

## メタルピー保存形式の地下水流動・熱輸送連成解析シミュレータの開発

環境システム学専攻 47-176657 秋田谷健人（指導教員：愛知正温 講師）

キーワード：地下水流動、熱輸送、連成解析、エンタルピー、メタルピー、温度誤差

### 1. 序論

地下の温度分布は地殻からの熱流、地下水流動による熱輸送等に支配される。これを数学モデルとして記述する地下水流動と熱輸送の連成解析技術は古くから研究されており数多くの既存研究が存在する。支配方程式は、多孔質媒体の間隙を流れる流体の質量保存式(1)と間隙流体の流動を考慮したエネルギー保存式(2)から成る。用いた記号の意味は末尾に示す。

$$\frac{\partial(\rho_w \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{q}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_{\text{bulk}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w h \mathbf{q} + \mathbf{J}) = 0 \quad (2)$$

Dodson(1971)は同連成解析において、流体が持つエネルギーとしてエンタルピーを用いると、鉛直方向の温度分布に誤差が生じることを指摘した。これはエンタルピーが、本来保存されるべき量であるメタルピー(エンタルピー+ポテンシャルエネルギー)との間に誤差を持つためである(地下水は遅いため運動エネルギーは無視される)。近年、Stauffer ら(2014)によってこの温度誤差に対する定量的な説明が試みられた。彼らはメタルピーの微小変化に基づいて、温度誤差が  $g\Delta z/c_w$  で与えられるとした。また Stauffer らは均質な地盤で鉛直上向きの速い地下水流れをエンタルピー保存形式とメタルピー保存形式の両方でシミュレートし、エンタルピーが鉛直上方向の温度を 1000 m あたり約 2.2 K 高く見積もることを確認した。

この温度誤差は十分小さいようにも見えるが、例えば相転移付近の温度域を対象とする問題においては重要となる可能性がある。また現状では様々な状況における温度誤差の振る舞いが検証されておらず、どのような状況において注意すべきことなのか

不透明である。そこで本研究ではメタルピー保存形式のシミュレータを開発し、熱収支計算におけるポテンシャルエネルギーの欠如がもたらす温度誤差のより詳細な検証を行う。地下水流速、移流方向、圧力勾配などの要因と温度誤差の関係性を明らかにするとともに、開発したシミュレータに地下水凍結シミュレーションの機能を付与し、エネルギー資源としての地下利用への貢献を目的とする。

### 2. 連成解析シミュレータの開発

#### 2.1. 地下のモデル化の構成式

本研究で開発したシミュレータは以下の構成式に基づいている。

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p + \rho_w g \nabla z) \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = -\lambda \nabla T \quad (4)$$

$$\rho_w(T, p) = \rho_{\text{TEOS-10}} \quad (5)$$

$$d\phi = \alpha_s dp + 3\alpha_{kk} \phi dT \quad (6)$$

$$E_{\text{bulk}} = \phi \rho_w \theta + (1 - \phi) \rho_s c_s T \quad (7)$$

$$\theta = c_w T + \frac{p}{\rho_w} + gz \quad (8)$$

#### 2.2. 数値計算手法の概要

温度  $T$  と圧力  $p$  を主変数とし、非線形方程式(1), (2)を連立して数値的に解くことで地下水流動と地下温度分布の時間発展をシミュレートすることができる。本研究では微分方程式の数値計算手法として有限差分法を用いる。時間方向の離散化には陽解法を採用し、移流項は 1 次精度風上差分で差分化した。図 1 にシミュレーションプログラムのフローチャートを示す。

### 3. シミュレータの妥当性検証

解析解との比較により、開発したシミュレータの妥当性を検証した。検証問題は支

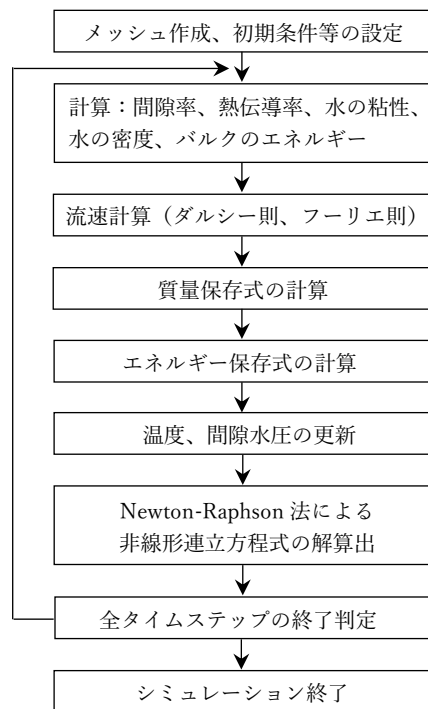


図 1 プログラムのフローチャート

配方程式(1), (2)が正しく解析されていることを確認できる以下の3つとした。

- 地下水流れのない熱伝導問題
- 温度不変の地下水流動問題
- 地下水移流による熱輸送問題

これらに加えて、開発したシミュレータでメタルピー保存形式の解析が正しく行えることを確認するため、Stauffer らの鉛直流シミュレーションを再現した。

### 3. 1. 一次元熱伝導問題

温度  $T_0$  [K] の一次元半無限物体で、片端の温度が時刻  $t=0$  で急に  $T_b$  に変化し、その温度が保たれる。このとき時刻  $t$  における温度分布  $T(x, t)$  を求める問題が一次元熱伝導問題である。図 2 に解析解とシミュレーション結果の比較を示す。図 2 で解析解とシミュレーション結果はよく一致しており、開発したシミュレータが熱伝導を再現できることが確認された。

### 4. 2. 一次元地下水流動問題

水平一次元の地下水流動問題は、比貯留係数等を設定することで熱伝導問題と同型となる。解析解とシミュレーション結果を比較したものが図 3 である。図 3 で解析解

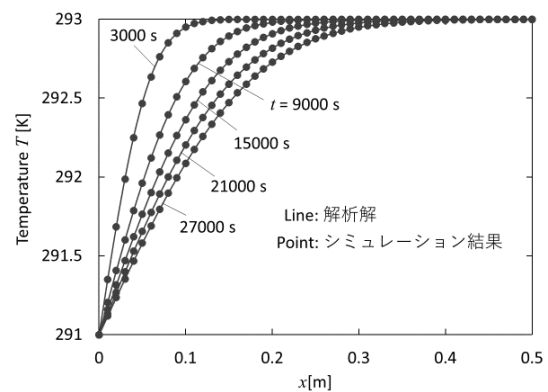


図 2 非定常熱伝導問題の解析解とシミュレーション結果の比較

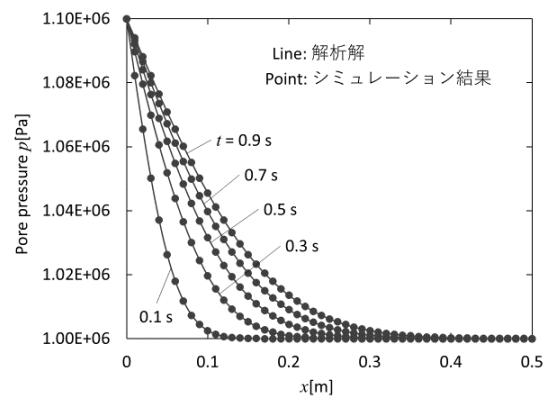


図 3 非定常地下水流動問題の解析解とシミュレーション結果の比較

とシミュレーション結果はよく一致しており、開発したシミュレータが地下水流動を再現できることが確認された。

### 4. 3. 地下水移流による熱輸送問題

一定熱量を放出する熱交換器が埋め込まれた均質な水平二次元平面の温度分布を求める。右方向に一定流速で地下水が流れるときの解析解は Diao ら(2004)によって与えられており、これをシミュレーション結果と比較したものが図 4 である。また図 5 に解析解とシミュレーション結果の差をとった誤差マップを示した。図 4 からわかるように、解析解とシミュレーション結果は比較的よく一致した。図 5 で移流の風上側（左側）に比較的大きな温度誤差があるが、移流の風上側では熱流速と質量流速が逆方向を向くためだと考えられる。風下側の y 軸上で解析解とシミュレーション結果はよく

一致しており、開発したシミュレータが地下水移流による熱輸送を再現できることが確認された。

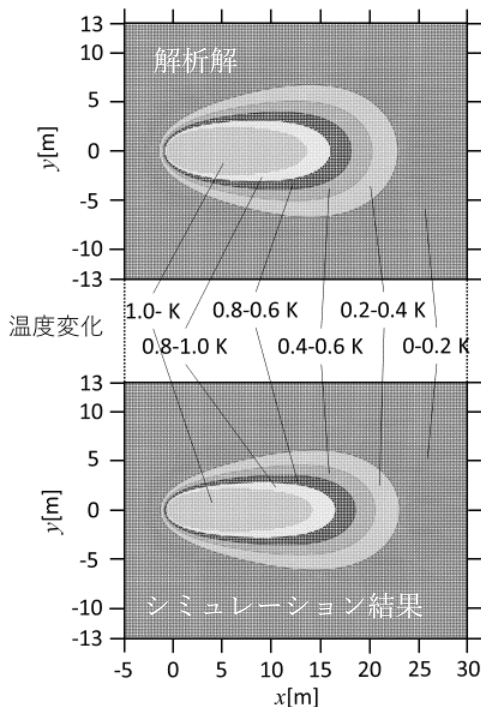


図4 移流による熱輸送問題の解析解とシミュレーション結果の比較

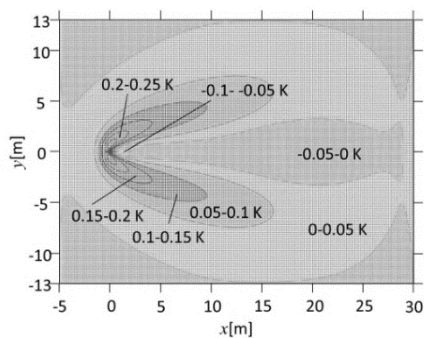


図5 誤差マップ

#### 4.4. 鉛直一次元流シミュレーション

Stauffer らの鉛直流シミュレーションを再現し（熱収支計算で重力加速度をゼロとすればエンタルピー保存形式となる）、開発したシミュレータがメタルピー形式の計算ができることを確認した。図6にStauffer らの結果と開発したシミュレータ出力の比較を示す。論文に記載のない物性条件等によるずれがあるものの温度誤差は再現できており、開発したシミュレータがメタルピー

ー保存形式の計算機能を備えていることが確認された。

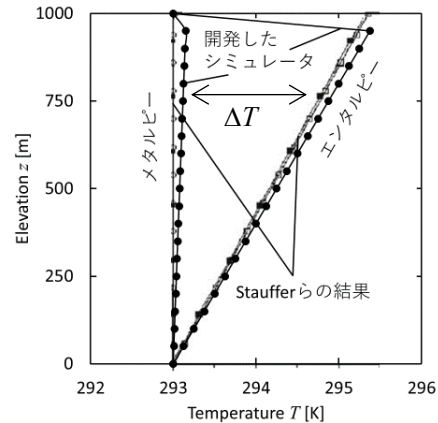


図6 Stauffer らの結果と開発したシミュレータ出力の比較

#### 5. 温度誤差に関する数値実験

熱収支計算におけるポテンシャルエネルギーの欠如がもたらす温度誤差について、鉛直一次元流シミュレーションの条件を変化させることで検討した。鉛直方向の圧力勾配、地下水流速、流体の比熱、地下水流れの方

- 定常状態における温度誤差は圧力勾配や地下水流速などに依存せず、Stauffer らが説明した  $g\Delta z/c_w$  のみに決定される。
- 温度誤差  $g\Delta z/c_w$  において、地下水流れが鉛直上向きなら  $\Delta z$  は正、下向きなら  $\Delta z$  は負とおくことで、温度誤差の見積りの高低が表現できる。

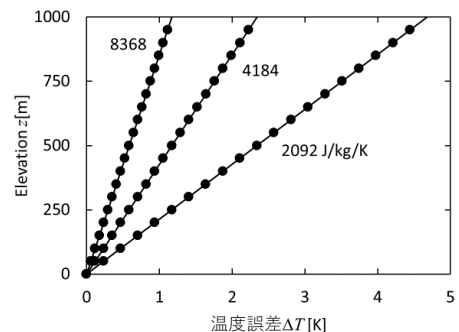


図7 流体の比熱を変化させた場合の温度誤差

## 6. 地下水の凍結シミュレーション機能

相転移付近の温度域ではわずかな温度誤差がシミュレーション結果に大きく影響することが予想される。そこで開発したシミュレータに地下水凍結をシミュレートする機能を付与した。

間隙中の氷の飽和度を考慮した上で、エネルギー保存則に相転移にかかる潜熱項を加えた。氷の飽和度と水の飽和度の和は 1 で、水の飽和度は温度の関数として与えられる (図 6)。この構成式を組み込んだ支配方程式は、温度が零度以上のときには間隙中の氷の飽和度がゼロ (一定値) となり、潜熱項が消失する。したがって、零度以上では支配方程式は凍結シミュレート機能の付与前のものと完全に一致する。

$$E_{\text{bulk}} = \phi S_w \rho_w \theta + \phi S_i \rho_i c_i T + (1 - \phi) \rho_s c_s T - \phi (1 - S_i) \rho_i L_f \quad (9)$$

$$S_i + S_w = 1 \quad (10)$$

$$k_{rw} = \frac{S_w^4}{(1 - \sqrt{1 - S_w})^2} \quad (11)$$

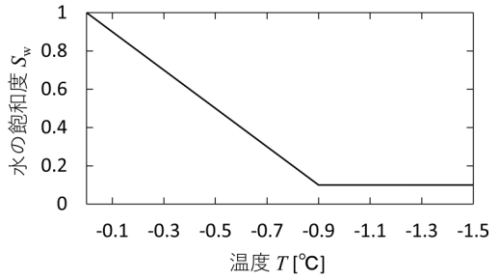


図 8 水の飽和度の温度変化関数

## 7. 結論

本研究では、メタルピー保存形式の地下水流動 - 熱輸送連成解析シミュレータを開発した。解析解との比較によりシミュレータの妥当性を検証したのち、熱収支計算におけるポテンシャルエネルギーの欠如がもたらす温度誤差について検討を行った。その結果として以下の知見を得た。

- 定常状態の温度分布に対して地下水流速は寄与しない。
- 圧力勾配は定常状態の温度分布に対して寄与するが、温度誤差に対しては寄与しない。

- 鉛直方向の流動に対してエンタルピーが含む定常状態の温度誤差の大きさは  $g\Delta z/c_p$  で与えられる。
- エンタルピーは鉛直上向き流れのとき温度を高く見積もり、下向きのとき温度を低く見積もる。

また相転移付近の温度域でのシミュレーション需要を見据えて、地下水凍結をシミュレートする機能をシミュレータに付与した。温度が零度以上のときには間隙中の氷の飽和度がゼロとなり、支配方程式が凍結シミュレート機能の付与前のものと完全に一致する。

本要旨で用いた記号

$\rho_w$	: 水の密度[kg/m <sup>3</sup> ]
$\phi$	: 間隙率[-]
$q$	: ダルシー流速[m/s]
$E_{\text{bulk}}$	: バルクのエネルギー[J]
$h$	: (比)エンタルピー[J/kg]
$\theta$	: (比)メタルピー[J/kg]
$J$	: 熱流束[W/m <sup>2</sup> ]
$c$	: 定圧比熱[J/kg/K]
$u$	: 内部エネルギー[J/kg]
$p$	: 間隙圧力[Pa]
$g$	: 重力加速度[m/s <sup>2</sup> ]
$k$	: 浸透率[m <sup>2</sup> ]
$\mu$	: 流体の粘性[Pa s]
$T$	: 温度[K]
$S_i$	: 氷の飽和度
$L_f$	: 氷の相転移にかかる潜熱[J/kg]

## 参考文献

- [1] Dodson M. H.(1971): Isenthalpic Flow, Joule-Kelvin Coefficients and Mantle Convection, Nature, 234, 1971.
- [2] Philip H. Stauffer, K. C. Lewis, Joshua S. Stein, Bryan J. Travis, Peter Lichtner, George Zvoloski(2014): Joule-Thomson Effects on the Flow of Liquid Water, Transport in Porous Media, 105(3), 471-485.
- [3] Diao NR, Li QY, Fang ZH(2004): Heat transfer in ground heat exchangers with groundwater advection, Int J Therm Sci, 43, 1203-1211.