 所 Sagamihara
発 表 日 30th, July, 2018
開催期間 30th~31th, July, 2018

査読無し国内会議論文

- [5] 著 者 新井久旺, 坂井真一郎,
題 名 燃料余裕に適応し航法誤差を最小化する月着陸誘導
会 議 名 第 5 回制御部門マルチシンポジウム
場 所 東京都市大学
発 表 日 2018 年 3 月 11 日
開催期間 2018 年 3 月 8 日~3 月 11 日
- [6] 著 者 新井久旺, 坂井真一郎,
題 名 凸最適化を用いた航法最適誘導による月惑星高精度着陸の実証実験
会 議 名 第 62 回宇宙科学連合講演会
場 所 久留米市
発 表 日 2018 年 10 月 24 日
開催期間 2018 年 10 月 24 日~10 月 26 日

受賞

- [1] 学 会 名 計測自動制御学会
表 彰 名 2018 年度 制御部門研究奨励賞
対象論文 燃料余裕に適応し航法誤差を最小化する月着陸誘導
受 賞 日 2019 年 3 月 8 日 (予定)

特許

- [1] 発明の名称 誘導制御プログラム
出 願 番 号 特願 2018-168193
出 願 日 2018/9/7