

東京大学大学院新領域創生科学研究科
社会文化環境学専攻

2018 年度
修士論文

座屈固有値問題の縮約による
個材座屈荷重の検出法とその実験検証

Extraction and Experimental Verification
of Individual Element Buckling Loads
by Contraction of the Buckling Eigenvalue Problem

2019 年 1 月 21 日提出
指導教員 佐藤 淳 准教授
朝原 真知子 Asahara, Machiko

目次

1. 序論	1
1.1 研究背景	1
1.2 既往研究	3
1.2.1 個材の座屈荷重算出に関する既往研究	3
1.2.2 座屈に対する形状最適化に関する既往研究	4
1.3 目的と構成	5
2. 座屈設計法についての考察	6
2.1 現行の座屈設計法	6
2.1.1 構造全体系の線形座屈解析による座屈荷重の算出法	6
2.1.2 $M - N$ 相関曲線による強度評価	8
2.1.3 現行の座屈設計法の問題点	9
2.2 座屈固有値問題の縮約による個材の座屈荷重の検出法	11
2.2.1 縮約の概念	11
2.2.2 既往の縮約手法	13
2.2.3 縮約による個材座屈荷重の成果と問題点	16
3. 縮約による個材の座屈荷重の実験検証	19
3.1 個材の座屈荷重の検証方法	19
3.2 実験	24
3.2.1 材料試験	24
3.2.2 実験概要	26
3.2.3 実験結果	28
3.3 実験結果と解析結果による検証	33
3.3.1 分析方法	33
3.3.2 試験体別の検証	35
3.3.3 まとめ	42
3.4 今後の実験計画	44
4. 個材固有値を指標とした座屈に対する形状最適化	45
4.1 個材固有値による座屈安全率	45
4.2 座屈モードの分析と断面強化による最適化に関する考察	46
4.2.1 個材の座屈モードの分析方法	46
4.2.2 4層ラーメン構造の座屈モード	47
4.2.3 1 本柱の座屈モード	55
4.3 部材体積の分配による最適化	62
4.3.1 両端ピン支持柱の形状最適化に関する考察	62
4.3.2 両端固定柱の場合の検討	66
4.3.3 三角形モデルの場合の検討	69
4.3.4 部材分割数を変えた場合の検討	73
4.3.5 部材の座屈長さが異なる場合の検討	77

4.3.6 斜め格子壁の最適化	83
4.4 今後の最適化手法についての検討事項	87
5. 結論と今後の課題	88
参考文献	89
謝辞	90

1. 序論

1.1 研究背景

薄肉部材や細長い部材を用いた架構（例：図 1.1.1, 1.1.2）を設計する際、圧縮力を受ける部材は座屈現象を考慮する必要がある。特に、終局時の解析では座屈の影響が増すので、どのように設計するかは全体形態を左右する。



図 1.1.1 アストラムライン新白島駅（撮影：堤千春）

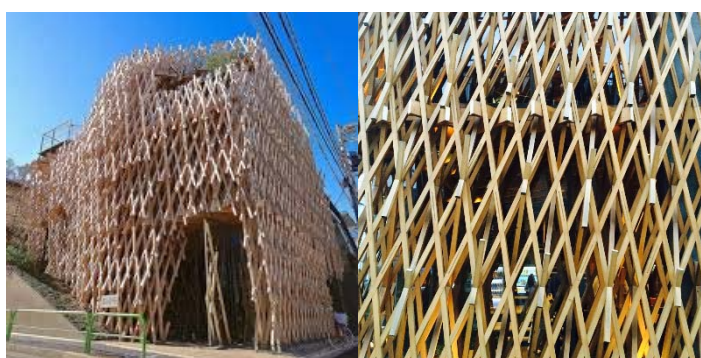


図 1.1.2 Sunny Hills 青山（撮影：堤千春）

複雑な荷重条件や架構形状で座屈を考慮した崩壊挙動は、材料非線形と幾何学的非線形を考慮した FEM 等で解析できる。しかしこの解析では部材を細かく要素分割する必要があり、これで部材断面を決定する設計を試みると膨大な作業を要する。そこで現実的には、架構を構成する部材ごとに 1 本の線材でモデル化し、座屈と塑性化が混在した状態を強度評価して設計する。直感的に理解しやすく、また各部材の余裕度の把握も容易である。

わが国の鋼構造建築物の現行設計規準・指針^{[1]~[3]}では、部材長と部材端の拘束条件から個材ごとに有効座屈長を算出して、座屈荷重を評価する方法が提案されている。複雑な構造体についても適切に座屈長さを評価するために、周辺部材の境界条件や座屈モードを考慮する手法^[4]も提案されている。しかし、座屈長さは荷重、剛性分布にも依存するので一意に定義することは困難である。

そこで、複雑な荷重条件や架構形状に対しては有限要素法による線形座屈解析が有効な手法となる。この解析法では、架構全体系の座屈固有値問題を解くことで得られる固有値 λ を座屈荷重倍率として座屈荷重を算出する。

しかし、この手法は設計上多くの問題点を残している^{[6]~[8]}。例えば、これを用いた既存の座屈設計法では、架構全体で一律の座屈荷重倍率 λ を採用するため、部材によっては過剰に安全率を見込んでしまう場合がある。過小評価された座屈荷重を用いて終局時の解析をして設計すると、実際に必要とされる以上の材料や部材を配置しなければならない。

こうした背景から、近年これらの問題を改善する案として次節に挙げた手法^{[6]・[9]~[11]}が提案されているが、それらは未だ適用できる架構形状が限定的である等の課題がある。また、それらを用いた部材ごとの強度評価の妥当性は十分検証されていない。

余裕度の把握しやすさや計算負荷の観点から、非線形解析を行わないことが望ましいので、既存の線形座屈解析と同様に線形の静的応力解析の結果のみを用いて、架構中の個材ごとに座屈荷重倍率を知る手法が考案できれば、複雑な構造体に対しても個材の適切な座屈荷重を算出することが可能になり、より経済的で合理的な設計ができるようになる。

さらに、将来的には複雑な架構形状を最適化する 1 つの指標として、この個材ごとの座屈に対する安全率を用いることもできると考えられる。

1.2 既往研究

1.2.1 個材の座屈荷重算出に関する既往研究

線形座屈解析結果で得られる座屈荷重の過小評価を修正するために、いくつかの手法が研究・提案されてきた。以下にその研究概要を示す。

○高次固有値法（文献 [6], [9], [10]）

通常の線形座屈解析を用いた座屈設計法では、構造全体系の座屈固有値問題から求まる正の最小固有値にのみ着目する。一方でこの手法では、構造体を構成する各部材単独の座屈に注目し、高次固有値まで考慮するのが特徴である。構造全体系の最小固有値で不合理な座屈荷重になる部材が生じた場合、その部材単独の座屈に支配される高次の座屈モードに対応する固有値を求めて座屈荷重倍率とし、この部材の座屈荷重を算出する。

しかし、各座屈モードにおいて、どの部材の変形が卓越しているかを判定する方法が明確でなく、設計技術者の主観による視覚的判断に委ねられていること等の問題点を残している。

○付加軸力法（文献 [6], [11]）

構造体の耐力を最大化するように最適設計するには、すべての部材の軸圧縮力に対する余裕度を一致させればよい。不合理な座屈荷重が存在する場合、その部材は強度上余裕がある。そこでこの手法では、この余裕がある断面部材の作用軸圧縮力のみを増加して調整し、すべての部材の軸圧縮力に対する余裕度が等価になるまで繰り返し計算を行って有効座屈長を決定する。

しかし、複雑な構造体の場合収束計算に注意が必要なうえ、一部の部材のみ軸圧縮力を増加させるので、得られる全体固有値が低下し他の部材の軸圧縮強度に変化が現れてしまう等の問題点を残している。

○固有値問題の縮約による個材座屈荷重の検出法（文献 [12]～[15]）

本研究の前身にあたる頃は、座屈固有値問題を構成する弾性剛性マトリクスと幾何剛性マトリクスの両方を考慮した縮約により個材の固有値を算出し、存在軸力との積を求めることで、個材の座屈荷重を求める方法を提案している。また、高岡によって縮約された剛性マトリクスの具象化が試みられている。

この手法で得られる個材の座屈荷重については、いくつかの解析結果で考察がなされているが、その傾向について十分明らかにされていない。

以上のすべての既往研究で、提案手法を用いると部材断面を小さく設計できることは示されているが、得られる個材の座屈荷重の値が妥当な評価であるかが明確になっていない。

1.2.2 座屈に対する形状最適化に関する既往研究

座屈荷重に対する形状最適化は、Keller ら^[16]が確立した変分法による解法を基礎に、甘利ら^[17]によって有限要素法と傾斜投影法を用いた骨組構造の最適化手法が提案されたり、浜田ら^[18]によって逆変分原理を用いた最適化手法の提案が行われたりしている。

また、堤^[14]によって、本論文でも扱う座屈固有値問題の縮約により算出した個材の固有値を指標にした形状最適化手法について検討がなされている。

1.3 目的と構成

本論文の目的は2つある。1つは、全体系の座屈固有値問題の縮約によって検出される個材の座屈荷重の妥当性を検証することである。2つ目は、そのときに算出される縮約による個材固有値をもとに構造体を座屈に対して形状最適化する手法を見つけることである。

まず2章で、現行の線形座屈解析による $M-N$ 相関曲線を用いた座屈設計法の概要と問題点を整理する。続いて、これまで研究されてきた座屈固有値問題の縮約による個材座屈荷重の検出法について、その成果と残された課題を説明する。

3章では、既存の座屈設計法と縮約による検出法の個材座屈荷重の妥当性を実験と解析を通して検証する。4章では、個材固有値を指標とした座屈に対する形状最適化手法を探る。

本論文中の数値解析結果は、 $10 \text{ (N)} = 1 \text{ (kgf)}$ として重力単位系に換算した数値がより精度の高い結果である。

2.1.2 $M - N$ 相関曲線による強度評価

架構中での梁-柱の塑性化の判定には、曲げモーメントと軸力の強度相関式 ($M - N$ 相関曲線) が用いられる。微小変形理論による静的弾性応力解析によって得られるのは部材端の応力と変形である。この応力には部材中間のたわみ δ や節点の移動 Δ によって曲げモーメントや軸力が付加される効果 ($P - \delta$ 効果, $P - \Delta$ 効果) が含まれないが、これを考慮した曲げモーメント M と軸力 N を用いれば、例えば 1 軸曲げを受ける矩形断面の梁-柱の最大耐力を規定する $M - N$ 相関曲線は式 (2.1.6) で書ける。圧縮側最大値は降伏軸力 N_y 、曲げモーメント側最大値は軸力がない場合の全塑性モーメント M_p の値をとる (図 2.1.1)。終局時の解析で荷重増分解析をする場合は、応力点がこの曲線に到達した時点で塑性化したと判定し、そのあとは曲線上を動く。

$$\left(\frac{N}{N_y}\right)^2 + \frac{M}{M_p} = 1 \quad (2.1.6)$$

現行の設計指針^{[1]~[3]}では、座屈を考慮して塑性化を判定し部材設計をする際には、圧縮側最大値を部材の座屈荷重 N_{cr} まで低下させた式 (2.1.7) を用いる手法がとられている。

$$\left(\frac{N}{N_{cr}}\right)^2 + \frac{M}{M_p} = 1 \quad (2.1.7)$$

この相関式は、軸圧縮力が座屈荷重に至った時点で部材は抵抗力を失い、曲げモーメントを一切負担できないことを考慮し、この純圧縮状態と連続性を確保するために軸圧縮力のみを受ける状態での座屈荷重 N_{cr} で左辺第 1 項の分母を置き換えたものである。前項の構造全体系の線形座屈解析はこの部材の座屈荷重 N_{cr} を算出するために適用される。

式 (2.1.7) による強度評価は、通常厳密解と比較して安全側であることが分かっている。

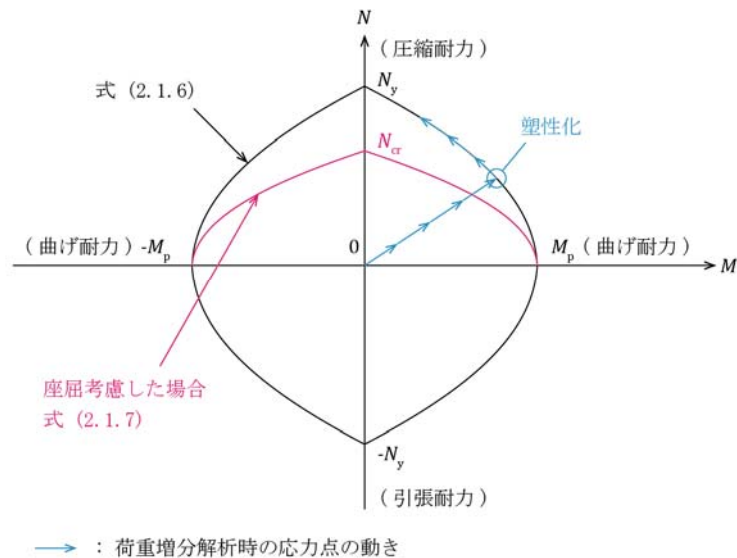


図 2.1.1 最大耐力を規定する $M - N$ 相関曲線

2.1.3 現行の座屈設計法の問題点

上述の固有値問題を用いた構造全体系の線形座屈解析によって求めた座屈荷重 N_{cr} で導かれる $M-N$ 相関曲線を使った現行の座屈設計法の問題点を2つ挙げる。

1つ目は、座屈解析を行う荷重状態をどのように設定するかという問題点である。終局時の最大耐力を規定する $M-N$ 相関曲線を設定するための座屈解析は、一般に長期荷重について行うがその妥当性は明らかでない。荷重分布が変わっていくとき、各時点での座屈荷重倍率、座屈モードも変化する。また、そもそも座屈を考慮した $M-N$ 相関曲線(式(2.1.7))は曲げモーメントが0の場合での強度評価式としての連続性から安全側に導かれているので、曲げモーメントが存在する場合には過小評価になりすぎている可能性がある。

2つ目は、個材の座屈荷重が分からないので、部材の座屈荷重倍率 λ として構造全体系の座屈固有値問題から算出した最小固有値を一律に存在軸力 N に掛ける点である。このことは、すべての部材が同時に座屈する状態を想定して設計していることを意味する。そのため、この設計法では実際には座屈に至っていない部材についても座屈したとみなされ、軸圧縮力が小さい部材等で座屈荷重が過剰に小さく算出され、 $M-N$ 相関曲線を過小評価してしまう。

例として、1層の門型ラーメン(図2.1.2)に水平力が加わるときの座屈設計について考える。

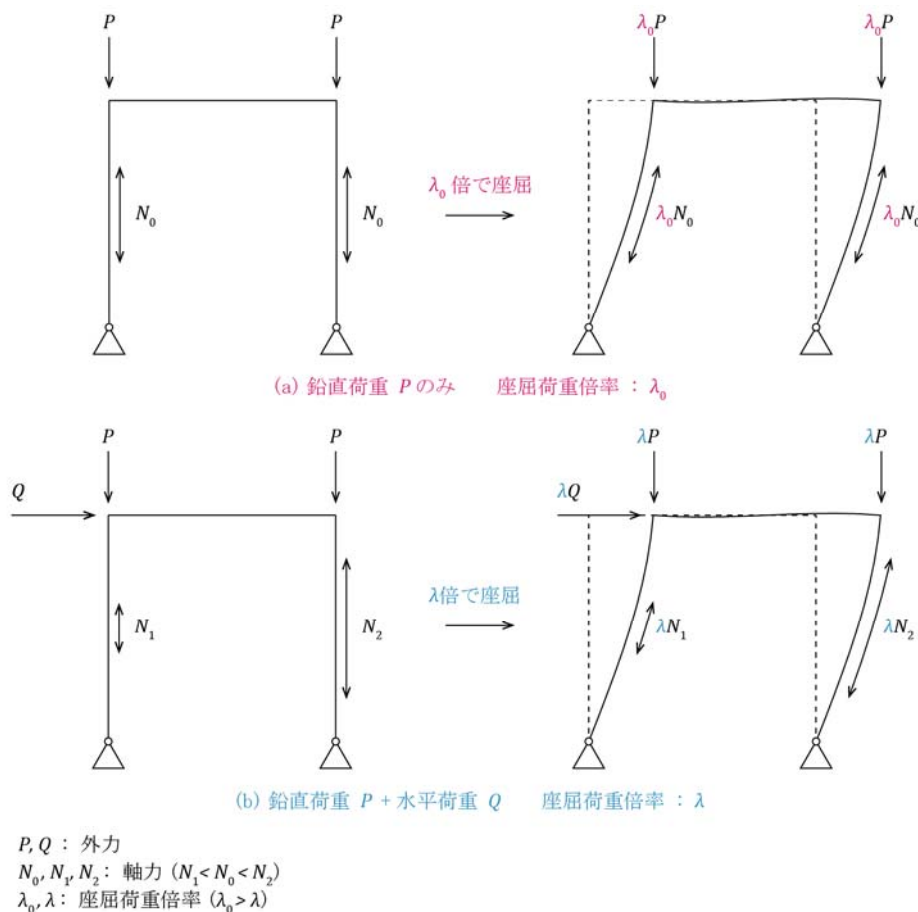


図 2.1.2 1層門型ラーメン 座屈設計例

(a) 鉛直荷重 P のみの状態と (b) 鉛直荷重 P と水平荷重 Q が加わっている状態で、それぞれ静的弾性解析と固有値問題による線形座屈解析を行い、結果は図2.1.2中に記したようになっ

たとする。座屈荷重倍率は (a) で λ_0 , (b) で λ である ($\lambda_0 > \lambda$)。ここから得られる座屈荷重を $M-N$ 相関曲線に反映させると図 2.1.3 のようになる。

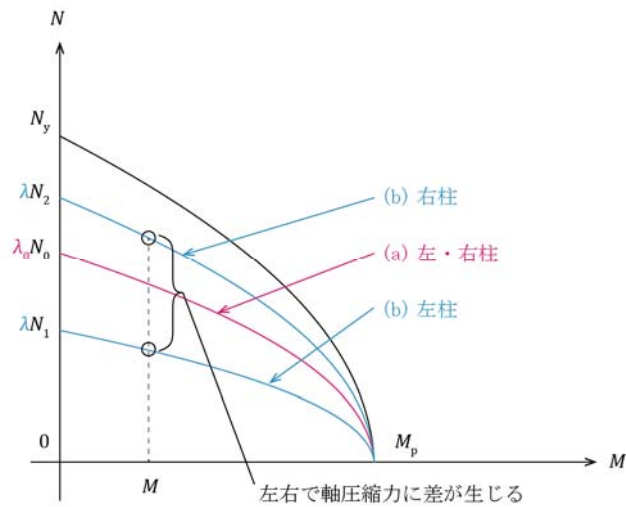


図 2.1.3 座屈を考慮した 1 層門型ラーメン柱材の $M-N$ 相関曲線

このとき、荷重状態 (a) と (b) で算出される柱の座屈荷重が異なる。(a) の荷重条件下では、左右の柱で同じ座屈荷重 $\lambda_0 N_0$ が求まるので、同じ $M-N$ 相関曲線が設定できる。

しかし、実際には水平荷重 Q が増え終局状態に向かうとき、解析結果のように右柱の座屈荷重が大きくなっていくこと ($\lambda_0 N_0 < \lambda N_2$) が知られている^[7]。そこで、(b) の水平荷重 Q が入力された状態での座屈解析結果を採用すると、左柱は座屈荷重が小さくなり ($\lambda_0 N_0 > \lambda N_1$)、(a) のときより曲線が内側に入る。左右の柱で同じ曲げモーメント M に対して最大耐力時の軸圧縮力に差が出てしまい左柱の $M-N$ 相関曲線は過小評価に感じられる。

なお、これらの事象は座屈設計ガイドライン^[6]等さまざまな文献で指摘されている。

この例のように、簡単で規則的な架構については、その結果の不合理性は感覚的に捉えやすく、経験的に妥当性のある修正方法^{[6]・[9]~[11]}も提案されている。しかし、適用できる架構形状が限定的である場合が多く、架構が複雑になると個材ごとに対処することは難しくなる。様々な構造体に対応できるような定式化がされていて、 $M-N$ 相関曲線を用いた部材ごとの強度評価に使える、適切な個材の座屈荷重を算出する方法の開発が必要である。

2.2 座屈固有値問題の縮約による個材の座屈荷重の検出法

2.2.1 縮約の概念

本論文では、個材の座屈荷重を算出するために、構造全体系の線形座屈解析に代わる手法の1つとして考案された座屈固有値問題の縮約による方法を検証する。縮約手法については、これまでの鈴木ら^{[12]、[13]}が研究を進めてきた縮約操作の問題点を改善したとして、本研究の前身である堤^[14]によって提案されたものを用いる。まず、以下でその概念を説明する。

個材の座屈荷重を検出するために、全体架構から個材を取り出し、架構中での拘束状態や剛性を等価なばねや外力に置換した状態として表現することを考える(図 2.2.1)。解析的には、座屈固有値問題(式(2.1.1))を構成する全体弾性剛性マトリクス $[K_E]$ と全体幾何剛性マトリクス $[K_G]$ 内の個材端2節点に寄与する行と列のみを残すように、その他の行と列を消していくことでこれを試みる。このとき、消去した行と列の情報を、残すマトリクス内の要素に付加させていくことで架構全体の情報を個材へと落とし込む(図 2.2.2)。

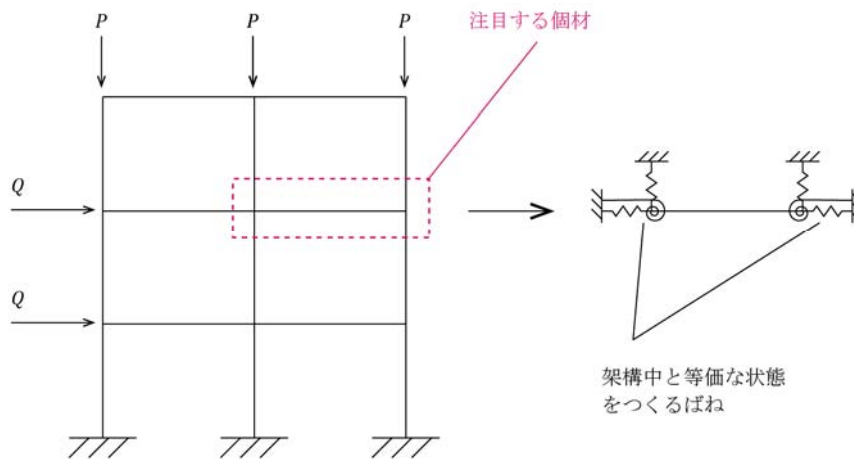


図 2.2.1 縮約による架構の変化イメージ

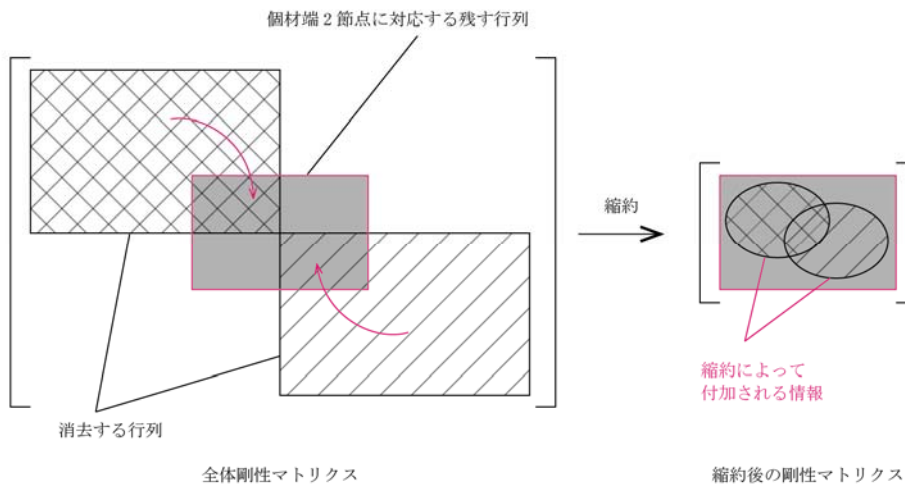


図 2.2.2 縮約によるマトリクスの変化イメージ

縮約して得られた個材の弾性剛性マトリクス $[K_E']$ ，幾何剛性マトリクス $[K_G']$ で再構成した固有値問題 (式 (2.2.1)) から個材ごとに固有値 λ' (以後，個材固有値と呼ぶ) を求め，式 (2.2.2) のように部材軸力 N との積を縮約による個材の座屈荷重 N_{cr}' とする．これによって，個材の座屈荷重を適切に把握できる可能性がある．

$$[K_E]\{U_e\} = \lambda[K_G]\{U_e\} \quad \text{再掲(2.1.1)}$$

λ : 固有値，座屈荷重倍率

$[K_E]$: 全体弾性剛性マトリクス

$[K_G]$: 全体幾何剛性マトリクス

$\{U_e\}$: 固有ベクトル，座屈モード

$$[K_E']\{U_e'\} = \lambda'[K_G']\{U_e'\} \quad (2.2.1)$$

λ' : 縮約による個材固有値，座屈荷重倍率

$[K_E']$: 縮約して得られた個材の弾性剛性マトリクス

$[K_G']$: 縮約して得られた個材の幾何剛性マトリクス

$\{U_e'\}$: 縮約による個材の固有ベクトル，座屈モード

$$N_{cr}' = \lambda'N \quad (2.2.2)$$

N_{cr}' : 縮約による個材座屈荷重

N : 部材軸力

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_{44}(b_{11}b_{44} - b_{14}b_{41}) & a_{44}(b_{12}b_{44} - b_{14}b_{42}) & a_{44}(b_{13}b_{44} - b_{14}b_{43}) \\ a_{44}(b_{21}b_{44} - b_{24}b_{41}) & a_{44}(b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}) & a_{44}(b_{23}b_{44} - b_{24}b_{43}) \\ a_{44}(b_{31}b_{44} - b_{34}b_{41}) & a_{44}(b_{32}b_{44} - b_{34}b_{42}) & a_{44}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{44}b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{44}b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{44}b_{44} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11} - b_{14} \cdot b_{41}/b_{44} & b_{12} - b_{14} \cdot b_{42}/b_{44} & b_{13} - b_{14} \cdot b_{43}/b_{44} \\ b_{21} - b_{24} \cdot b_{41}/b_{44} & b_{22} - b_{24} \cdot b_{42}/b_{44} & b_{23} - b_{24} \cdot b_{43}/b_{44} \\ b_{31} - b_{34} \cdot b_{41}/b_{44} & b_{32} - b_{34} \cdot b_{42}/b_{44} & b_{33} - b_{34} \cdot b_{43}/b_{44} \end{bmatrix} \quad (2.2.8)
\end{aligned}$$

以上の計算より、 k 行 k 列を消去したマトリクスの i 行 j 列の成分 a_{ij}' , b_{ij}' は次のように表せることが分かる。

$$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{kk}} \quad (2.2.9)$$

$$b_{ij}' = b_{ij} - \frac{b_{ik}b_{kj}}{b_{kk}} \quad (2.2.10)$$

そこで、 $[D_E^k]$, $[D_G^k]$ を式 (2.2.11), (2.2.12) のように定義すると、式 (2.2.13) で式 (2.2.3) と同じ縮約結果が得られるので、以後、解析で用いるプログラム内では計算量が少ない式 (2.2.13) を採用する。

$$[D_E^k] = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{kk} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 \\ & & a_{kk} & \\ & & & 0 \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & a_{kk} \end{bmatrix} \quad (n \text{ 行 } n-1 \text{ 列}) \quad (2.2.11)$$

$$[D_G^k] = \begin{bmatrix} 1 \\ b_{kk} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 \\ & & b_{kk} & \\ & & & 0 \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & b_{kk} \end{bmatrix} \quad (n \text{ 行 } n-1 \text{ 列}) \quad (2.2.12)$$

$$[C_E^k][K_E^n][D_E^k]\{U_e'\} = \lambda'[C_G^k][K_G^n][D_G^k]\{U_e'\} \quad (2.2.13)$$

例として、先の 4 行 4 列マトリクスで 4 行 4 列目を消去する操作の式を以下に示す。

$$\begin{aligned}
&[C_E^4][K_E^4][D_E^4] \\
&= \begin{bmatrix} a_{44} & 0 & 0 & -a_{14} \\ 0 & a_{44} & 0 & -a_{24} \\ 0 & 0 & a_{44} & -a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{44} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} - a_{14} \cdot a_{41}/a_{44} & a_{12} - a_{14} \cdot a_{42}/a_{44} & a_{13} - a_{14} \cdot a_{43}/a_{44} \\ a_{21} - a_{24} \cdot a_{41}/a_{44} & a_{22} - a_{24} \cdot a_{42}/a_{44} & a_{23} - a_{24} \cdot a_{43}/a_{44} \\ a_{31} - a_{34} \cdot a_{41}/a_{44} & a_{32} - a_{34} \cdot a_{42}/a_{44} & a_{33} - a_{34} \cdot a_{43}/a_{44} \end{bmatrix} \quad (2.2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [C_G^4][K_G^4][D_G^4] \\
&= \begin{bmatrix} b_{44} & 0 & 0 & -b_{14} \\ 0 & b_{44} & 0 & -b_{24} \\ 0 & 0 & b_{44} & -b_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 1/b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 1/b_{44} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11} - b_{14} \cdot b_{41}/b_{44} & b_{12} - b_{14} \cdot b_{42}/b_{44} & b_{13} - b_{14} \cdot b_{43}/b_{44} \\ b_{21} - b_{24} \cdot b_{41}/b_{44} & b_{22} - b_{24} \cdot b_{42}/b_{44} & b_{23} - b_{24} \cdot b_{43}/b_{44} \\ b_{31} - b_{34} \cdot b_{41}/b_{44} & b_{32} - b_{34} \cdot b_{42}/b_{44} & b_{33} - b_{34} \cdot b_{43}/b_{44} \end{bmatrix} \tag{2.2.15}
\end{aligned}$$

ただし，縮約途中の $[K_G^n]$ は対角成分に 0 を持つ行列であり，消去したい行の対角成分が 0 のとき，式 (2.2.12) より縮約行列 $[D_G^k]$ を求めることができない．そこで， $[K_G^n]$ は対角成分が 0 のときはその行と列の他の成分もすべて 0 であることに注目して， $[K_G^n]$ の縮約は式 (2.2.16) から式 (2.2.17) のようにマトリクスを小さくする操作のみ行うこととする．

$$[K_G^4] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.16}$$

$$[K_G^3] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \tag{2.2.17}$$

このとき，弾性剛性マトリクスについては通常の縮約と同じ操作を行う．ここまでで一見，剛性マトリクスごとに異なる縮約操作をしているように感じられるが， $[K_G^n]$ の対角要素が 0 のときは例外的に $[C_G^k]$ ， $[D_G^k]$ のかわりに $[C_E^k]$ ， $[D_E^k]$ をかけるとすれば，両辺で同じ縮約マトリクスを掛け合わせていることに変わりはない．

2.2.3 縮約による個材座屈荷重の成果と問題点

堤^[4]の論文では、前項の縮約手法によって算出される個材の座屈荷重 N_{cr}' についていくつかのモデルを使って傾向を把握している。その傾向で本論文に関係のある一部を以下で説明する。

2次元解析モデル frame A は本論文用に新しく用意した (図 2.2.3)。荷重条件を変えた frame A1~A3 の解析結果を図 2.2.4~6、表 2.2.1~3 に示す。各図で (a) は荷重条件と部材の軸力を表し、圧縮を正とする。(b) は座屈荷重を、(c) は図 2.2.3 の分割モデルの線形座屈解析を行ったときの結果から描画した座屈モードを表す。

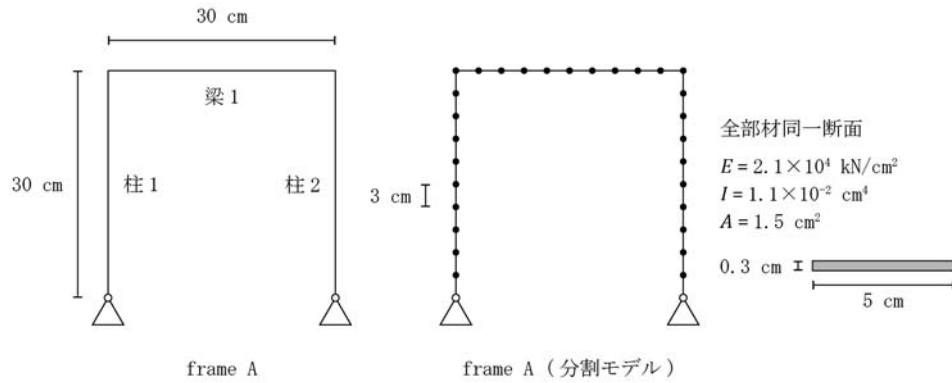


図 2.2.3 frame A 解析モデル

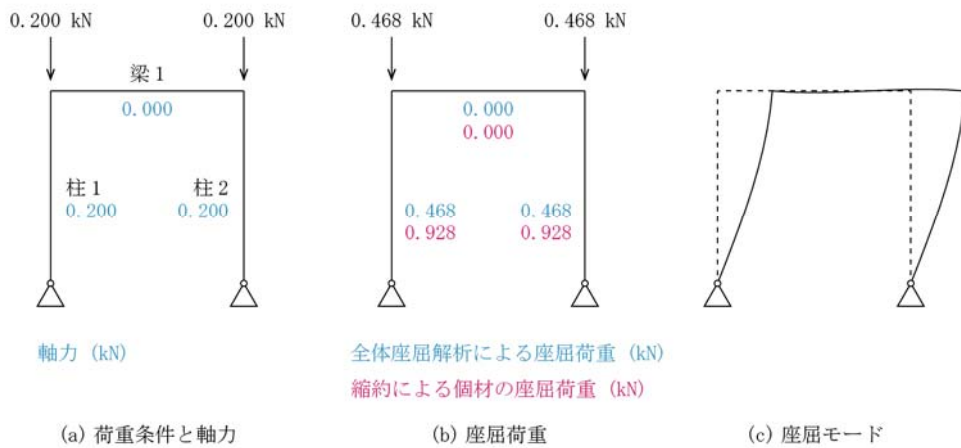


図 2.2.4 frame A1 解析結果

表 2.2.1 frame A1 解析結果

部材	軸力 N (kN)	全体座屈解析		縮約	
		全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
		λ	$N_{cr} = \lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
柱 1	0.200		0.468	4.641	0.928
柱 2	0.200	2.343	0.468	4.641	0.928
梁 1	0.000		0.000	2.427	0.000

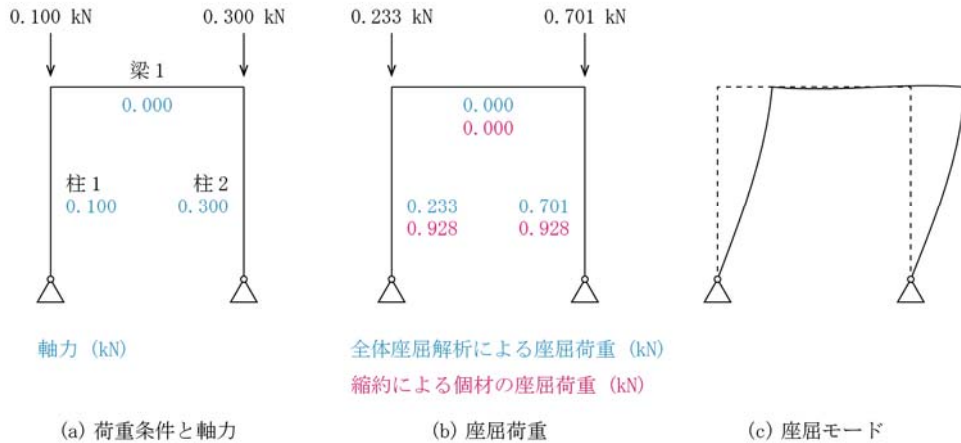


図 2.2.5 frame A2 解析結果

表 2.2.2 frame A2 解析結果

部材	軸力 N (kN)	全体座屈解析		縮約	
		全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
柱 1	0.100		0.233	9.282	0.928
柱 2	0.300	2.337	0.701	3.094	0.928
梁 1	0.000		0.000	2.426	0.000

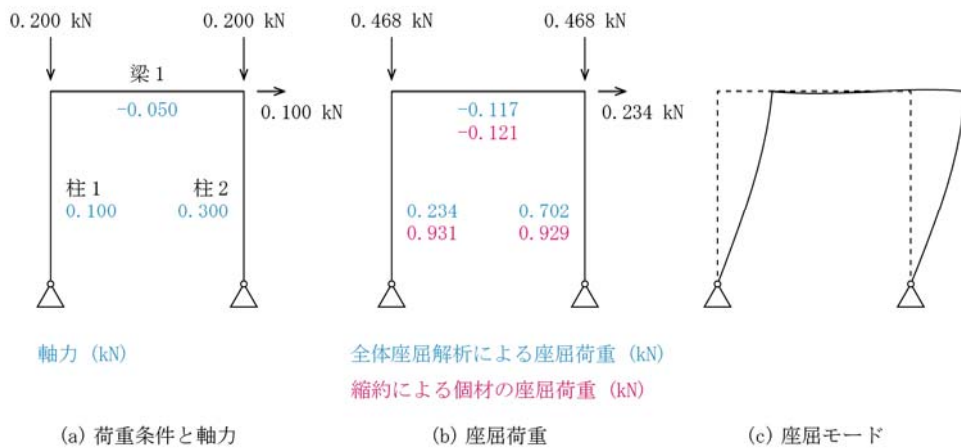


図 2.2.6 frame A3 解析結果

表 2.2.3 frame A3 解析結果

部材	軸力 N (kN)	全体座屈解析		縮約	
		全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
柱 1	0.100		0.234	9.312	0.931
柱 2	0.300	2.342	0.702	3.097	0.929
梁 1	-0.050		-0.117	2.432	-0.121

非対称荷重の **frame A2** では、構造全体系の線形座屈解析結果から求めた座屈荷重 N_{cr} は左右の柱で異なる値で算出される。一方、縮約法により求めた個材固有値を用いた個材の座屈荷重 N_{cr}' は、左右等しく算出できている。また、**frame A1, A2** で個材座屈荷重は等しい。このことから、**frame A1, A2** のように、柱にのみ軸力があり梁の軸力が 0 のとき、縮約による個材座屈固有値から他方の柱の軸力によらない座屈荷重が算出されており、全体解析時に見られた左右の柱での不合理さは解消できているといえる。ただし、このときの縮約による個材の座屈荷重 0.928 kN は全体固有値によるいずれの座屈荷重よりも大きく、その妥当性は明らかではない。

水平力が加わった **frame A3** では、縮約による個材の座屈荷重 N_{cr}' でも左右で差がでている。**frame A1, A2** 柱のように、隣接部材に軸力が存在しない場合、隣接していない部材の軸力の影響を受けずに個材固有値が算出されるが、**frame A3** のように隣接部材に軸力が存在する場合は、隣接しない部材の軸力も個材固有値に影響を与える。しかし、その左右差は全体解析時と比べてかなり小さく、傾向としては **frame A1, A2** と同じく、左柱の過小評価を軽減できていると考えられる。

堤^[4]の論文では、この個材固有値を用いて座屈に対して構造体を最適化できる可能性も示されている。しかし、最適化の適用範囲を広げるためにも、まずは縮約による個材の座屈荷重 N_{cr}' の妥当性の検証が必要である。

適切な個材の座屈荷重を求めようとする他の既往研究^{[6]・[9]~[11]}でも、算出された値の妥当性について判断されていない場合が多いので、検証法を考案できれば適応できる。

3. 縮約による個材の座屈荷重の実験検証

3.1 個材の座屈荷重の検証方法

構造全体系の座屈荷重ではなく、個材ごとの座屈荷重がどのくらいあるのかを明らかにしたいが、個材の座屈を実験により直接観測するのは困難である。そこで本論文では、実験で求まる構造全体系の終局強度から個材の最大耐力を逆算し、座屈荷重を式中含む $M-N$ 相関曲線 (式 (2.1.7)) によって規定される部材の最大耐力と比較することで各座屈荷重の妥当性を評価する方法を提案する。

ただし、「2.1.3 現行の座屈設計法の問題点」でも述べたように、この $M-N$ 相関曲線は全体系の座屈解析の純圧縮状態との連続性から座屈荷重 N_{cr} を用いて安全側に強度を規定するように導かれているので、現行の方法ではこれから全体系の終局強度を直接的に評価すると安全側になることは分かっている。現行の設計法がどのくらい安全側であるかも本論文で検証する。

$$\left(\frac{N}{N_{cr}}\right)^2 + \frac{M}{M_p} = 1 \quad \text{再掲(2.1.7)}$$

梁に軸力が入った状態でも柱頭の拘束度を保つため、梁を柱に対して十分剛にした frame B のモデルで以降解析を進めることにする (図 3.1.1)。ただし、寸法は後述の「3.2 実験」における試験体 B をもとに決定した。

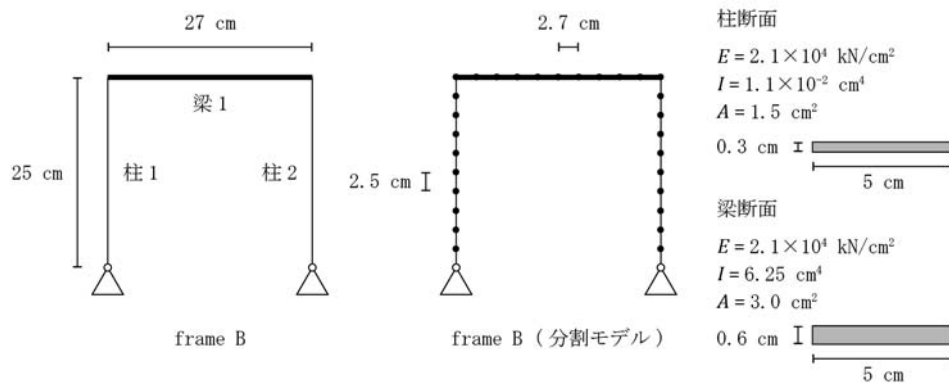


図 3.1.1 frame B 解析モデル

まず、荷重条件を変えた frame B1~B4 の解析結果を図 3.1.2~5、表 3.1.1~4 に示す。frame B1 は柱 2 のみに軸力が入るように外力を与えた。frame B2~B4 は均等な鉛直荷重に加えて、水平荷重を増やしていった。梁を十分剛にしたので、水平荷重の増加に伴って、梁に軸力が入ることで梁が柔くなり柱頭の拘束度が低下する影響を無視できると考えられる。解析結果からも、「2.2.3 縮約による個材座屈荷重の成果と問題点」で指摘したような縮約による個材座屈荷重の左右差はなくなっていることが確認できる。

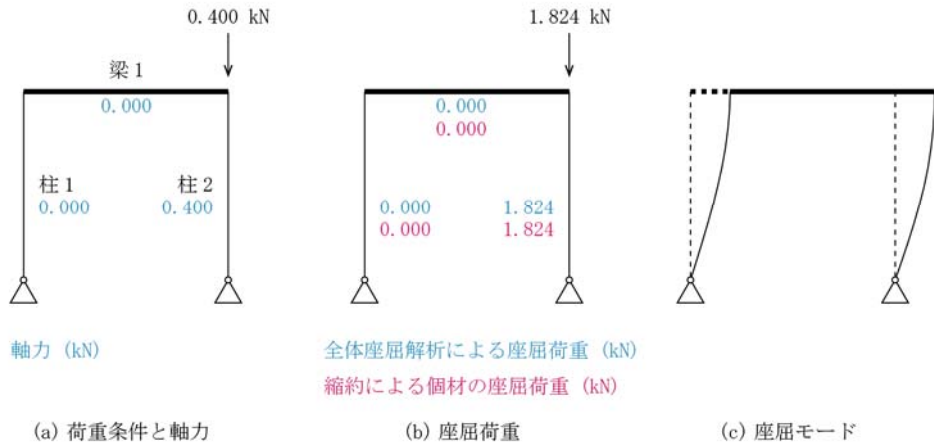


図 3.1.2 frame B1 解析結果

表 3.1.1 frame B1 解析結果

部材	軸力 N (kN)	全体座屈解析		縮約	
		全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
柱 1	0.000		0.000	4.3×10^{305}	0.000
柱 2	0.400	4.560	1.824	4.560	1.824
梁 1	0.000		0.000	4.923	0.000

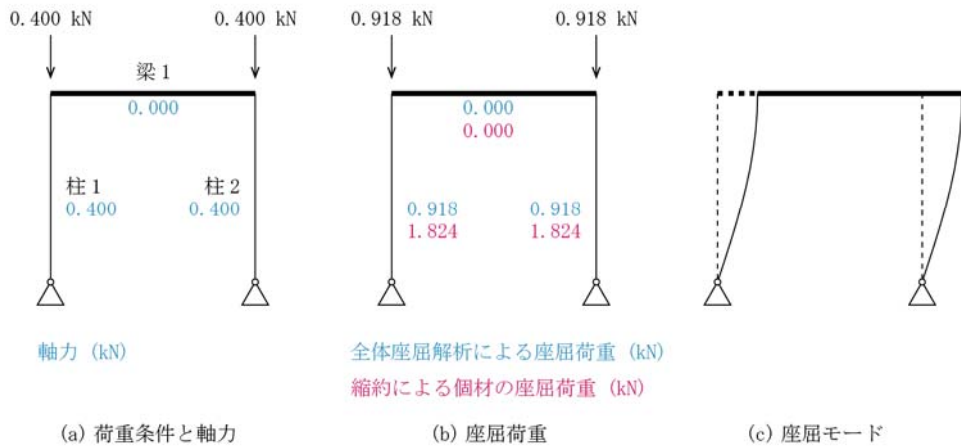


図 3.1.3 frame B2 解析結果

表 3.1.2 frame B2 解析結果

部材	軸力 N (kN)	全体座屈解析		縮約	
		全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
柱 1	0.400		0.918	4.560	1.824
柱 2	0.400	2.295	0.918	4.560	1.824
梁 1	0.000		0.000	2.461	0.000

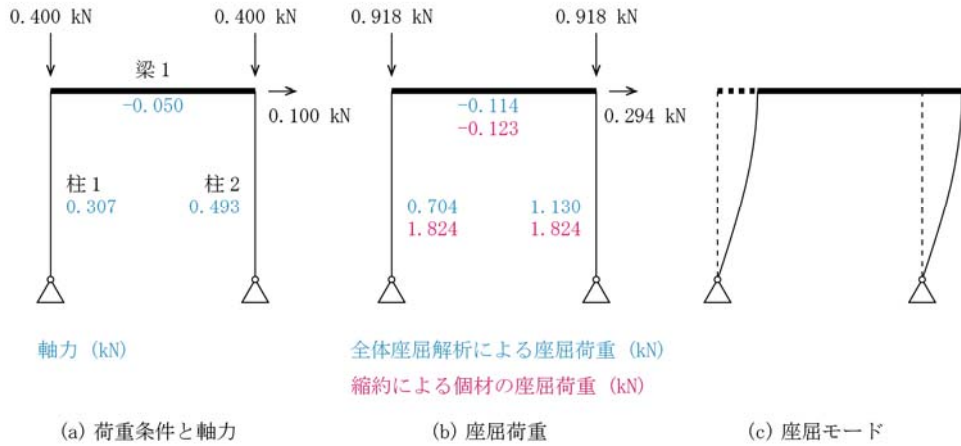


図 3.1.4 frame B3 解析結果

表 3.1.3 frame B3 解析結果

部材	軸力 N (kN)	全体座屈解析		縮約	
		全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
柱 1	0.307		0.704	5.933	1.824
柱 2	0.493	2.294	1.130	3.702	1.824
梁 1	-0.050		-0.114	2.461	-0.123

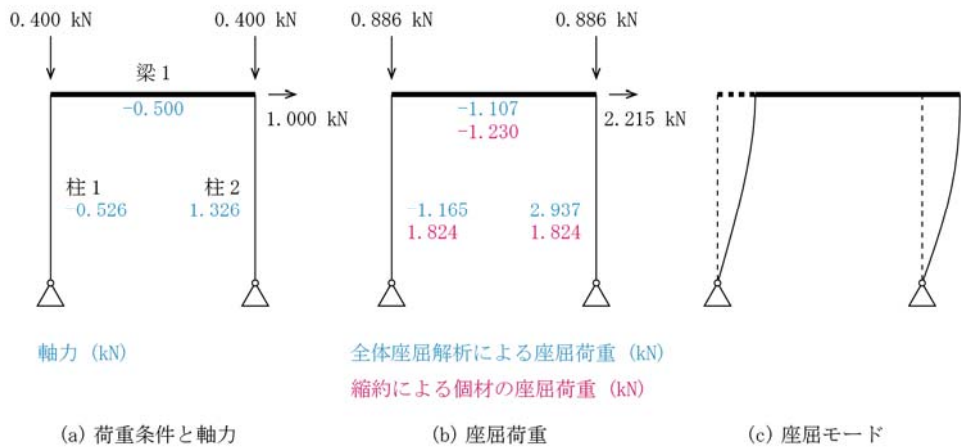


図 3.1.5 frame B4 解析結果

表 3.1.4 frame B4 解析結果

部材	軸力 N (kN)	全体座屈解析		縮約	
		全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
柱 1	-0.526		-1.165	-3.468	1.824
柱 2	1.326	2.215	2.937	1.375	1.824
梁 1	-0.500		-1.107	2.461	-1.230

2次元の構造全体系の線形座屈解析では、初期の応力場から軸力のみを取り出した純圧縮状態で固有値を計算しているため、曲げモーメントを考慮するために $M-N$ 相関曲線を使う。柱2について、frame B2~B4の全体座屈荷重 N_{cr} を式 (2.1.7) に代入して相関曲線を引くと図 3.1.6 中の B2~B4 (柱2) のようになる。

$$\left(\frac{N}{N_{cr}}\right)^2 + \frac{M}{M_p} = 1 \quad \text{再掲(2.1.7)}$$

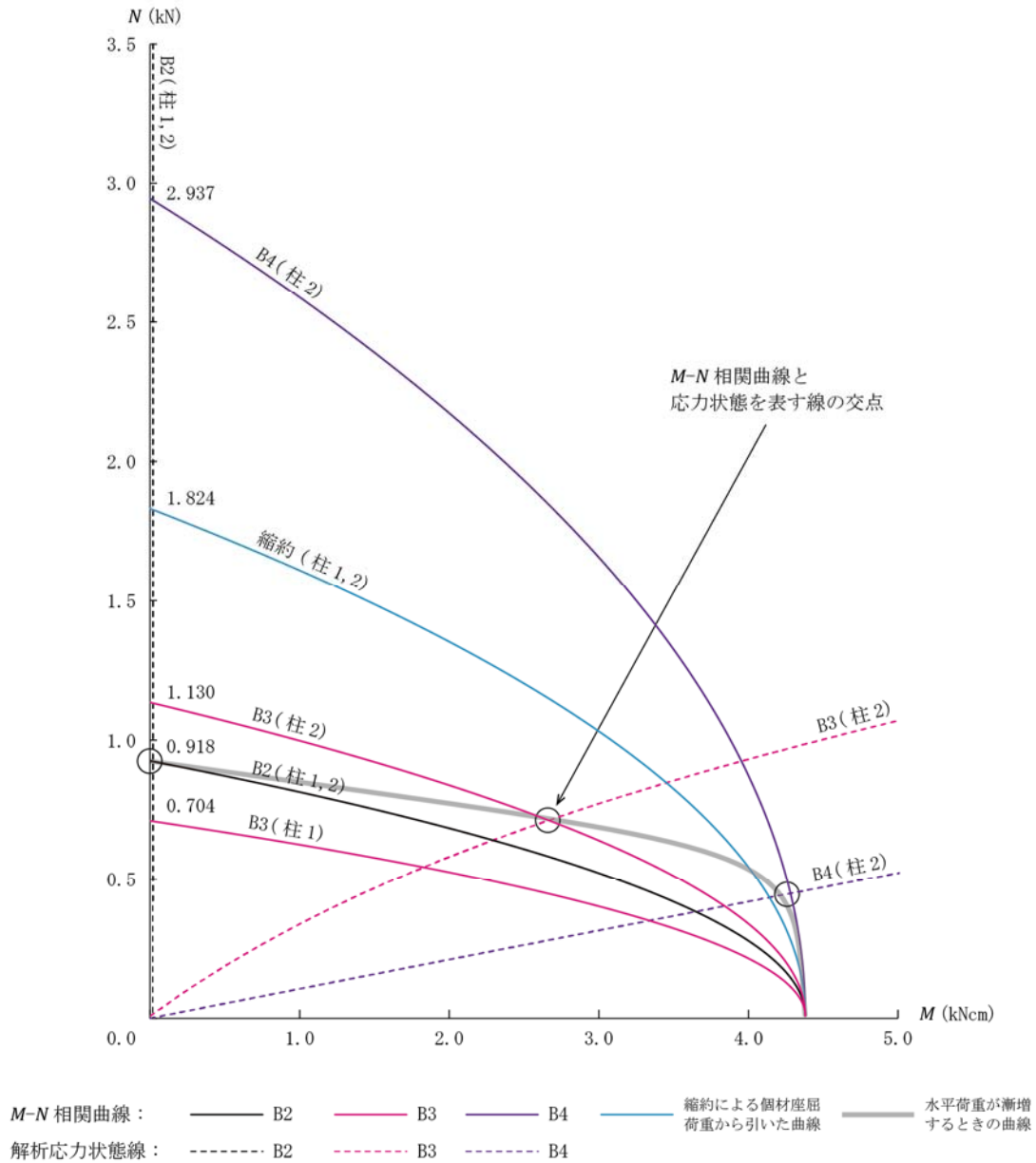


図 3.1.6 frame B の $M-N$ 相関曲線

これとそれぞれの解析時の荷重条件で外力が 0 から比例増加したときの $P-\Delta$ 効果を考慮した $M-N$ の応力状態を描いた曲線 (図 3.1.6 解析応力状態線) の交点 (図 3.1.6 ○印) が最大耐力となる。応力状態を表す $M-N$ 曲線は、簡単に土木学会ガイドライン⁵⁾を参考に以下の通り算出した。

$$\bar{M} = A_{F0}M \quad (3.1.1)$$

$$\bar{N} = P + \frac{2\bar{M}}{w} \quad (3.1.2)$$

\bar{M} : $P-\Delta$ 効果考慮した曲げモーメント

\bar{N} : $P-\Delta$ 効果考慮した軸力

M : 静的弾性応力解析による曲げモーメント

A_{F0} : モーメント増幅係数, 梁が十分に剛で柱脚ピンのとき式 (3.1.3) となる

P : 柱頭にかかる鉛直外力

w : 梁長さ (=27cm)

$$A_{F0} = \frac{1 - 0.18(P/P_{cr})}{1 - (P/P_{cr})} \quad (3.1.3)$$

P_{cr} : 座屈荷重

これより柱 2 について、水平荷重が漸増し柱頭の曲げモーメントが大きくなるにつれ (解析では frame B2→B3→B4 の順)、大きい座屈荷重による $M-N$ 相関曲線に移っていく図 3.1.6 中の太線のような曲線が、より正確に最大耐力を評価する曲線として考えられる。この曲線も、純圧縮状態との連続性から導かれた $M-N$ 相関曲線上の点をつないでいるので安全側な可能性があるが、線形座屈解析ではすべての部材軸力が比例増加する状態を想定しているため、水平荷重が漸増していったときの終局状態とは応力状態が異なり、安全側であるとはいえない。

また、水平最大荷重が分かればその荷重条件で座屈解析を行えるが、そのためには非線形解析が必要である。そこで、通常的设计では鉛直荷重のみの状態 (frame B2) で描いた曲線を安全側として採用することが多い。しかし、水平荷重が作用した状態での座屈解析結果を設計に用いれば、柱 2 については断面を小さく設定できるが、柱 1 については $M-N$ 相関曲線が内側に入ってしまう (図 3.1.6 中の B3 (柱 1)), より大きい断面が必要になる。

このように、全体系の座屈解析に関しては様々な検討事項があるが、縮約による個材の座屈荷重 N_{cr}' はすべてのモデルで等しく 1 つの曲線が描ける (図 3.1.5 中の縮約)。このときの 1.824 (kN) という値は、frame B1 のように片方の柱のみに鉛直荷重を作用させた座屈荷重と一致している。

このように、荷重条件ごとにいくつか引ける最大耐力を規定する $M-N$ 相関曲線のうち、実験から求まる門型フレームの終局強度から逆算される最大耐力と最もよく一致するのはどれかを検証する。

3.2 実験

3.2.1 材料試験

試験体は、すべて SS400 材の FB-3×50 (mm) で製作した。M-N 相関曲線を描くうえで、軸力 0 のときの全塑性モーメント M_p の値が重要になるので、材料の 3 点曲げ試験をした。実験装置の概要を図 3.2.1、表 3.2.1 に記す。加力にはアムスラー式圧縮試験機を使い、載荷速度は 6~10 (N/sec) となるように設定した。図 3.2.2~3 は実験の様子である。

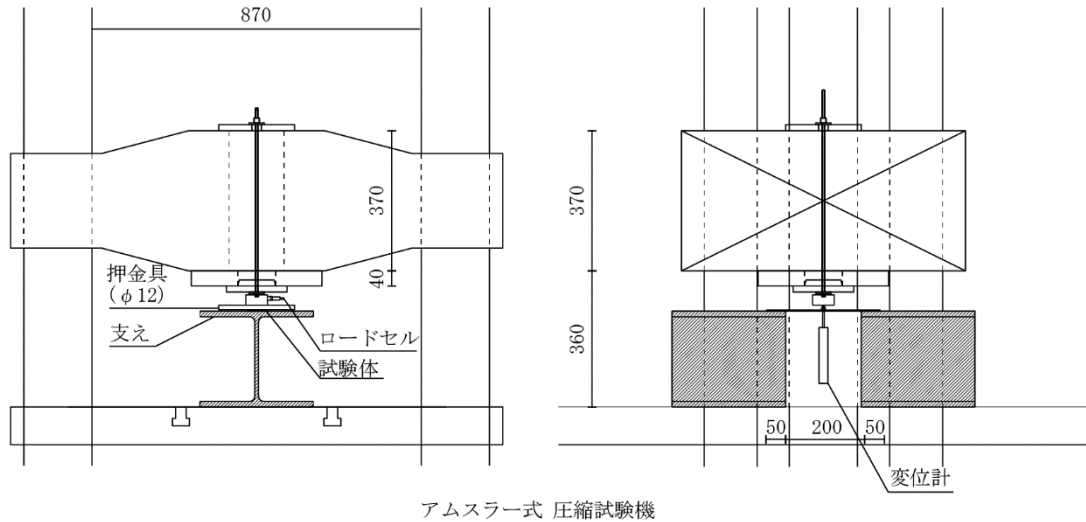


図 3.2.1 3 点曲げ試験 実験セットアップ図

表 3.2.1 3 点曲げ試験 実験概要

試験体 (mm)	スパン l (mm)	載荷速度 (mm/min)	押金具 (mm)
FB-3×50×300	200	3	丸鋼 φ12



図 3.2.2 3 点曲げ試験 加力前



図 3.2.3 3 点曲げ試験 終了時

実験結果を図 3.2.4 に示す。

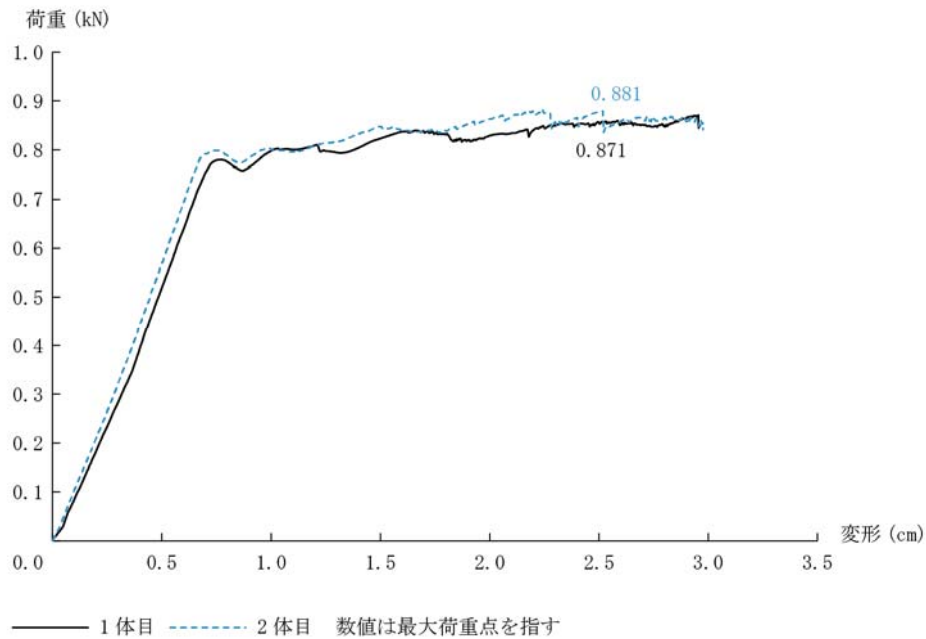


図 3.2.4 3点曲げ試験 荷重変形曲線

試験体中央で曲げモーメントは最大となり，2体の最大荷重の平均値 $P = (0.8710 + 0.8812)/2 = 0.8761$ (kN) を用いて次式 (3.2.1) で求まる．以後，これを全塑性モーメント M_p とする．

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} = \frac{0.876 \times 20}{4} = 4.38 \text{ (kNcm)} \quad (3.2.1)$$

このとき，FB-3×50の塑性断面係数 Z_p ，最大応力度 σ_u は以下のようなになる．

$$Z_p = \frac{bd^2}{4} = \frac{5 \times 0.3^2}{4} = 0.1125 \text{ (cm}^3\text{)} \quad (3.2.2)$$

$$\sigma_u = \frac{M_p}{Z_p} = \frac{4.38}{0.1125} = 38.93 \text{ (kN/cm}^2\text{)} \quad (3.2.3)$$

この値は一般に用いられる SS400 の設計最大強度 40.0 (kN/cm²) に比べてわずかだが小さい．これは試験体のフラットバーの厚みが実測で 2.9～3.0 (mm) であったことが原因と考えられる．2.9 (mm) の場合で最大応力度 σ_u を同様に求めると，次式 (3.2.4)，(3.2.5) より 41.67 (kN/cm²) となり設計最大強度を超える．

$$Z_p = \frac{bd^2}{4} = \frac{5 \times 0.29^2}{4} = 0.1051 \text{ (cm}^3\text{)} \quad (3.2.4)$$

$$\sigma_u = \frac{M_p}{Z_p} = \frac{4.38}{0.1051} = 41.67 \text{ (kN/cm}^2\text{)} \quad (3.2.5)$$

3.2.2 実験概要

試験体および実験概要は図 3.2.5～8 と表 3.2.2 の通りである。試験体の梁は柱と同じ FB-3×50 (mm) を曲げ加工したものを 2 枚合わせて製作した。柱と梁は 3.2 (mm) の下穴をあけて M3 のステンレス製ボルトで接合した。試験体の柱脚を水平方向に止める厚さ 5 (mm) のプレートは万力で固定した。ねじ加工された丸鋼を穴のあいたブロックに通し、ボルトを回して丸鋼を右方向に引くことで水平方向に加力した。

鉛直外力は、門型ラーメンが水平方向に変形を始めても柱頭に鉛直にかかり続ける必要があったので、梁中央に台座をつくりおもりを載せた。図 3.2.9 frame B' の解析結果からも分かるように、梁が十分剛なので中央に集中荷重として外力を入力しても、柱に余計な曲げは入らない。おもりに梁の自重を 0.7 (kg) として加え、柱 1 本当当たりの相当鉛直荷重 P を求めた。

Ba, Bb は同じ条件で 2 回実験した。Bd, Be についてはおもりが大きく面外に倒れる可能性があったため 2 体平行に並べて同時に加力した。

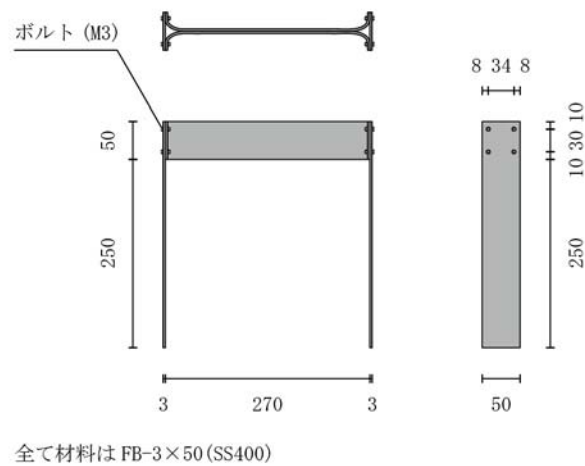


図 3.2.5 試験体 B 設計図



図 3.2.6 試験体 B 接合部 (柱側)



図 3.2.7 試験体 B 接合部 (梁側)

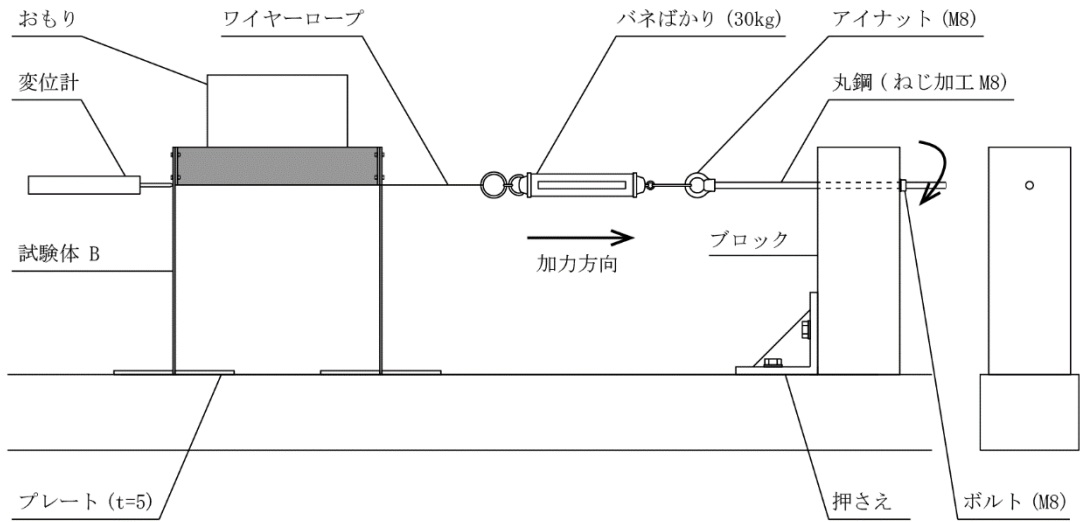


図 3.2.8 実験セットアップ図

表 3.2.2 実験概要

試験体名	Ba, Bb	Bc	Bd, Be (同時加力)
おもり (kg)	62.2	79.5	239.0
相当鉛直荷重 P (kN/柱 1 本)	0.314	0.401	0.601

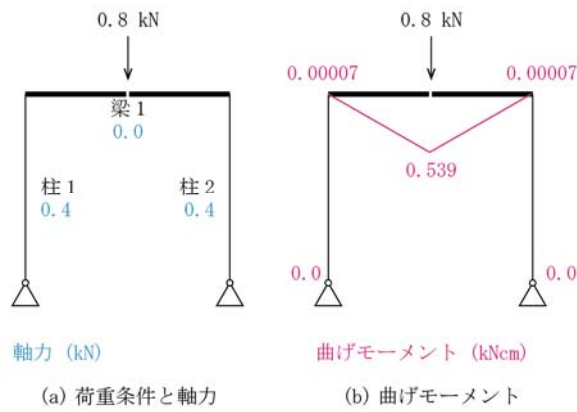


図 3.2.9 frame B'解析結果

3.2.3 実験結果

以下に実験結果を示す．表中の記号は図 3.2.10 の通り定義する．

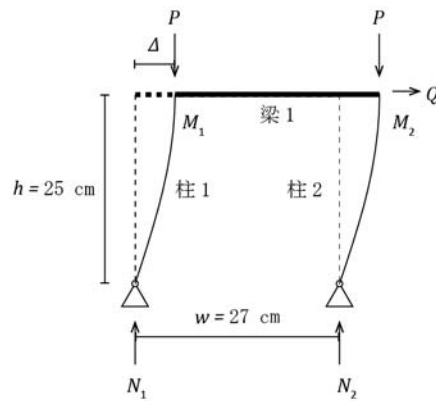


図 3.2.10 試験体 B 記号

終局状態の $P - \Delta$ 効果を考慮した柱の軸力と曲げモーメントは以下の式 (3.2.6)～(3.2.8) で求めた．各柱の柱頭における曲げ M_1, M_2 は塑性化の進行等を考慮する必要があり実験結果から直接算出はできないが，これらの合計値である外力による曲げの総和 M_{total} は求められる．

$$N_1 = \frac{P(w - 2\Delta) - Qh}{w} \quad (3.2.6)$$

$$N_2 = \frac{P(w + 2\Delta) + Qh}{w} \quad (3.2.7)$$

$$M_{\text{total}} = M_1 + M_2 = 2P\Delta + Qh \quad (3.2.8)$$

M_{total} : 外力による曲げモーメントの総和

また，実験後の試験体では塑性化の跡が確認できた．曲げの圧縮側（柱左面）でそれぞれ，柱 1 はボルトのある高さ，柱 2 は梁下端から下側にみられた（図 3.2.11～14）．試験体 Bc で塑性化範囲が広いのは，加力後最終的に転倒したからである．左右で，塑性化が始まる高さが異なっていることが分かる．柱脚を抑えるプレートの上端を高さ 0 とすると最大曲げモーメントを受ける高さは，柱 1 で $h_1 = 25.5$ (cm)，柱 2 で $h_2 = 24.5$ (cm) なので平均して $h = 25.0$ (cm) とする．



図 3.2.11 試験体 Ba 塑性化部分 (柱 1)



図 3.2.12 試験体 Ba 塑性化部分 (柱 2)



図 3.2.13 試験体 Bc 塑性化部分 (柱 1)



図 3.2.14 試験体 Bc 塑性化部分 (柱 2)

柱 1 については、ボルト用の下穴を開けた高さで塑性化しているのので、断面欠損について考える必要がある。フラットバーの幅 50 (mm) に対して、下穴は 3.2 (mm) を 2 箇所開けているので、断面欠損率は最大で 12.8 % になる。よって、全塑性モーメント M_p も最大で 12.8 % 低減する。しかし、実際にはボルトやワッシャーも曲げを負担すること、塑性化領域が下側に広がっていくことを考慮して今回は考察を分かりやすくするために断面欠損による全塑性モーメント M_p の低減はしないこととする。

今後実験を重ねる際には、断面欠損の影響が実際にはどれくらいなのかを試験してから計画することが望ましい。

○試験体 Ba, Bb

これら 2 試験体は曲線の傾きは異なるが、最大荷重は近い値を示した。除荷まで行い、残留変形の確認も行った。終局状態は 2 体の平均値も求めた。

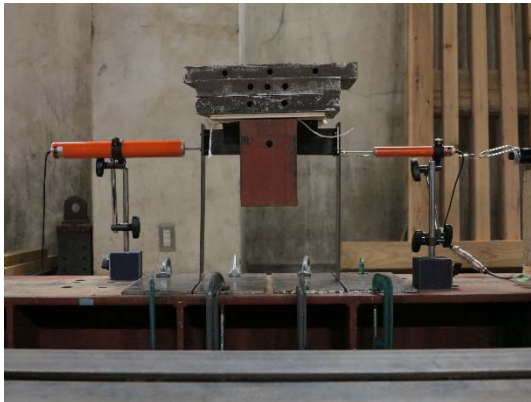


図 3.2.15 試験体 Ba 開始時



図 3.2.16 試験体 Ba 最大荷重時

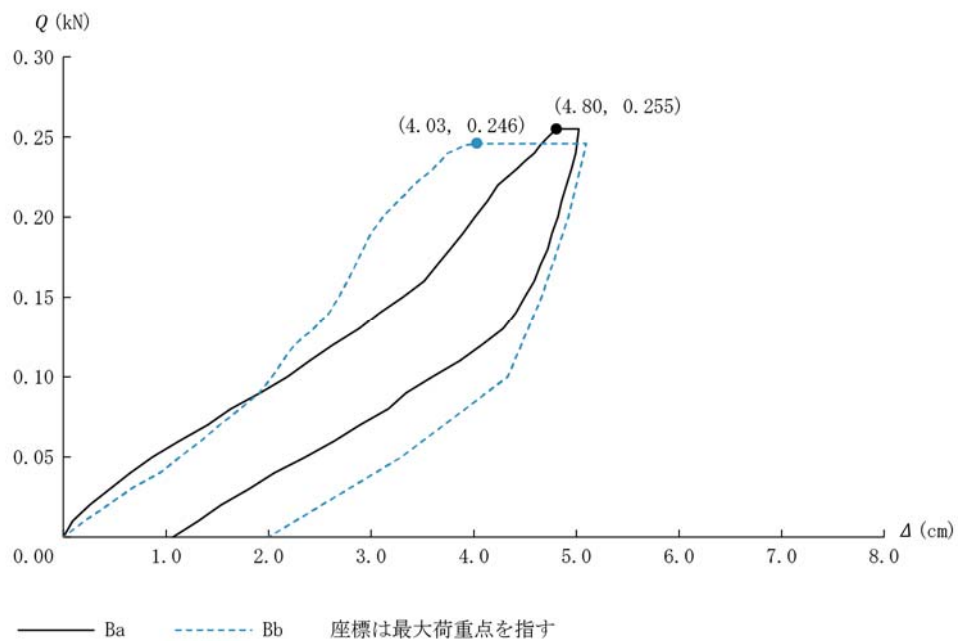


図 3.2.17 試験体 Ba, Bb 荷重変形曲線

表 3.2.3 試験体 Ba, Bb 終局状態

試験体	鉛直荷重 P (kN)	最大水平荷重 Q_{\max} (kN)	最大水平変位 Δ_{\max} (cm)	N_1 (kN)	N_2 (kN)	M_{total} (kNcm)
Ba	0.314	0.246	4.03	-0.008	0.636	8.68
Bb	0.314	0.255	4.80	-0.034	0.662	9.39
平均	0.314	0.251	4.42	-0.021	0.649	9.04

○試験体 Bc

最大荷重に到達した後、引き続けたところ転倒した。

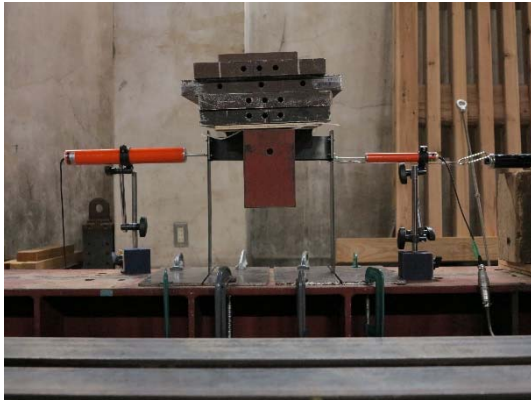


図 3.2.18 試験体 Bc 開始時



図 3.2.19 試験体 Bc 最大荷重時

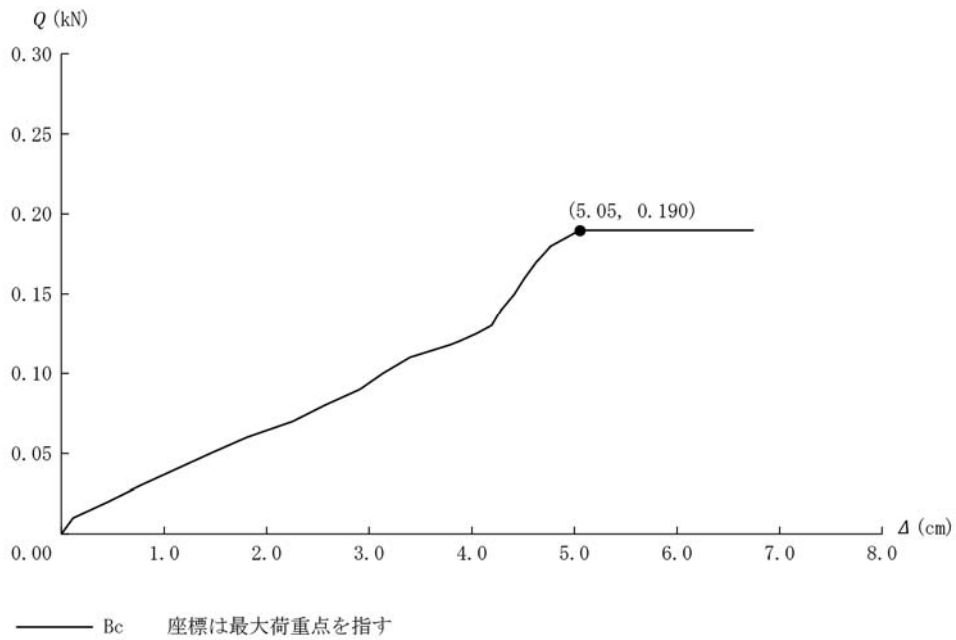


図 3.2.20 試験体 Bc 荷重変形曲線

表 3.2.4 試験体 Bc 終局状態

試験体	鉛直荷重 P (kN)	最大水平荷重 Q_{\max} (kN)	最大水平変位 Δ_{\max} (cm)	N_1 (kN)	N_2 (kN)	M_{total} (kNcm)
Bc	0.401	0.190	5.05	0.075	0.727	8.80

○試験体 Bd, Be

最大荷重に到達した後、引き続けたところ転倒した。図 3.2.23 の縦軸水平荷重 Q は 2 体分の値なので 1 体あたりの最大水平荷重 Q_{\max} は $0.22 \div 2 = 0.11$ (kN) である。終局状態は 2 体の平均で求めた。

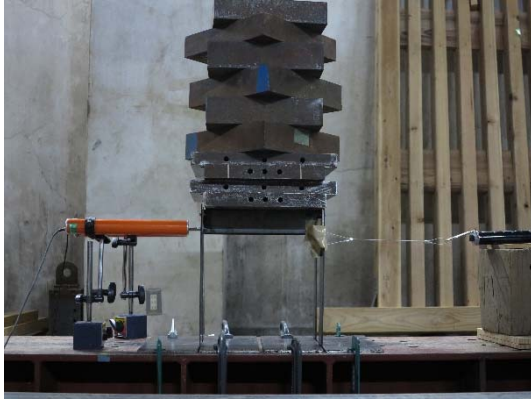


図 3.2.21 試験体 Bd, Be 開始時



図 3.2.22 試験体 Bd, Be 最大荷重時

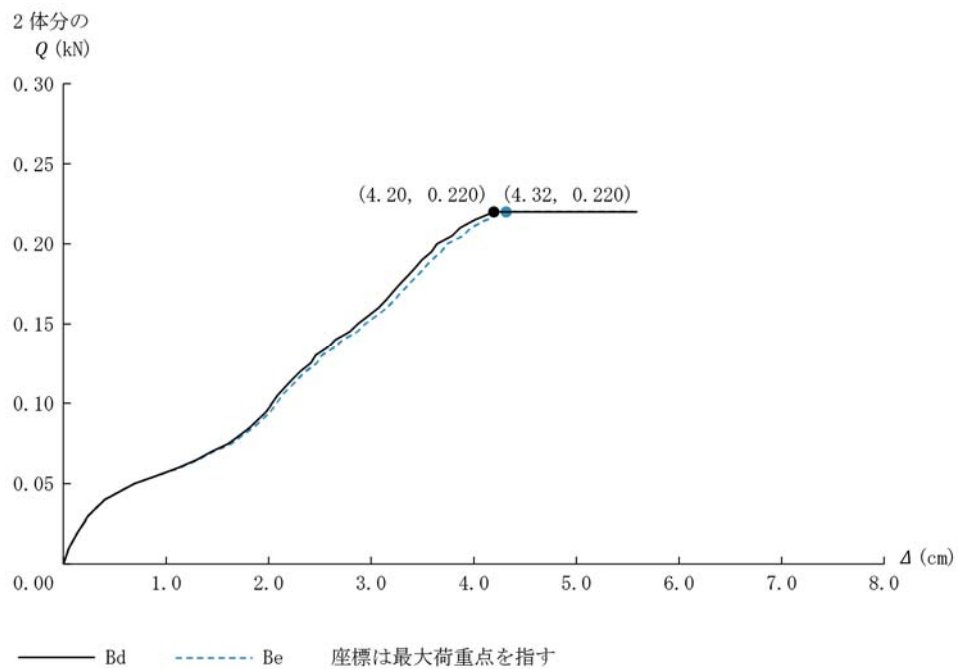


図 3.2.23 試験体 Bd, Be 荷重変形曲線

表 3.2.5 試験体 Bd, Be 終局状態

試験体	鉛直荷重 P (kN)	最大水平荷重 Q_{\max} (kN)	最大水平変位 Δ_{\max} (cm)	N_1 (kN)	N_2 (kN)	M_{total} (kNcm)
Bd, Be (平均)	0.601	0.110	4.26	0.309	0.893	7.87

3.3 実験結果と解析結果による検証

3.3.1 分析方法

実験結果から求めた終局状態における柱1の軸力 $N = N_1$ 、柱2の軸力 $N = N_2$ 、外力による曲げモーメントの総和 M_{total} の半分 $M = M_{total}/2$ の直線を引くと図 3.3.1 左のグラフ (a) のようになる。柱1と柱2の柱頭における曲げモーメント M_1, M_2 で式 (3.2.6) が成立することから、それぞれ $N = N_1, N = N_2$ 上で $M = M_{total}/2$ から等距離はなれた点 (例：図 3.3.1 中★▲■●) がペアでその候補となる。このうちのいずれなのかは決定できないが、曲げモーメントのとり得る最大値が材料強度 M_p で規定されるので範囲は限定される。

$$M_{total} = M_1 + M_2 = 2P\Delta + Qh \quad \text{再掲(3.2.6)}$$

一方、線形座屈解析による柱1と柱2の柱頭における曲げモーメント M_1, M_2 は図 3.3.1 右グラフ (b) のように、 $M-N$ 相関曲線と $N = N_1, N = N_2$ との交点として求まる。グラフ (a) の M_1, M_2 の範囲とこの2点の位置関係を比較する。また、解析から求まる $M_{total}/2 = (M_1 + M_2)/2$ を実験によるそれと比較することで、門型ラーメン全体系としては実現象とどの程度一致するのか評価できる。

図 3.1.1 の例では、 M_1 は実験から求まる範囲内にあり、 M_2 は外にある。 $M_{total}/2$ は実験の $M_{total}/2$ よりも左にあるので、解析結果から組み立てられる全体系の終局強度は実験に対して安全側に評価しているといえる。

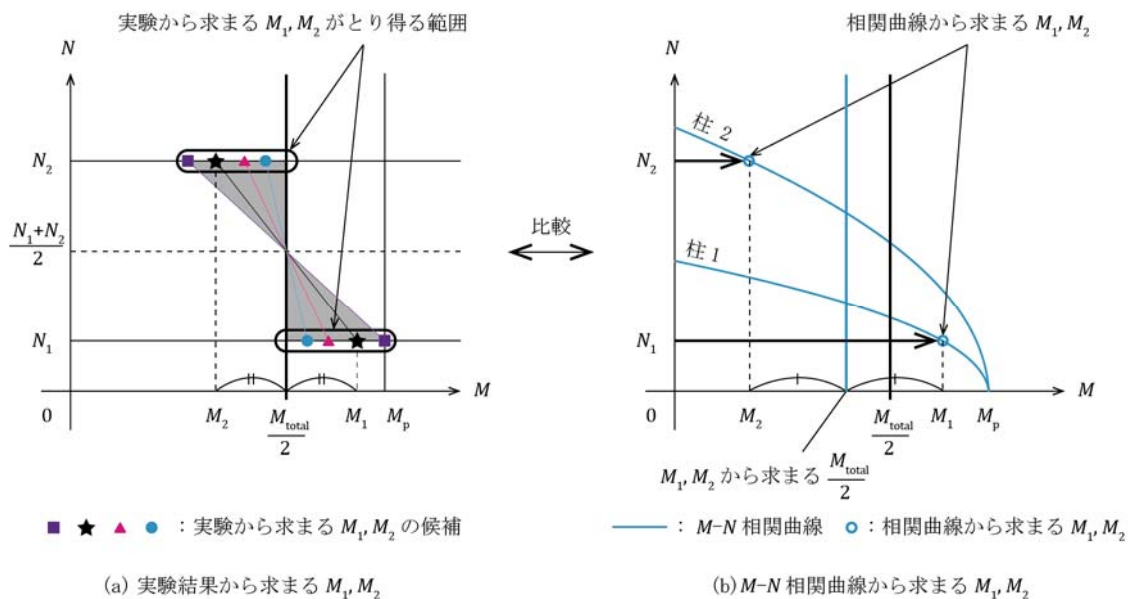
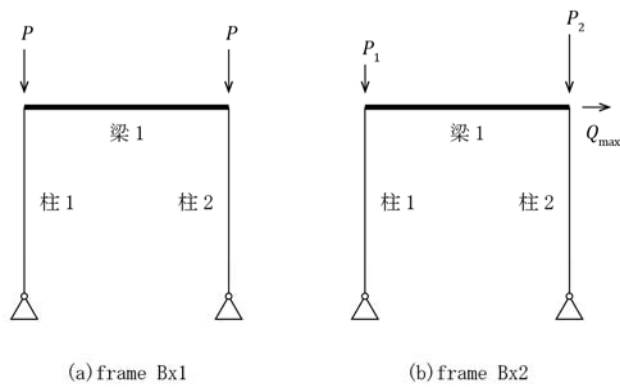


図 3.3.1 実験結果と解析結果の分析方法 イメージ

各試験体について、 $M-N$ 相関曲線を引くために下図 3.3.2 の2つの解析モデルを用意する。(a) frame Bx1 は実験開始時の鉛直荷重 P のみでの座屈解析で、通常的设计で使われる相関曲線が引ける。(b) frame Bx2 は鉛直荷重に加えて終局時の最大水平荷重 Q_{max} を与える。ただし、柱1, 2に均等な鉛直荷重 P をかけると $P-\Delta$ 効果の分だけ実験終局時の軸力とはずれてしまうので、実験での左右の軸力比を再現できるような鉛直荷重 P_1, P_2 を計算してそれぞれ与えることとする。



x には各試験体に対応して a, c, d が入る

P : 実験の相当鉛直荷重

Q_{\max} : 実験の最大水平荷重

P_1, P_2 : 実験の柱軸力を再現するための鉛直荷重

図 3.3.2 各試験体ごとに用意する解析モデル frame Bx1, Bx2

これらの全体座屈解析によって算出される座屈荷重 N_{cr} による $M-N$ 相関曲線と、縮約による個材の座屈荷重 N_{cr}' による相関曲線を用意して比較する。 N_{cr}' は「3.1 個材の座屈荷重の検証方法」で示したように frame B では常に 1.824 (kN) の値をとる。

3.3.2 試験体別の検証

○試験体 Ba, Bb

試験体 Ba, Bb の平均値を用いた解析モデル frame Ba1, Ba2 の解析結果は以下.

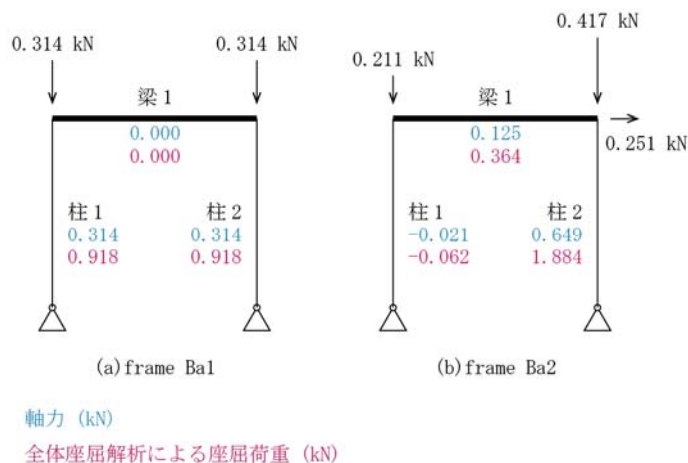


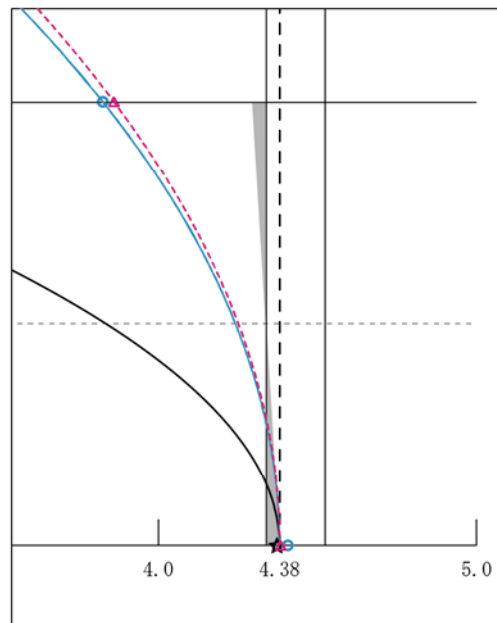
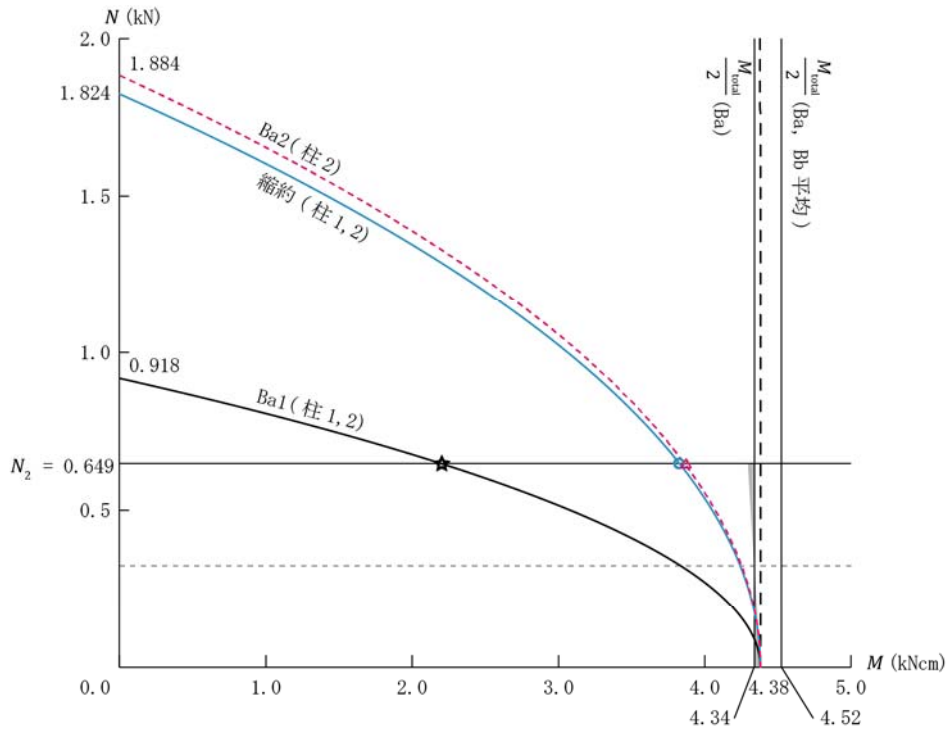
図 3.3.3 frame Ba1, Ba2 解析結果

表 3.3.1 frame Ba1, Ba2 解析結果

部材	Ba1			Ba2		
	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 N_{cr} (kN)	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 N_{cr} (kN)
柱 1	0.314	2.924	0.918	-0.021	2.901	-0.062
柱 2	0.314		0.918	0.649		1.884
梁 1	0.000		0.000	0.125		0.364

これらと実験結果を比較すると、下図 3.3.4、表 3.3.2 のようになる。 M_{total} , N_1 , N_2 の値は表 3.2.3 で求めたものである。グラフ中の材料降伏曲線は、 N 軸切片となる降伏軸力 $N_y = \sigma_u \times A = 38.93 \times 5 \times 0.3 = 58.39$ (kN) がグラフの N 軸スケールに比べてかなり大きいため直線に見えるが曲線の一部である。frame Ba2 の柱 1 の軸力は負の値をとるが、引張側は常に材料降伏で相関曲線が描かれ、わずかな引張のときほ $M = M_p$ をとるので $M_1 = M_p = 4.38$ (kNcm) とする。

グラフからも分かるように、実験の平均値から算出した曲げモーメントの総和の半分 $M_{total}/2$ は M_p を超えた。そこで小さいほうの試験体 Ba の結果から求まる $M_{total}/2$ で比較することとする。



部分拡大図

$M-N$ 相関曲線： — Ba1 - - - Ba2 — 縮約による個材座屈荷重から引いた曲線 - - - 材料降伏曲線
 $N = N_1, N_2$ と各 $M-N$ 相関曲線の交点 M_1, M_2 : ★ △ ○

図 3.3.4 試験体 Ba, Bb と frame Ba1, Ba2, 縮約の比較

表 3.3.2 試験体 Ba, Bb と frame Ba1, Ba2, 縮約の比較

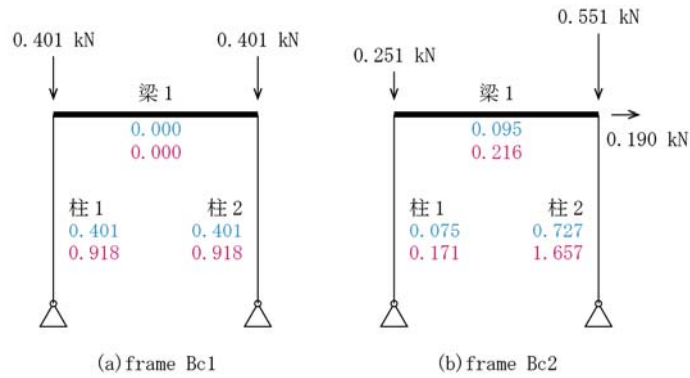
	実験(平均)	実験(Ba)	Ba1	Ba2	縮約
M_2 (kNcm)	—	4.30~4.34	2.19	3.86	3.83
M_1 (kNcm)	—	4.34~4.38	4.38	4.38	4.38
M_{total} (kNcm)	9.04	8.68	6.57	8.24	8.21
$\frac{M_{total}}{2}$ (kNcm)	4.52	4.34	3.29	4.12	4.10

試験体 Ba の $M_{total}/2$ が M_p とあまり変わらないので、実験により限定される M_1, M_2 の範囲は狭い (図 3.3.4 部分拡大図)。これに対して frame Ba1, Ba2, 縮約による M_2 は小さい側に外れていた。 M_1 は今解析結果では、 $N_1 < 0$ より $M_1 = M_p$ としているので範囲内である。

$M_{total}/2$ を計算してみると表 3.3.2 のように、いずれも実験値より小さく、実験値>Ba2>縮約>Ba1 の順である。特に縮約と Ba2 の値は近い。すべて門型ラーメン全体系としては安全側に評価していることが分かる。

○試験体 Bc

frame Bc1, Bc2 の解析結果は以下.



軸力 (kN)

全体座屈解析による座屈荷重 (kN)

図 3.3.5 frame Bc1, Bc2 解析結果

表 3.3.3 frame Bc1, Bc2 解析結果

部材	Bc1			Bc2		
	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 N_{cr} (kN)	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 N_{cr} (kN)
柱 1	0.401	2.289	0.918	0.075	2.279	0.171
柱 2	0.401		0.918	0.727		1.657
梁 1	0.000		0.000	0.095		0.216

これらと実験結果を比較すると、下図 3.3.6, 表 3.3.4 のようになる. この実験でも, 得られた $M_{total}/2$ は M_p をわずかに超えている. そこで M_1, M_2 のとり得る範囲は最大値 $M_p = 4.38$ (kNcm) として分析する.

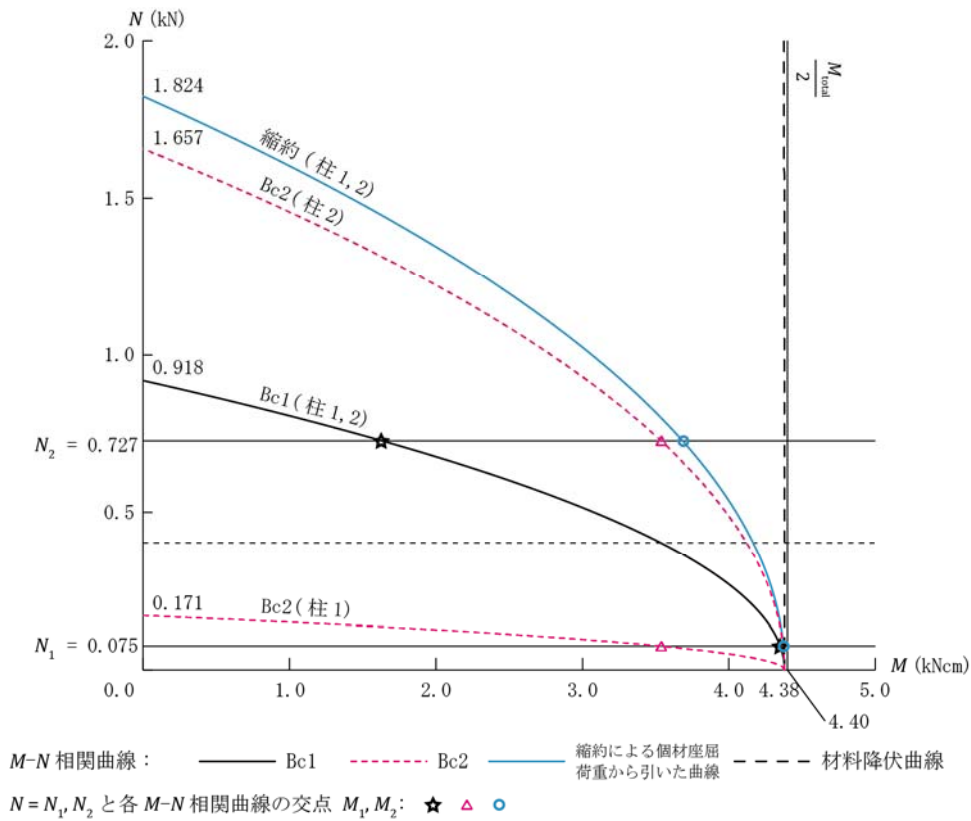


図 3.3.6 試験体 Bc と frame Bc1, Bc2, 縮約の比較

表 3.3.4 試験体 Bc と frame Bc1, Bc2, 縮約の比較

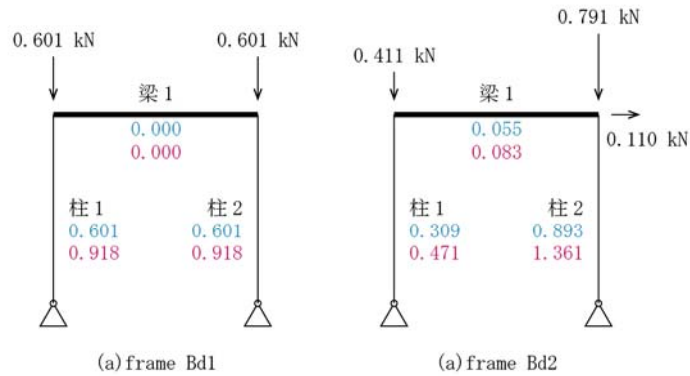
	実験(Bc)	Bc1	Bc2	縮約
M_2 (kNcm)	(4.38)	1.63	3.54	3.68
M_1 (kNcm)	(4.38)	4.35	3.54	4.37
M_{total} (kNcm)	8.80	5.98	7.08	8.05
$\frac{M_{total}}{2}$ (kNcm)	4.40	2.99	3.54	4.03

解析による M_1, M_2 はどちらも安全側に小さい。 M_1 は frame Bc1 と縮約で、実験値にほぼ近い値を示した。一方 M_2 はすべての解析で大きく逸脱している。

$M_{total}/2$ を計算してみると表 3.3.4 のように、いずれも実験値より小さく、実験値>縮約>Bc2>Bc1 の順である。すべて門型ラーメン全体系としては安全側に評価しているといえる。

○試験体 Bd, Be

frame Bd1, Bd2 の解析結果は以下.



軸力 (kN)

全体座屈解析による座屈荷重 (kN)

図 3.3.7 frame Bd1, Bd2 解析結果

表 3.3.5 frame Bd1, Bd2 解析結果

部材	Bd1			Bd2		
	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 N_{cr} (kN)	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 N_{cr} (kN)
柱 1	0.601	1.527	0.918	0.309	1.525	0.471
柱 2	0.601		0.918	0.893		1.361
梁 1	0.000		0.000	0.055		0.083

これらと実験結果を比較すると, 下図 3.3.8, 表 3.3.6 のようになる. これまでの試験体に比べて, 実験により限定される M_1, M_2 の範囲が幅を持って設定できる.

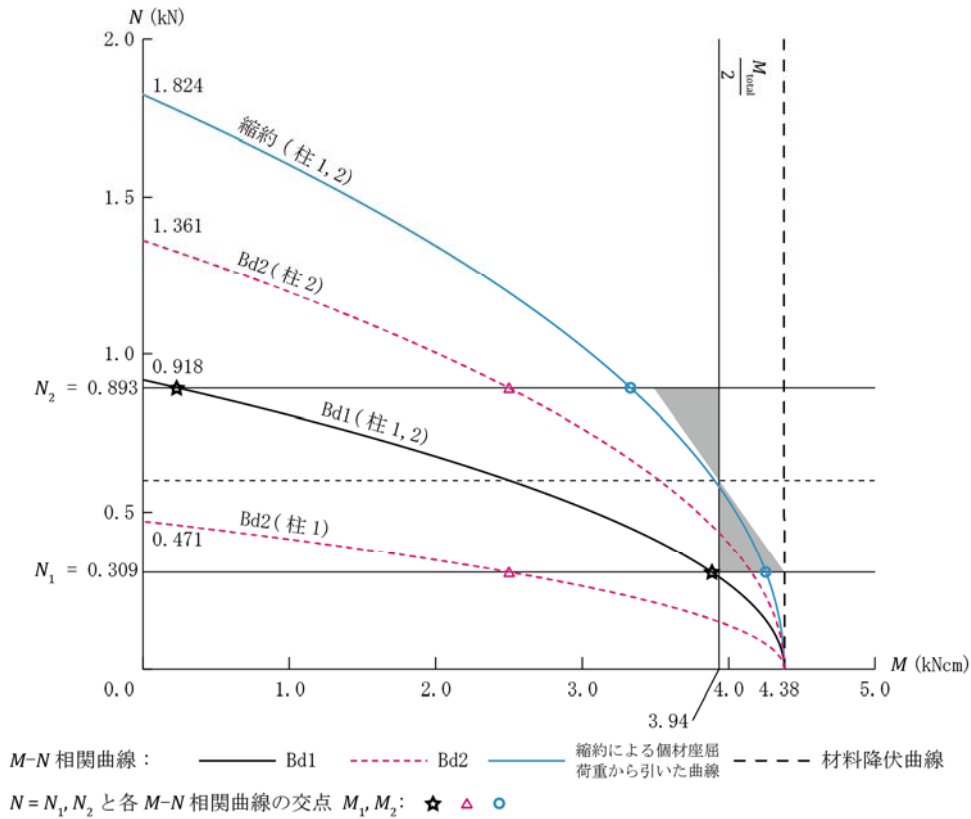


図 3.3.8 試験体 Bd, Be と frame Bd1, Bd2, 縮約の比較

表 3.3.6 試験体 Bd, Be と frame Bd1, Bd2, 縮約の比較

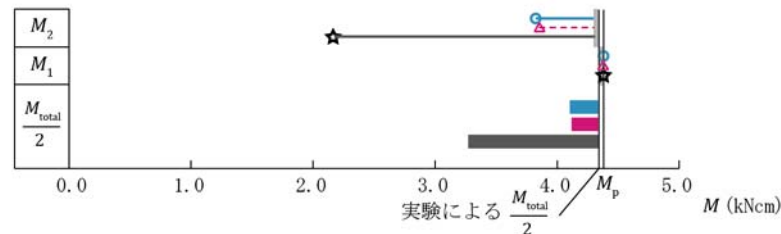
	実験(平均)	Bd1	Bd2	縮約
M_2 (kNcm)	3.50~3.94	0.24	2.50	3.33
M_1 (kNcm)	3.94~4.38	3.88	2.50	4.25
M_{total} (kNcm)	7.87	4.12	5.00	7.58
$\frac{M_{total}}{2}$ (kNcm)	3.94	2.06	2.50	3.79

解析による M_1 は縮約による $M-N$ 相関曲線の場合のみ、実験による M_1 の範囲に含まれる。他は安全側に小さい。試験体 Bc のときと同じように、Bd1 は比較的範囲に近いが、Bd2 は大きく逸脱している。一方 M_2 はすべての解析で安全側に小さく、最も実験による範囲と一致するのは縮約の $M-N$ 相関曲線によるものである。

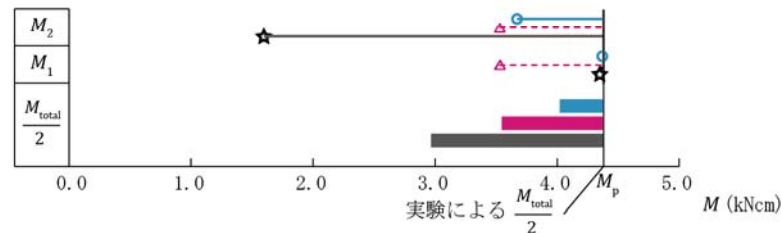
$M_{total}/2$ を計算してみると表 3.3.6 のように、いずれも実験値より小さく、試験体 Bc のときと同じで実験値>縮約>Bd2>Bd1 の順である。すべて門型ラーメン全体系としても安全側に評価できている。縮約による $M_{total}/2$ の値は実験値に近く、その誤差は 3.8% 程度でよい一致を見せている。

3.3.3 まとめ

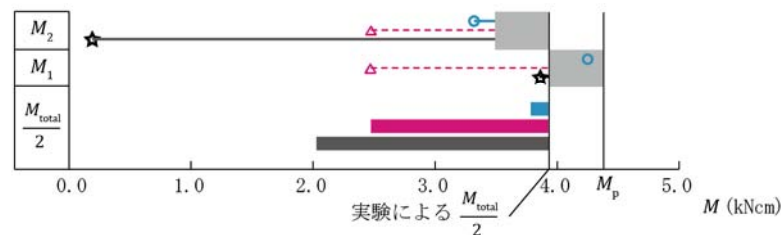
以上の各試験体での解析による $M-N$ 相関曲線の設定が、実験に対してどの程度一致しているかをまとめて比較した結果を図 3.3.9 に示す。(a)~(c) で、それぞれ上 2 段が解析による M_1, M_2 が実験で決まる M_1, M_2 のとり得る範囲からどのくらい外れているかを示す。最下段は実験値と解析値の $M_{total}/2$ の差を帯長さで示している。



(a) frame Ba1, Ba2 と縮約の解析結果の比較



(b) frame Bc1, Bc2 と縮約の解析結果の比較



(c) frame Bd1, Bd2 と縮約の解析結果の比較

実験から求まる M_1, M_2 がとり得る範囲：
 $M-N$ 相関曲線から求まる M_1, M_2 : ★ Bx1 △ Bx2 ○ 縮約 (x = a, c, d)
 $\frac{M_{total}}{2}$ の解析値と実験値の差: ■ Bx1 ■ Bx2 ■ 縮約 (x = a, c, d)

図 3.3.9 frame Bx1, Bx2 と縮約の解析結果の比較

まず、縮約以外の 2 つの荷重条件モデル frame Bx1, Bx2 の全体座屈解析による M_1, M_2 についてみる。座屈解析結果では、柱 2 は水平力が加わった状態の解析になるにつれて (frame Bx1 → Bx2), 柱 1 の軸力が小さくなることで、柱 2 の柱頭が拘束される力が増し、座屈荷重が上昇した。よって、同じ軸力のときの曲線上の曲げモーメントは大きくなるので、frame Bx1 → Bx2 の順に M_2 は大きくなる。上図 3.3.9 でも 2 つとも安全側ではあるが、実験から限定される M_2 の範囲に漸近していることが分かる。

柱 1 については、水平力が加わって柱 2 の軸力が大きくなるつれ柱 1 の柱頭の拘束度が下がり、座屈荷重が低下する解析結果だったので、frame Bx2 → Bx1 の順に M_1 の値は大きくなる。しかし、グラフよりこのときもすべて安全側であった。つまり、今回の実験をした条件下では、

どの荷重条件の解析モデルも安全側であり、最も座屈荷重が大きく出るように、柱 2 については frame Bx2, 柱 1 については frame Bx1 を用いてもよいということが分かる。

一方、縮約による M_1 , M_2 をみると、frame Ba の M_2 以外で M_1 , M_2 とともに実験により限定される範囲に最も近い値を算出できていることが分かる。

また、 $M_{\text{total}}/2$ の解析による値と実験値との差をみるとすべての試験体で全体系としては、鉛直荷重のみの座屈解析 frame Bx1 から求めた相関曲線による設計が最も安全側であることが分かる。その誤差は最大で frame Bd1 で約 50 % にも及んでいる。frame Bx2 は全体系としては、frame Bx1 よりも実際に近い値を示す傾向にある。縮約による座屈荷重を用いた場合は、この中では最も誤差が小さく評価できており、また安全側であることが分かる。

以上より、今回実験を行った範囲では、個材固有値から算出した座屈荷重から導いた $M-N$ 相関曲線は実現象に対して安全側であり、なおかつ既存の座屈荷重の評価方法よりよい一致がみられることが分かった。

また、試験体 Ba, Bb, Bc の実験では $M_{\text{total}}/2$ が全塑性モーメント M_p とほぼ同じ値となった。このことから最大水平荷重時に柱頭の曲げモーメントは材料の負担できる最大曲げモーメント M_p にほぼ達していて、終局強度に与える曲げモーメントの影響が大きいときは、座屈による部材の最大耐力低下の影響はほとんどないことが分かる。

3.4 今後の実験計画

今回の実験では、試験体のサイズと使用できるおもりの制約から鉛直荷重 P が左右の柱で等しい場合しか試せなかった。そのため鉛直荷重 P は、左右で均等な鉛直荷重がかかったときに全体座屈を起こす $P = 0.918$ (kN) 以下に設定しなければならなかった。結果、 $M-N$ 相関曲線の M がある程度大きい範囲の応力状態しか作り出して検証することができなかった。

偏荷重を実現できるような実験設備を用意することで、軸力が大きく曲げモーメントが小さい範囲での様子を観察する必要がある (図 3.4.1)。

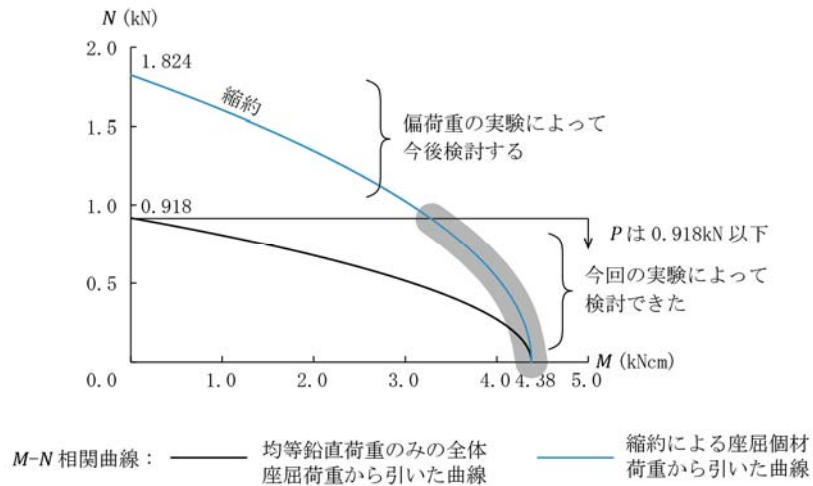


図 3.4.1 今後の実験で検証するべき $M-N$ 相関曲線の範囲

また、実験以外にも材料非線形と幾何学的非線形を扱った解析で同じ検証ができる。しかし、今回は検証に用いる任意の $M-N$ 相関曲線を部材ごとに設定してこの解析を行うことができる環境がなかったため、今後開発の余地がある。

4. 個材固有値を指標とした座屈に対する形状最適化

4.1 個材固有値による座屈安全率

本章では、個材固有値を指標とした座屈に対する形状最適化の手法について探る。個材の座屈荷重を、個材固有値と軸力の積であるとするとその部材の座屈に対する余裕度 SF は式 (4.1.1) のように考えられるため、個材固有値の逆数となる。そこで、この個材固有値の逆数を座屈に対する安全率として扱う。ただし、座屈安全率の結果を表示する際は、最大値が 1.00 になるように基準化を行うこととする。

$$SF = \frac{N}{\lambda' N} = \frac{1}{\lambda'} \quad (4.1.1)$$

堤^[4]は、この安全率の分布から断面強化や架構形状の変更により座屈に対して形状最適化を行える可能性を示唆している。例えば特定の部材の断面強化による形状最適化については、

- ・ 個材固有値が小さい部材を強化する
- ・ 個材固有値が小さい部材の拘束度を上げる

等の方法が最適化の手法として提案されている。しかし、部材間での相互作用の影響度が分かりづらく、どの部材を変化させれば特定の部材の個材固有値の増加率が大きいかを判断するのは困難であることが指摘されている。

4.2 座屈モードの分析と断面強化による最適化に関する考察

4.2.1 個材の座屈モードの分析方法

縮約による個材固有値は、個材の存在軸力だけでなく端部の拘束度にも依存していることが分かっている。個材自身が存在軸力に対して弱いことによる座屈の影響が大きいのであれば、その断面を大きくすることで座屈荷重を上げられる。一方、端部の拘束度が弱いことの影響が大きい場合は、周囲の部材を強くして拘束力を上げることが有効となる。拘束度が弱いということは、縮約後の状態で端部に取り付くばねが弱い状態であると解釈できる。

検出される個材の座屈でどちらの影響が大きいのか分かれば、座屈に対する最適化の指標として個材固有値による安全率を用いるときに、最適化する手段を決定できるようになると考えられる。

既往研究で挙げた高次固有値法^{[6]・[9]・[11]}のように、拘束がゆるい場合には高次のモードに個材の座屈の様子が見られる可能性がある。そこで、座屈モードを描画することで座屈モードと個材固有値の関係性を探ることとする。

これまでの座屈固有値問題の縮約についての論文^{[14]・[15]}で、縮約後の剛性マトリクスと求まる個材固有値については研究されてきた。縮約後の剛性マトリクスは、弾性剛性マトリクスと幾何剛性マトリクスをそれぞれ具象化することによってその物理的な意味の解釈が試みられている。個材固有値から求まる個材座屈荷重については、数値解析を通してその傾向が考察されている。しかし、縮約後の個材の固有ベクトル（座屈モード） $\{U_e\}$ については今まで分析されていない。

通常座屈モードは、部材を要素分割して中間節点を作った状態で座屈解析をし、求まる固有ベクトル分だけ移動させた節点を直線で結ぶことで描画される（図 4.2.1 (a)）。しかし、剛性マトリクスの縮約では個材端部の 2 点だけが残る状態を実現しているため、求まる固有ベクトルから座屈モードを描くことができない。そこで今回は座屈モードとして、2 節点を通る 3 次曲線を描くこととする。個材端 2 節点をまず固有ベクトルの水平・鉛直変位成分だけ移動させ、回転変位 θ をその点での接線ベクトルとする曲線を引いて描画することを考える（図 4.2.1 (b)）。ただし、固有ベクトルは大きさ 1 で規格化する。

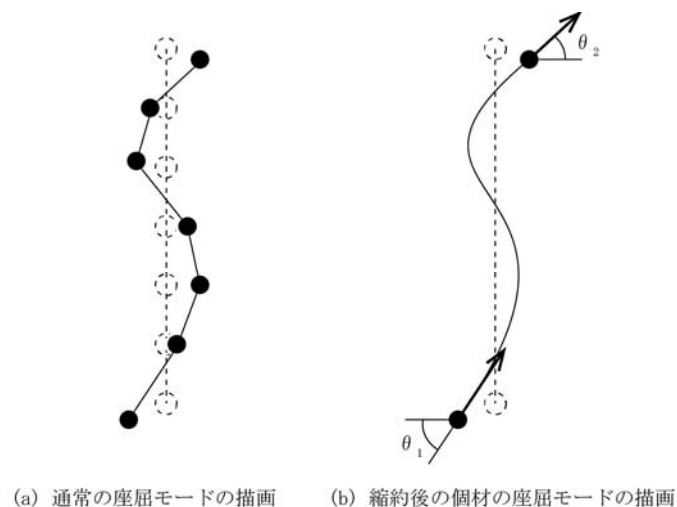


図 4.2.1 座屈モードの描画方法

4.2.2.4 層ラーメン構造の座屈モード

まず、堤^[4]の論文にある4層ラーメン構造の部材断面強化による形状最適化についての考察を以下に示す。基本モデルは図4.2.2(a) frame 4C0で、すべての部材が3×3(cm)の正方形断面で、 $E = 2.1 \times 10^4$ (kN/cm²)、 $I = 6.75$ (cm⁴)、 $A = 9.00$ (cm²)とする。(a)のように鉛直荷重をかけた状態で線形座屈解析をすると最小固有値は $\lambda = 0.678$ となり、全体系の座屈モードは(b)である。縮約による最小の個材固有値は表4.2.1の通り算出され、それを座屈安全率として基準化して表示すると図4.2.2(c)のようになる。

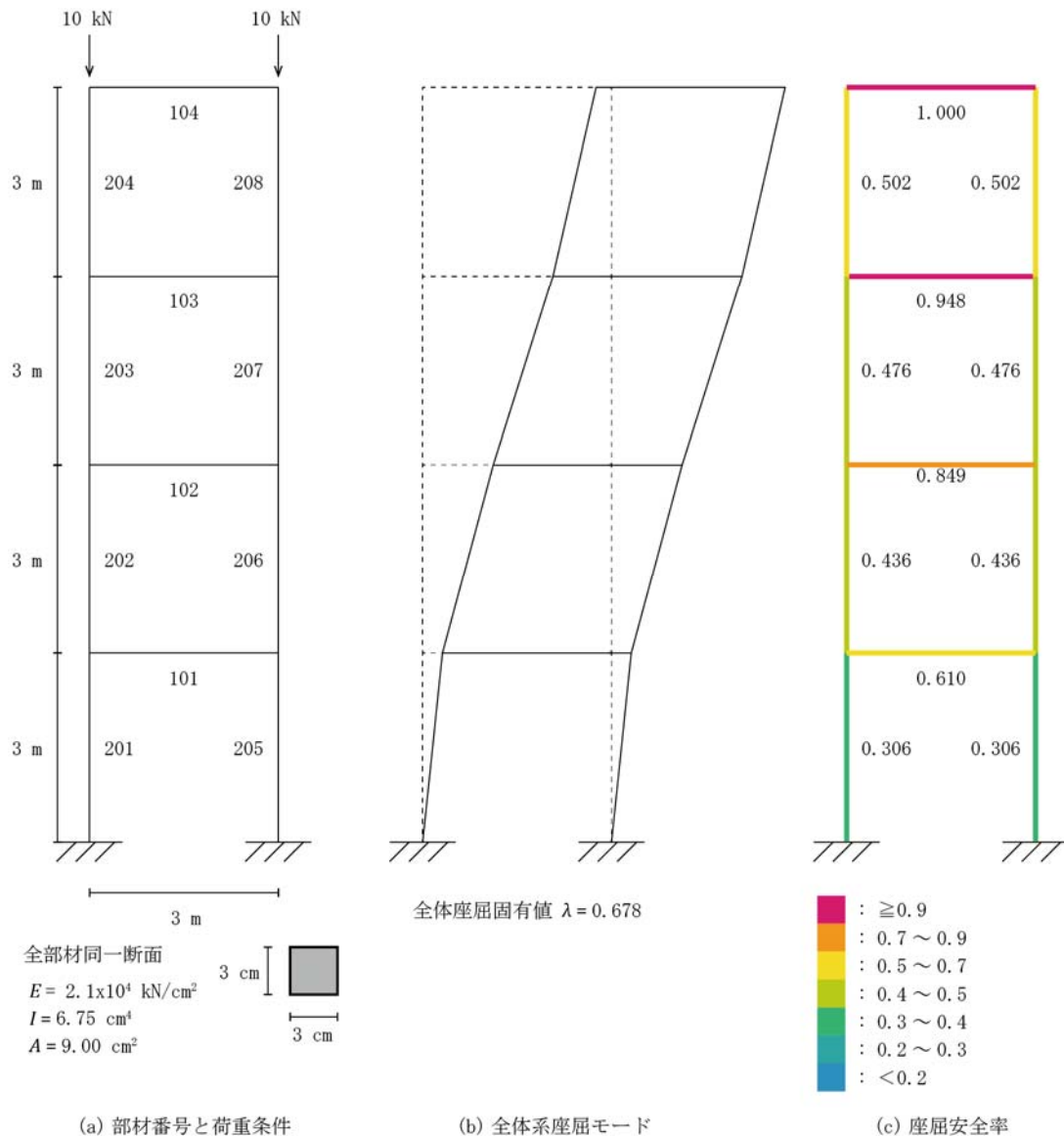


図 4.2.2 frame 4C0 解析モデルと解析結果

表 4.2.1 frame 4C0 縮約による最小個材固有値と座屈安全率

梁			柱		
部材	最小個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	部材	最小個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
104	0.714	1.000	204	1.424	0.502
103	0.754	0.948	203	1.504	0.476
102	0.842	0.849	202	1.642	0.436
101	1.172	0.610	201	2.340	0.306

このとき、全体的に柱に比べて梁の方が個材固有値は小さく、座屈安全率が高く出ている。しかし、鉛直荷重のみという荷重条件から考えて、梁部材自身がこの構造全体系において柱より座屈しやすいとは考えにくい。

そこで、実際に部材断面を操作して全体系の固有値、個材固有値の変化を調べてみる。梁もしくは柱を同体積分増加するように見つけ寸法を大きくして断面強化をする(表 4.2.2)。ただし柱は同じ層の柱を2本とも強化する。

表 4.2.2 frame 4C 断面強化の操作に使う断面情報

断面情報	元の部材	強化後 梁	強化後 柱
寸法 (cm)	3×3	3×6	3×4.5
断面二次モーメント I (cm ⁴)	6.75	54.00	22.78
断面積 A (cm ²)	9.00	18.00	13.50

表 4.2.3 frame 4C 部材断面強化の結果

モデル	断面操作する部材	全体固有値	増加率	順位
frame 4C0	基本モデル	0.678	—	—
frame 4C4	104 (4層)	0.700	1.03	7
frame 4C3	103 (3層)	0.764	1.13	2
frame 4C2	102 (2層)	0.806	1.18	1
frame 4C1	101 (1層)	0.716	1.05	5
frame 4C8	204,208 (4層)	0.711	1.05	6
frame 4C7	203,207 (3層)	0.739	1.09	3
frame 4C6	202,206 (2層)	0.721	1.06	4
frame 4C5	201,205 (1層)	0.697	1.03	8

結果を表 4.2.3 にみると確かに、例えば最も個材固有値の小さい梁部材 104 の断面を大きくしてみても、全体固有値は3%しか上がっていない。また、他の部材の断面操作と比較してもその有効性は7位と低いことが分かる。

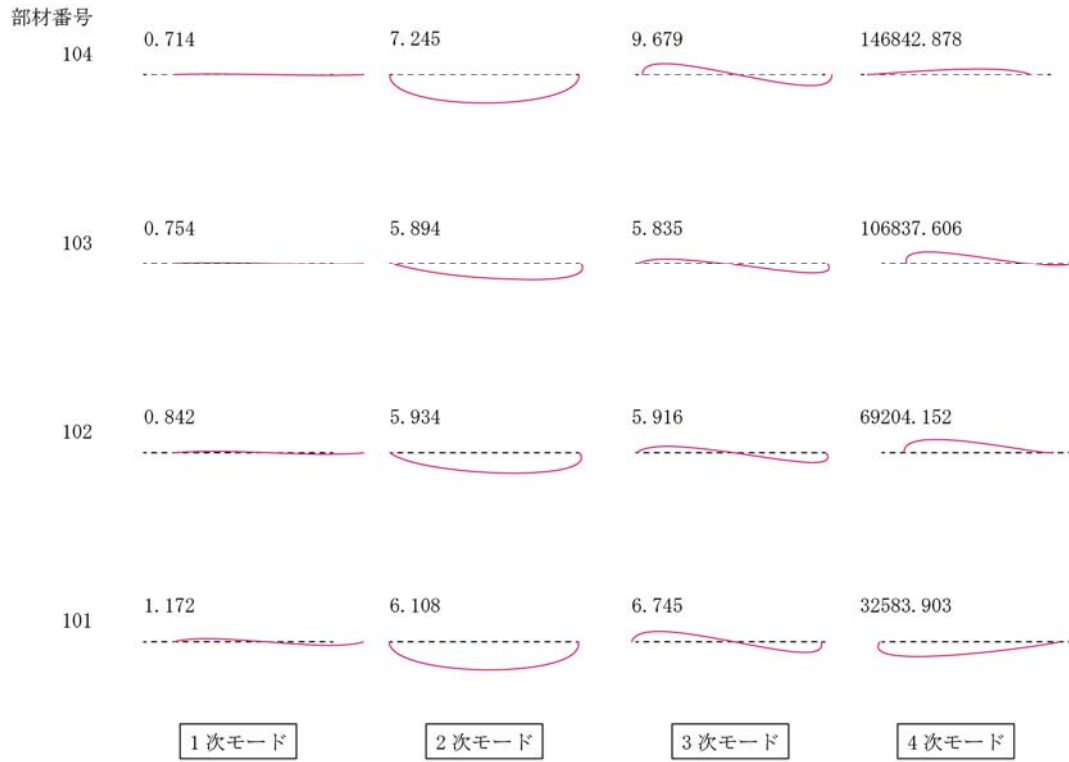
堤^[4]はこのことを、縮約後の座屈解析によって、部材 104 をはじめとする梁では部材自体が変形する一般的な座屈ではなく、架構中での固定度が小さく、ゆるいばねが取り付けられている状態で

表されていることによる座屈が検出されているのではないかと推測している。そのため、断面を強化させてもあまり効果が得られなかったと考えている。

そこで、本論文ではまずこのことを、個材座屈モードを描画して確認する。梁と柱それぞれについて、1次～4次の個材固有値 λ' と固有ベクトル $\{U'_e\}$ を表 4.2.4, 4.2.5 に示す。これを前項の手法で座屈モードとして描画すると、図 4.2.3, 4.2.4 のようになる。

表 4.2.4 frame 4C0 梁の個材固有値と固有ベクトル

部材		1次	2次	3次	4次
104	λ'	0.714	7.245	9.679	146842.878
	$\{U'_e\}$	0.707	0.002	0.154	-0.337
		0.000	0.000	0.001	0.000
		0.023	-0.705	0.685	0.021
		0.707	0.002	0.154	-0.927
		0.000	0.000	-0.001	0.000
		0.023	0.710	0.696	-0.161
103	λ'	0.754	5.894	5.835	106837.606
	$\{U'_e\}$	0.706	0.031	0.048	0.566
		0.000	0.000	0.001	0.001
		0.032	-0.169	0.235	0.806
		0.706	0.031	0.048	0.056
		0.000	0.000	-0.001	-0.001
		0.032	0.985	0.970	0.164
102	λ'	0.842	5.934	5.916	69204.152
	$\{U'_e\}$	0.705	0.011	0.021	0.514
		0.000	0.000	0.000	0.000
		0.055	-0.289	0.303	0.722
		0.705	0.011	0.021	-0.462
		0.000	0.000	0.000	0.000
		0.055	0.957	0.953	-0.014
101	λ'	1.172	6.108	6.745	32583.903
	$\{U'_e\}$	0.694	-0.016	-0.091	-0.045
		0.000	0.000	0.000	0.000
		0.135	-0.620	0.563	-0.958
		0.694	-0.016	-0.091	-0.270
		0.000	0.000	0.000	0.000
		0.135	0.784	0.817	0.083

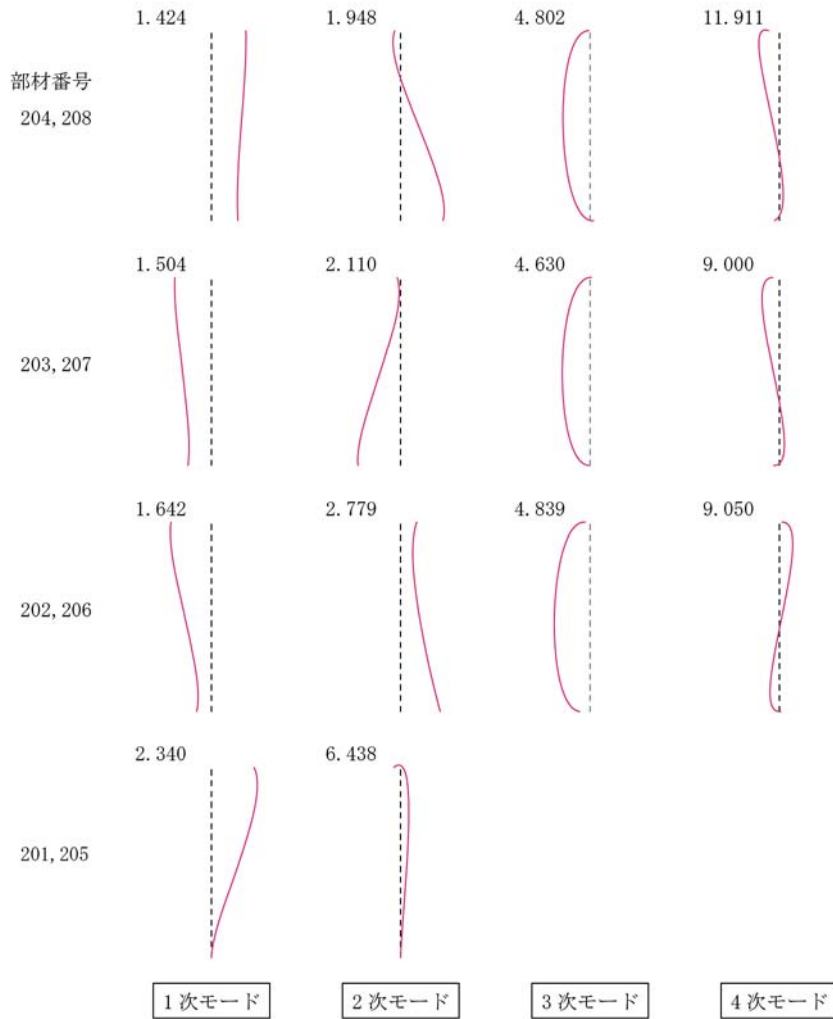


各モード左上の数字はそのモードの個材固有値を表す

図 4.2.3 frame 4C0 梁の個材固有値と座屈モード

表 4.2.5 frame 4C0 柱の個材固有値と固有ベクトル

部材		1次	2次	3次	4次
204 208	λ'	1.424	1.948	4.802	11.911
	$\{U'_e\}$	0.609	0.968	0.086	-0.112
		0.000	0.000	0.000	-0.001
		0.045	-0.139	0.732	-0.456
		0.791	-0.139	-0.026	-0.248
		0.000	0.000	0.000	-0.001
	0.022	-0.159	-0.676	-0.847	
203 207	λ'	1.504	2.110	4.630	9.000
	$\{U'_e\}$	-0.540	-0.981	-0.005	-0.134
		0.000	0.000	0.000	0.000
		-0.070	0.064	0.694	-0.694
		-0.838	-0.085	0.033	-0.148
		0.000	0.000	0.000	-0.001
	-0.040	0.164	-0.719	-0.692	
202 206	λ'	1.642	2.779	4.839	9.050
	$\{U'_e\}$	-0.343	0.905	-0.234	0.031
		0.000	0.000	0.000	0.000
		-0.119	0.116	0.629	0.732
		-0.928	0.371	-0.107	0.058
		0.000	0.000	0.000	0.000
	-0.083	-0.170	-0.734	0.679	
201 205	λ'	2.340	6.438	—	—
	$\{U'_e\}$	0.000	0.000	0.000	—
		0.000	0.000	0.000	—
		0.000	0.000	0.000	—
		0.978	-0.159	-0.007	—
		0.000	0.000	0.000	—
	0.209	0.987	-1.000	—	



各モード左上の数字はそのモードの個材固有値を表す

図 4.2.4 frame 4C0 柱の個材固有値と座屈モード

まず、梁の座屈モードについてみる。すべての層の梁で、座屈モードの傾向は一致している。1次モードは、端部節点の水平方向変位が大きく、部材自体はほとんど変形していない。2次モードでは、節点の移動量は小さく、個材が大きく変形している。このことから堤^[4]の予想通り、梁の最小固有値では、個材端部にとりつくばねがゆるいことによる座屈が検出されていることが分かった。

続いて、柱についてみる。梁とは異なり、層ごとに座屈モードの傾向が異なる。1次モードでは下層の柱ほど個材が変形していて、上層になるにつれ節点の水平方向変位が大きくなっていく。梁のように、部材自体の変形の影響が大きいのか、ばねの変形の影響が大きいのか判別するのが難しい。

ここで例えば、最上層の柱 204, 208 だけ、1次モードは部材がほとんど変形しておらず、2次モードが個材自体の変形による影響が大きい座屈であると判断したとする。梁・柱ともに個材自体の変形による影響が大きい座屈モードの固有値を用いて、座屈安全率を計算し色表示すると表 4.2.6, 図 4.2.5 (b) のようになる。(a) に図 4.2.2 の最小固有値による座屈安全率色表示を比較のために再掲すると、分布が大きく変化していることが分かる。

表 4.2.6 frame 4C0 縮約による個材の変形の影響が大きいと考えられる固有値と座屈安全率

梁			柱		
部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
104	7.245	0.208	204	1.948	0.772
103	5.894	0.256	203	1.504	1.000
102	5.934	0.254	202	1.642	0.916
101	6.108	0.247	201	2.340	0.643

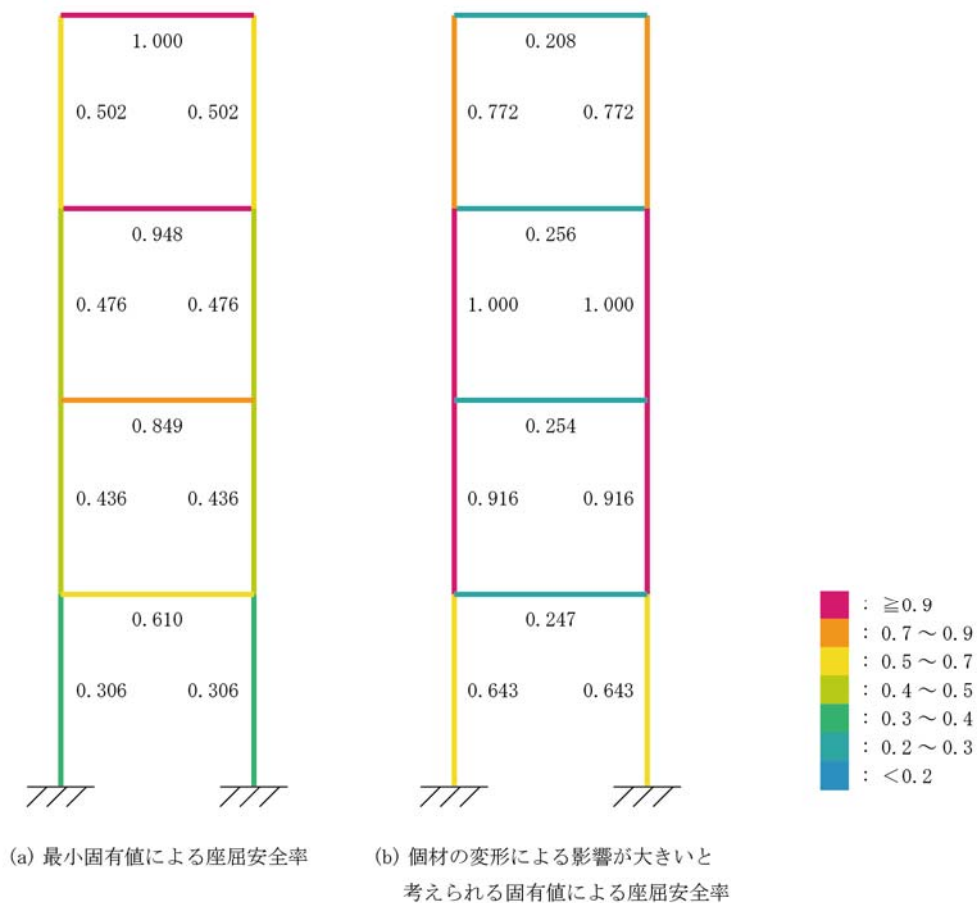


図 4.2.5 frame 4C0 安全率色表示

ここに、先ほどの断面強化の結果を表 4.2.3 に梁ごと、柱ごとの全体固有値増加率順位を追加して再掲する。この順位が、柱では個材の変形の影響が大きい個材固有値による座屈安全率の大きい順と一致していることが分かる。梁でもおおむね順位の傾向は一致している。このことから、個材自体の変形による影響が大きい座屈モードの固有値を指標に、部材断面を強化することで座屈に対する形状最適化が図れる可能性があると考えられる。

(再掲) 表 4.2.3 frame 4C 部材断面強化の結果

モデル	断面操作する部材	全体固有値	増加率	順位	順位 (梁・柱ごと)
frame 4C0	基本モデル	0.679	—	—	
frame 4C4	104 (4 層)	0.700	1.03	7	4
frame 4C3	103 (3 層)	0.764	1.13	2	2
frame 4C2	102 (2 層)	0.806	1.18	1	1
frame 4C1	101 (1 層)	0.716	1.05	5	3
frame 4C8	204,208 (4 層)	0.711	1.05	6	3
frame 4C7	203,207 (3 層)	0.739	1.09	3	1
frame 4C6	202,206 (2 層)	0.721	1.06	4	2
frame 4C5	201,205 (1 層)	0.697	1.03	8	4

しかし、このときも個材固有値と全体固有値の増加率の総合順位との関係性は明確でない。断面強化することによって、個材自身が座屈に対して強くなる効果以外に、周辺部材の拘束度を上げる効果もあるため、全体系としての有効性の評価は線形座屈解析を行わないと分からない、と考えられる。

特定の部材断面を強化する最適化操作の指標として、

○個材自体の変形による影響が大きい高次の座屈モードの固有値から座屈安全率を算出して、その大きい順に断面強化操作による全体系の座屈荷重増加の効果が大きい傾向にある

という仮説を立てて、次項では 1 本柱のモデルで検証してみる。

4.2.3 1 本柱の座屈モード

1 本柱の座屈モードについて考察する。基本モデルは図 4.2.6 (a) 要素分割された両端ピン支持の column A0 と両端固定の column B0 で、すべての部材が 10×10 (cm) の正方形断面で、 $E = 2.1 \times 10^4$ (kN/cm²)、 $I = 833$ (cm⁴)、 $A = 100$ (cm²) とする。(a) のような鉛直荷重をかけた状態で線形座屈解析をすると最小固有値はそれぞれ、 $\lambda = 17.265$ 、 69.074 となり、全体系の座屈モードは (b) である。縮約による最小の個材固有値は表 4.2.7 の通り算出され (上下対称なので下半分についてのみ示す)、それを座屈安全率として基準化して表示すると図 4.2.6 (c) のようになる。

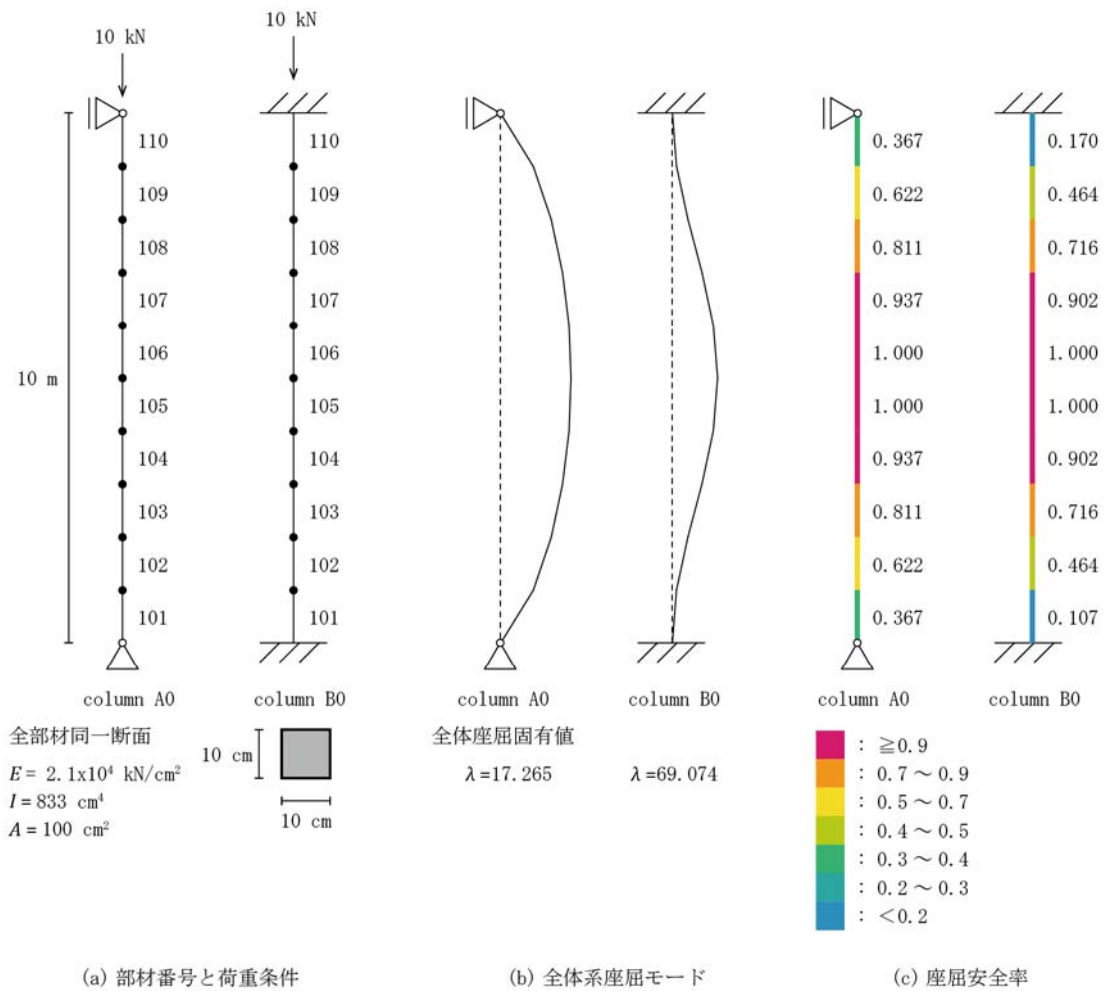


図 4.2.6 column A0, B0

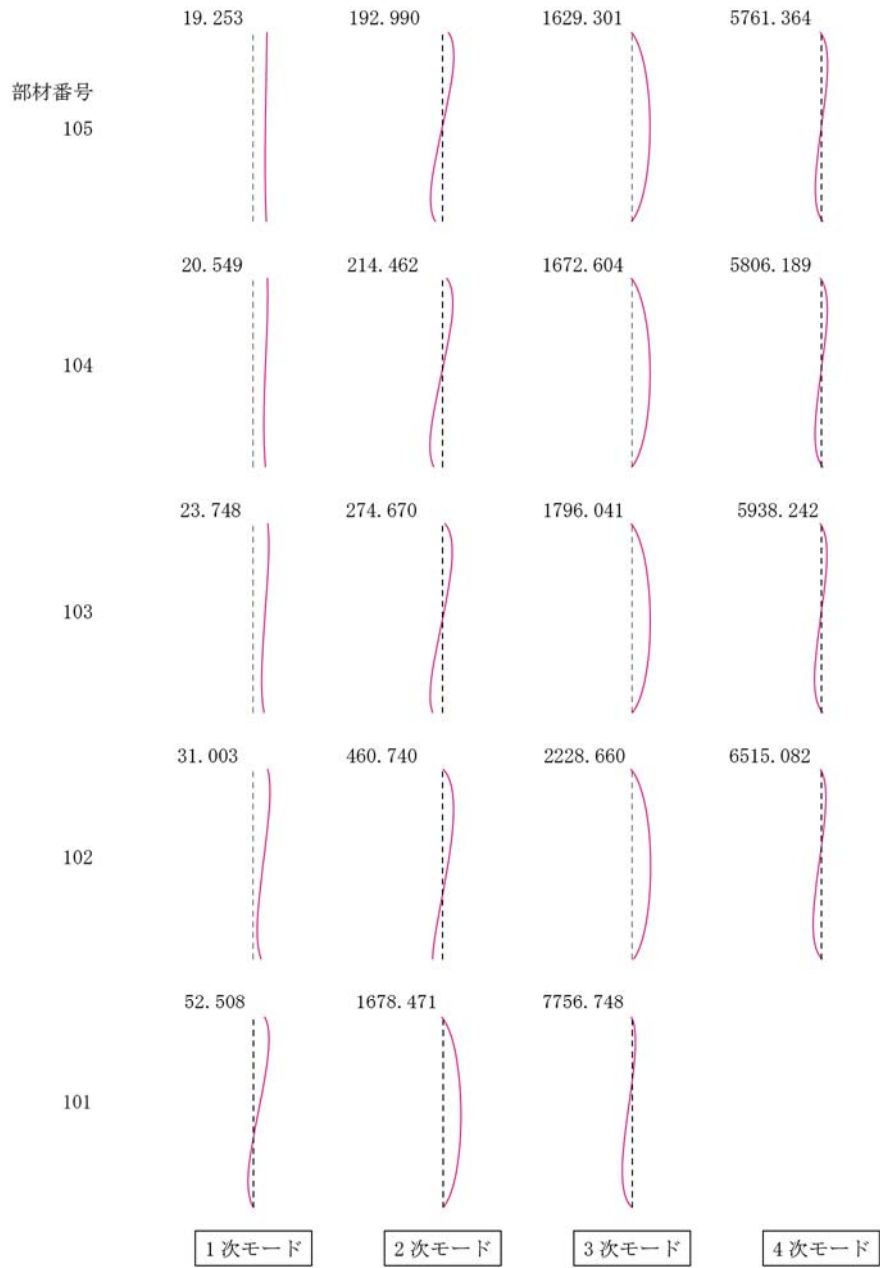
表 4.2.7 column A0, B0 縮約による最小個材固有値と座屈安全率

column A0			column B0		
部材	最小個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	部材	最小個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
105	19.253	1.000	105	77.385	1.000
104	20.549	0.937	104	85.824	0.902
103	23.748	0.811	103	108.095	0.716
102	31.003	0.622	102	166.849	0.464
101	52.508	0.367	101	456.789	0.170

この柱の各要素について、1次～4次の個材固有値と固有ベクトルについて表 4.2.8, 4.2.9 に示す。これを前項と同様に座屈モードとして描画すると、図 4.2.7, 4.2.8 のようになる。すべて上下対称なので下半分についてのみあげる。

表 4.2.8 column A0 の個材固有値と固有ベクトル

部材		1次	2次	3次	4次
105	λ'	19.253	192.990	1629.301	5761.364
	$\{U_e\}$	0.690	-0.384	-0.029	0.068
		0.069	0.591	-0.707	0.711
		0.720	0.298	-0.039	-0.070
		-0.009	0.644	0.705	0.697
104	λ'	20.549	214.462	1672.604	5806.189
	$\{U_e\}$	0.648	-0.464	-0.013	0.065
		0.139	0.515	-0.708	0.727
		0.747	0.208	-0.047	-0.070
		0.056	0.690	0.704	0.680
103	λ'	23.748	274.670	1796.041	5938.242
	$\{U_e\}$	0.577	-0.532	0.015	0.058
		0.236	0.375	-0.704	0.752
		0.769	0.117	-0.055	-0.069
		0.143	0.750	0.708	0.653
102	λ'	31.003	460.740	2228.660	6515.082
	$\{U_e\}$	0.419	-0.527	0.081	0.035
		0.394	-0.007	-0.650	0.816
		0.765	0.019	-0.067	-0.062
		0.288	0.849	0.753	0.574
101	λ'	52.508	1678.471	7756.748	—
	$\{U_e\}$	0.000	0.000	0.000	—
		0.616	-0.709	0.885	—
		0.586	-0.059	-0.051	—
		0.526	0.703	0.463	—



各モード左上の数字はそのモードの個材固有値を表す

図 4.2.7 column A0 の個材固有値と座屈モード

表 4.2.9 column B0 の個材固有値と固有ベクトル

部材		1次	2次	3次	4次
105	λ'	77.385	280.660	1763.015	5885.815
	$\{U'_e\}$	0.674	-0.456	0.014	0.062
		0.124	0.559	-0.708	0.713
		0.728	0.238	0.000	-0.067
		-0.020	0.650	0.706	0.695
104	λ'	85.824	327.906	1825.117	5946.363
	$\{U'_e\}$	0.593	-0.619	0.041	0.053
		0.233	0.390	-0.706	0.734
		0.765	0.010	-0.005	-0.072
		0.096	0.681	0.707	0.673
103	λ'	108.095	471.586	2013.490	6126.324
	$\{U'_e\}$	-0.461	0.689	0.097	0.034
		-0.352	-0.098	-0.692	0.765
		-0.777	0.185	0.001	-0.079
		-0.244	-0.694	0.716	0.639
102	λ'	166.849	952.117	2828.694	6859.181
	$\{U'_e\}$	-0.242	0.481	0.268	-0.041
		-0.439	0.449	-0.504	0.830
		-0.734	0.256	0.050	-0.114
		-0.458	-0.708	0.819	0.545
101	λ'	456.789	3773.727	—	—
	$\{U'_e\}$	0.000	0.000	—	—
		0.000	0.000	—	—
		0.553	-0.241	—	—
		0.833	0.970	—	—

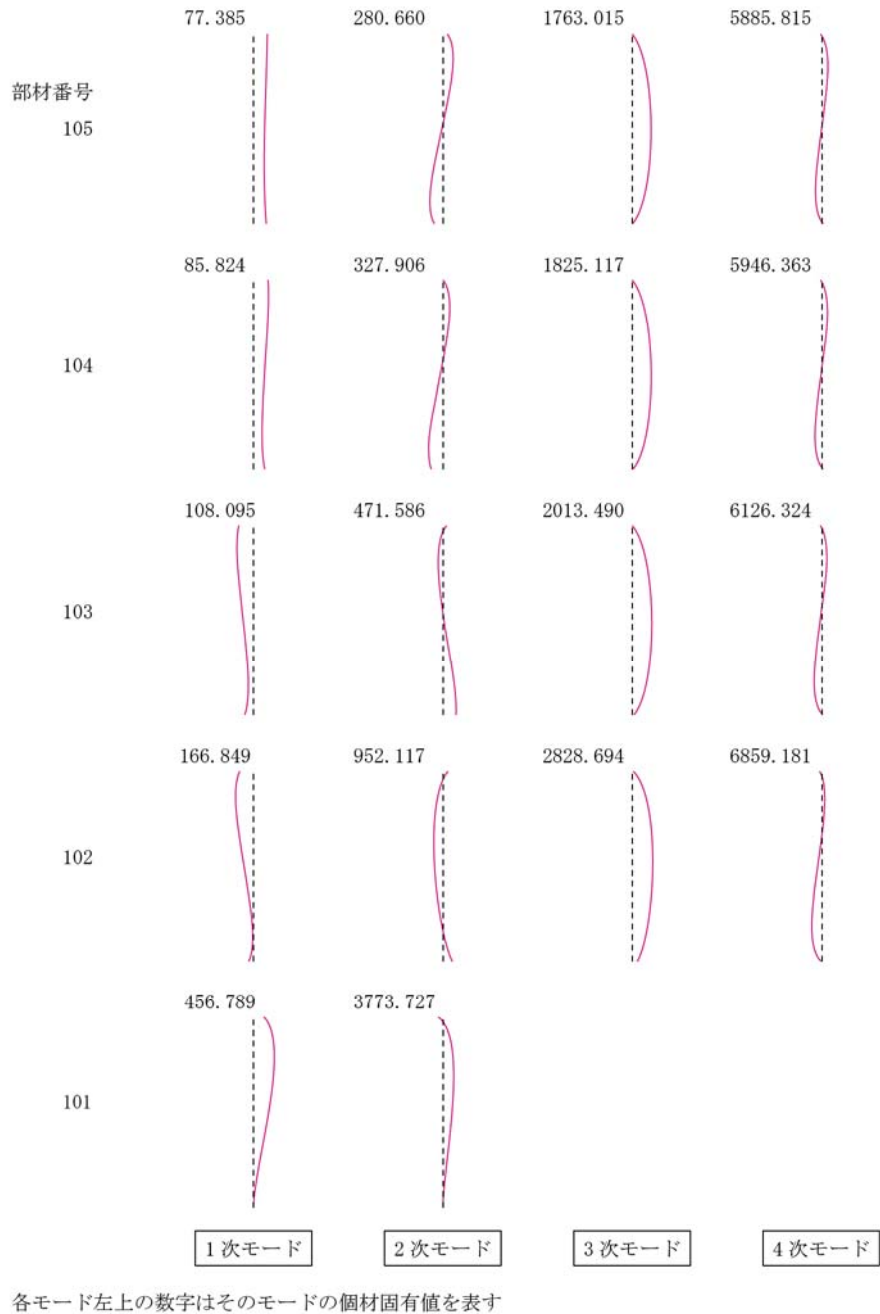


図 4.2.8 column B0 の個材固有値と座屈モード

両端ピン支持の column A0, 両端固定の column B0 とともに層ごとに座屈モードの傾向が異なる。1次モードでは、柱端部に近い要素ほど個材自体の変形が大きく、柱中間に向かうにつれて個材節点の水平方向変位が大きくなる。つまり、中間の方が個材端部に取り付けばねの弱さによる影響が大きい座屈が検出されているといえる。

また両モデルで、部材 102~105 の3次モードに個材の両端ピンのような座屈モードが見られる。このときの部材断面で、要素1つ分の長さ1(m)の両端ピン柱のオイラー座屈荷重は17265(kN)であり、10(kN)の鉛直荷重に対して近い値が個材固有値として検出されている。

座屈モードの層ごとの違いは連続的で、前項の4層ラーメン構造の梁のときのように個材自体の変形による影響が大きい座屈モードがどれか判断する、ということが難しい。そこで、まず上下で対称な2部材の断面を強化する操作をしてみて、その効果を見ながら座屈モードと形状最適化の関係について考察を進めることとする。

強化後の断面は見つけ寸法を変化させて、 10×15 (cm) の断面とし、 $I = 2.81 \times 10^3$ (cm⁴), $A = 150$ (cm²) である。結果を表 4.2.8, 4.2.9 に示す。

表 4.2.8 column A 部材断面強化の結果

モデル	断面操作する部材	全体固有値	増加率	順位
column A0	基本モデル	17.265	—	—
column A5	105,106	23.335	1.35	1
column A4	104,107	22.113	1.28	2
column A3	103,108	20.004	1.16	3
column A2	102,109	18.310	1.06	4
column A1	101,110	17.420	1.01	5

表 4.2.9 column B 部材断面強化の結果

モデル	断面操作する部材	全体固有値	増加率	順位
column B0	基本モデル	69.074	—	—
column B5	105,106	93.077	1.35	1 (同率)
column B4	104,107	77.640	1.12	2 (同率)
column B3	103,108	69.694	1.01	3
column B2	102,109	77.640	1.12	2 (同率)
column B1	101,110	93.077	1.35	1 (同率)

まず両端ピン支持の column A について部材断面強化の結果を見ると、柱中央に近い部材を強化することが効果的であることが分かる。4層ラーメン構造のときのように、個材自体の変形による影響が大きい座屈モードの固有値を抽出して安全率を算出し、その値の大きい順と全体固有値の増加率順位が一致すると仮定すると、図 4.2.7 よりすべての個材で同次の座屈モードを抽出すればよいことが分かる。しかし、例えば1次モードでは、部材 101 は個材自体の変形による影響が十分に大きい座屈モードに見えるが、部材 105 では拘束度の弱さが大きく影響しているように思われるという矛盾がある。

次に、両端固定の column B について部材断面強化の結果を見ると、部材 103 を中心にその順位は対称である。このことは、column B0 の座屈モードが 1/4 の高さごとに同じであることから理解できる (図 4.2.9)。

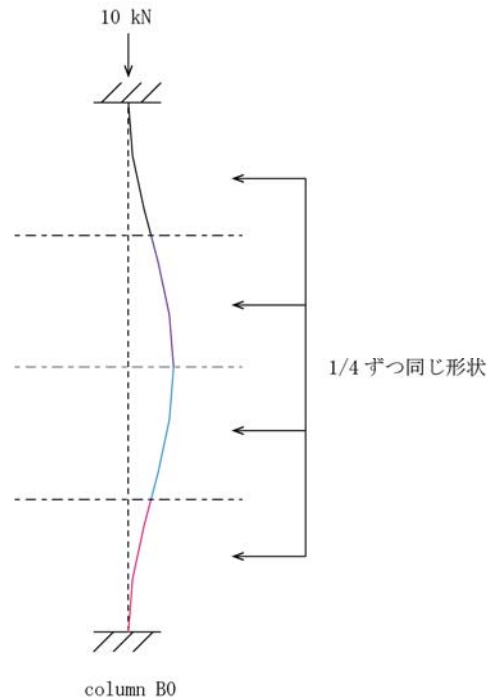


図 4.2.9 column B0 の座屈モードの対称性

中央部の個材ほど柱中での拘束度がゆるいので、部材 104, 105 の低次のモードでは拘束力の弱さによる座屈が検出されると考えられる。そのため、部材 104, 105 の高次に、それぞれ部材 102, 101 の 1 次モードと同じ、個材自体の変形による影響が大きいモードと個材固有値が現れれば、仮説をうまく説明ができる。しかし、図 4.2.8 をみると 2 次モードが形状としては似ているが、同じ個材固有値を見つけることはできない。

以上より、特定の部材断面を強化する最適化操作の指標として、

○個材自体の変形による影響が大きい高次の座屈モードの固有値から座屈安全率を算出して、その大きい順に断面強化操作による全体系の座屈荷重増加の効果が大きい傾向にある

という仮説は限定的な条件下、今回は 4 層ラーメン構造の柱についてしか説明できないことが分かった。これは、断面強化することによって、個材自身が座屈に対して強くなる効果以外に、周辺部材の拘束度を上げる効果もあるため、全体系としての効果の評価は線形座屈解析を行わないと分からないことによる、と考えられる。一方で、両端固定の柱 column B0 で高次のモードまで考慮しても、対称な条件の個材で同じ個材固有値を検出できていないことから、個材固有値の算出方法の改善が必要な可能性もある。

4.3 部材体積の分配による最適化

4.3.1 両端ピン支持柱の形状最適化に関する考察

座屈固有値問題の縮約による個材固有値を用いた形状最適化手法の可能性を、他の方法で探る。

まず、堤^[14]の論文で、座屈安全率と最適形状の関係性が明らかになっている両端ピン支持の 1 本柱から考察する。基本的なモデルは前節と同じ column A0 とする。堤^[14]はこれと浜田ら^[18]が逆変分離法で求めた最適形状 column A6 の座屈安全率を比較して、最適化指標について検討している。ここで用いる最適形状は、体積一定を保ちつつ要素ごとに見つけ寸法 t (cm) を変化させている。以後、分かりやすいように、解析は線材モデルで行っているが、図 4.3.1 のようにその部材の見つけ幅の比をグレーの長方形で表すこととする。

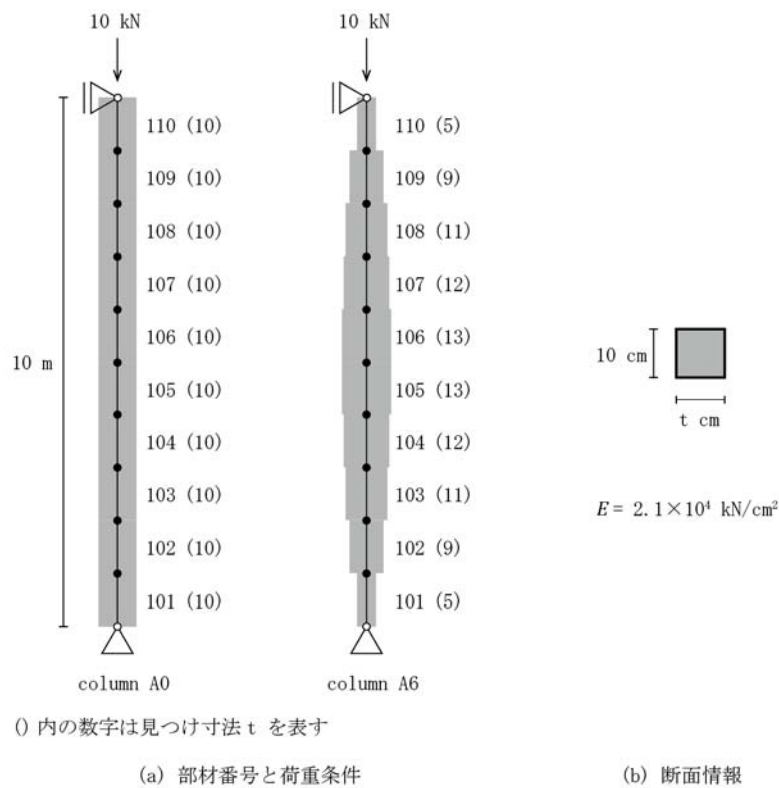


図 4.3.1 column A0, A6 解析モデル

解析結果を比較すると以下のようになる。

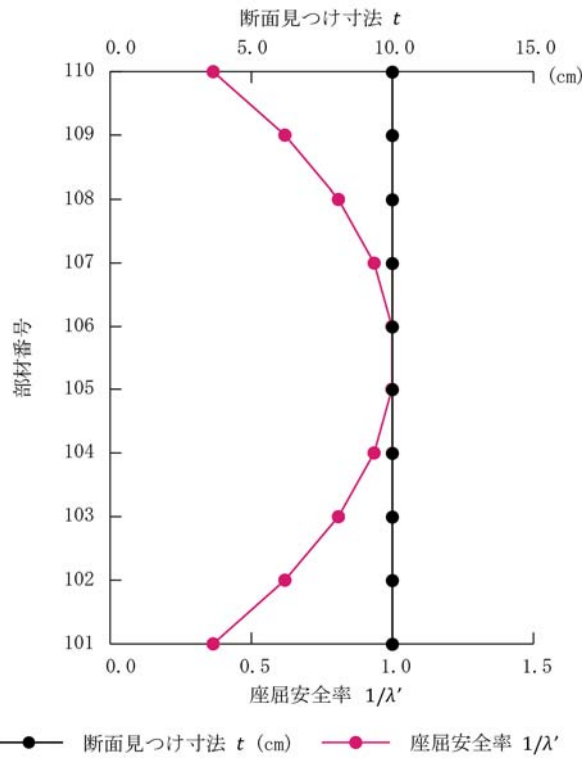


図 4.3.2 column A0 見つけ寸法と座屈安全率

表 4.3.1 column A0 解析結果

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
110	52.508	0.367
109	31.003	0.622
108	23.748	0.811
107	20.549	0.937
106	19.253	1.000
105	19.253	1.000
104	20.549	0.937
103	23.748	0.811
102	31.003	0.622
101	52.508	0.367

全体固有値 $\lambda = 17.265$

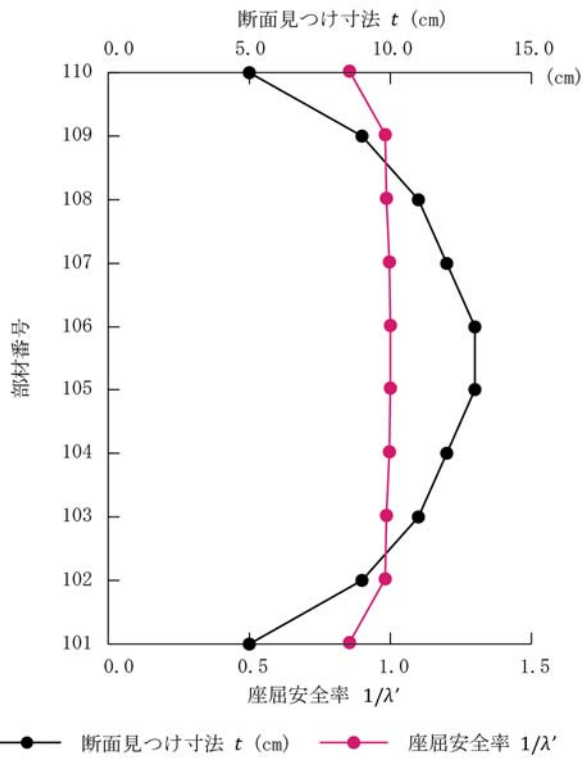


図 4.3.3 column A6 見つけ寸法と座屈安全率

表 4.3.2 column A6 解析結果

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
110	34.083	0.855
109	29.692	0.982
108	29.568	0.986
107	29.244	0.997
106	29.138	1.000
105	29.138	1.000
104	29.244	0.997
103	29.568	0.986
102	29.692	0.982
101	34.083	0.855

全体固有値 $\lambda = 21.724$

部材断面が一定である column A0 では、座屈安全率にばらつきが生じていたのに対して、最適形状とされる column A6 では、おおよそ一律といえる値となった。また、全体の固有値も column A0→A6 で $\lambda = 17.265 \rightarrow \lambda = 21.724$ と 25 % 上昇している。このことから堤^[4]は、ピン柱のモデルでは、形状の最適化を行う際に個材固有値を指標とできると考えている。

しかし、個材固有値のばらつきが小さくなるようにするという目標が分かっているにもかかわらず、具体的にどのような操作をすれば、最適形状を見つけられるのかについては明らかにされていない。

そこで、図 4.3.2 の column A0 の座屈安全率の分布形状と図 4.3.3 の column A6 の見つけ寸法の分布形状が似ていることに注目する。ピン柱では座屈安全率分布の比に体積を分配するという操作が、座屈安全率を一律にするのに有効でないかと考えられる。そこで、座屈安全率に比例して体積を分配すると、見つけ幅は表 4.3.3 のようになり、確かに最適形状の見つけ寸法の値に近いことが分かる。

表 4.3.3 column A0 縮約による個材固有値と見つけ寸法

部材	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	$1/\lambda'$ の比に分配した 見つけ寸法 (cm)	最適形状の 見つけ寸法 t (cm)
110	0.367	4.908	5
109	0.622	8.313	9
108	0.811	10.852	11
107	0.937	12.542	12
106	1.000	13.386	13
105	1.000	13.386	13
104	0.937	12.542	12
103	0.811	10.852	11
102	0.622	8.313	9
101	0.367	4.908	5

一般的には、座屈に対する安全率を一律化させたいのであれば、断面二次モーメントを安全率に比例させるのが有効に思われる。断面二次モーメントで見つけ寸法を決める方法では、個材の座屈安全率のばらつきを小さくできないのか検証してみる。

$b \times t$ の矩形断面では、次式 (4.1.1) で断面二次モーメント I が表される。よって、見つけ寸法 t は安全率の 3 乗根の比に分配すればよい。

$$I = \frac{bt^3}{12} \tag{4.1.1}$$

実際に安全率の3乗根の比に見つけ寸法を分配した column A7 の結果を以下に示す。

表 4.3.4 column A0 縮約による個材固有値と見つけ寸法

部材	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	$\sqrt[3]{1/\lambda'}$ の比に分配した 見つけ寸法 (cm)	実際に採用する 見つけ寸法 t (cm)
110	0.367	7.988	8
109	0.622	9.522	9.5
108	0.811	10.407	10.5
107	0.937	10.921	11
106	1.000	11.161	11
105	1.000	11.161	11
104	0.937	10.921	11
103	0.811	10.407	10.5
102	0.622	9.522	9.5
101	0.367	7.988	8

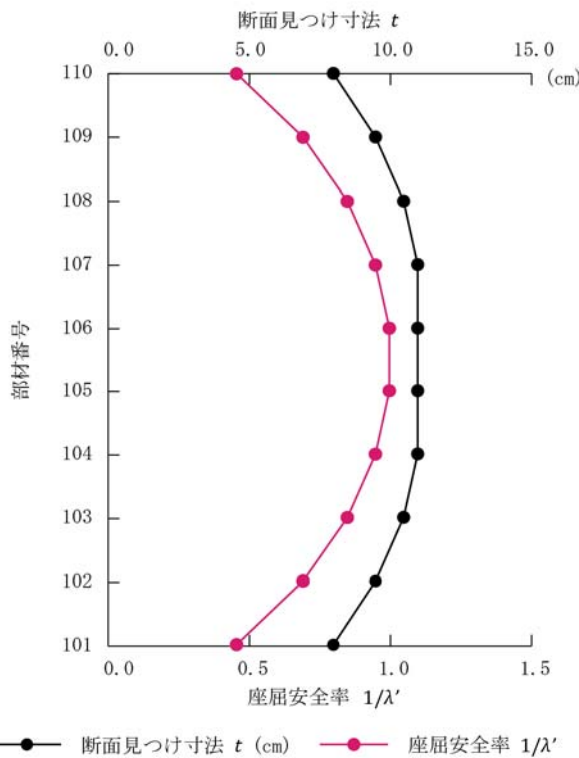


図 4.3.4 column A7 見つけ寸法と座屈安全率

表 4.3.5 column A7 解析結果

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
110	52.488	0.456
109	34.532	0.693
108	28.160	0.850
107	25.198	0.950
106	23.941	1.000
105	23.941	1.000
104	25.198	0.950
103	28.160	0.850
102	34.532	0.693
101	52.488	0.456

全体固有値 $\lambda = 20.859$

個材の座屈安全率のばらつきは、基本モデル column A0 と比較すると軽減されているが、最適形状の column A6 ほどの一律化はされていない。また、全体固有値は column A0→A7 で $\lambda = 17.265 \rightarrow \lambda = 20.859$ と 20% 上昇しているが、column A6 には劣る結果となった。

以上より、両端ピン支持の柱では、個材座屈安全率に比例して体積を分配することで個材固有値を一律化でき、座屈に対する最適形状が得られることが分かった。

4.3.2 両端固定柱の場合の検討

堤^[14]の論文で、浜田ら^[18]による最適形状の考察から、両端固定の柱では個材固有値の一律化による最適化はできないことが述べられているが、両端固定の柱にもこの方法を適用してみる。

基本となるモデルは前節と同じ column B0 とする。前項のように、column B0 で縮約により求める個材固有値から安全率を算出し、個材の体積比がこの安全率の比になるように、体積一定を保ちつつ要素ごとに見つけ寸法 t (cm) を変更して column B6 とする (図 4.3.5, 表 4.3.6 (上下対称なので下半分についてのみ示す))。

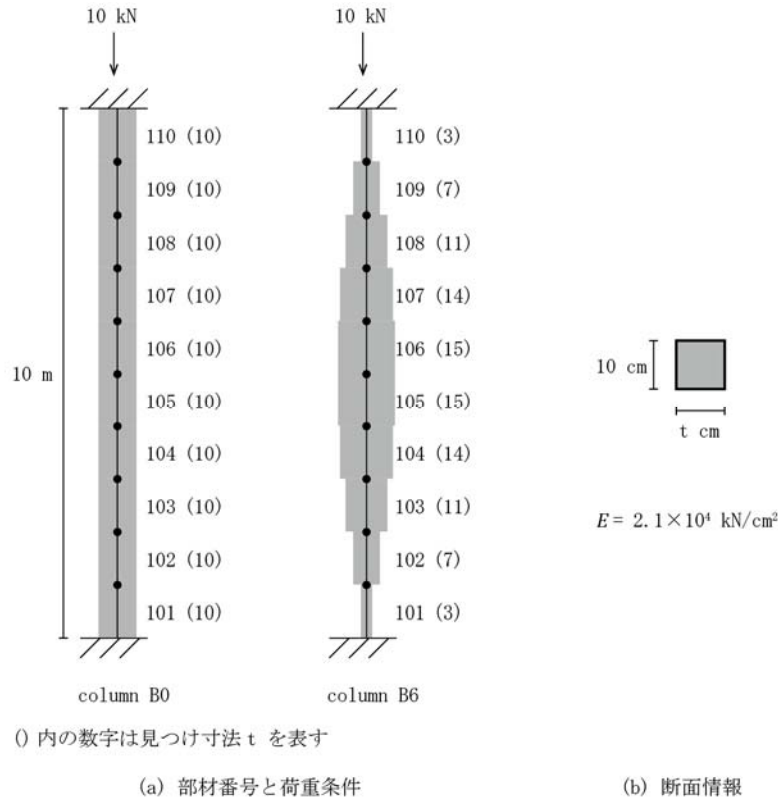


図 4.3.5 column B0, B6 解析モデル

表 4.3.6 column B0 縮約による個材固有値と見つけ寸法

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	$1/\lambda'$ の比に分配した 見つけ寸法 (cm)	実際に採用する 見つけ寸法 t (cm)
105	77.385	1.000	15.381	15
104	85.824	0.902	13.868	14
103	108.095	0.716	11.011	11
102	166.849	0.464	7.134	7
101	456.790	0.170	2.606	3

解析結果を比較すると以下のようなになる。

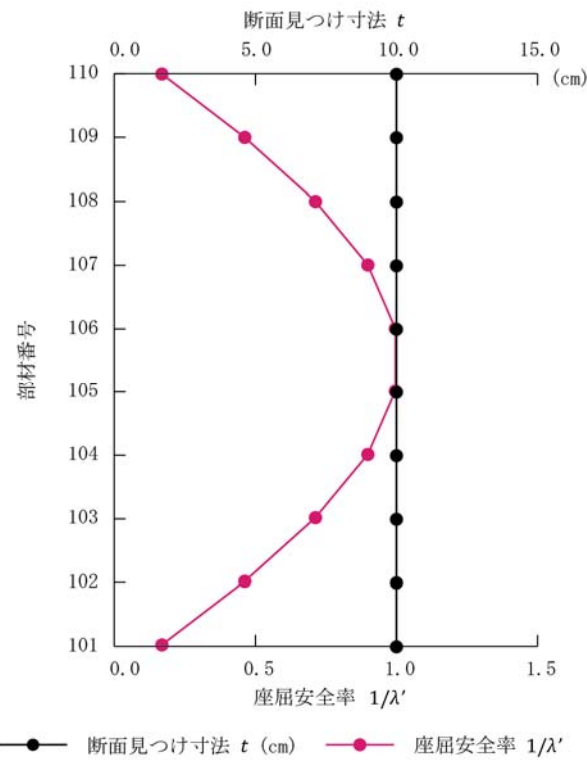


図 4.3.6 column B0 見つけ寸法と座屈安全率

表 4.3.7 column B0 解析結果

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
110	456.790	0.170
109	166.849	0.464
108	108.095	0.716
107	85.824	0.902
106	77.385	1.000
105	77.385	1.000
104	85.824	0.902
103	108.095	0.716
102	166.849	0.464
101	456.790	0.170

全体固有値 $\lambda = 69.074$

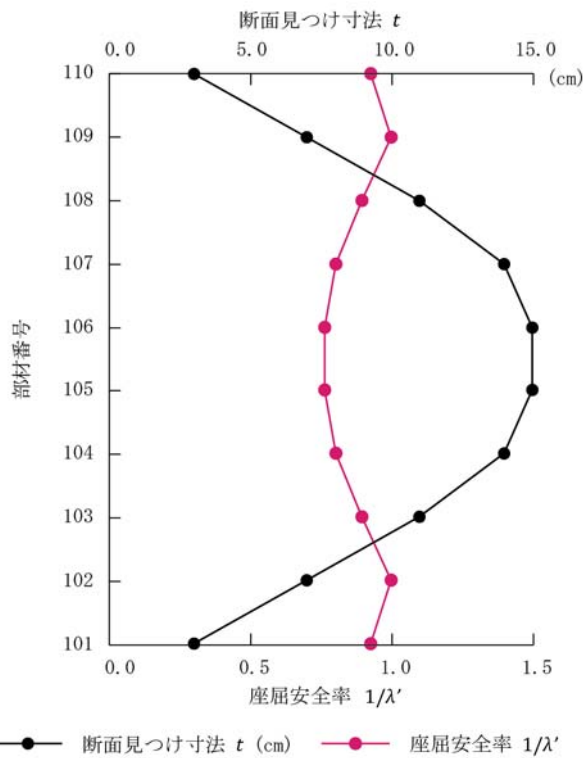


図 4.3.7 column B6 見つけ寸法と座屈安全率

表 4.3.8 column B6 解析結果

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
110	38.188	0.928
109	35.418	1.000
108	39.523	0.897
107	44.054	0.804
106	46.359	0.764
105	46.359	0.764
104	44.054	0.804
103	39.523	0.897
102	35.418	1.000
101	38.188	0.928

全体固有値 $\lambda = 31.650$

両端固定の場合も，座屈安全率を用いて体積を再分配することで，断面操作後のモデルでは座屈安全率のばらつきを小さくできた．しかし，個材固有値は全体的に小さくなっていて，全体固有値も column B0→B1 で $\lambda = 69.074 \rightarrow \lambda = 31.650$ と 54 % 低下している．

以上の要素分割した 1 本柱の例より，座屈安全率の比に体積を分配することで，個材の座屈安全率のばらつきを小さくすることができる可能性があることが分かる．しかし，その結果ピン柱では構造全体系の座屈荷重も上昇したが両端固定の柱では低下した．

そこで，本論文ではこの操作をピン支持の複数の部材で構成されるモデルに適用して座屈についての形状最適化ができないか試してみる．

4.3.3 三角形モデルの場合の検討

両端ピン支持の柱でよい効果がみられたので、将来的にはトラス構造に応用することを目標に、まず三角形のモデルについて考察する。基本モデルは図 4.3.8 (a) 要素分割された両端ピン支持・頂点ピン接合の triangle A0 と図 4.3.9 (a) 両端ピン支持・頂点剛接合の triangle B0 で、すべての部材が 10×10 (cm) の正方形断面で、 $E = 2.1 \times 10^4$ (kN/cm²)、 $I = 833$ (cm⁴)、 $A = 100$ (cm²) とする。(a) のような鉛直荷重をかけた状態で線形座屈解析をすると最小固有値はそれぞれ、 $\lambda = 119.644$ 、 119.648 となり、全体系の座屈モードは (b) である。縮約による個材固有値はそれぞれ表 4.3.9、4.3.10 の通り算出され (左右対称なので左半分についてのみ示す)、それを座屈安全率として基準化して表示すると図 4.3.8、4.3.9 (c) のようになる。1 本柱モデルに比べて、基本モデルの時点で座屈安全率のばらつきは小さい。

個材の体積比がこの安全率の比になるように、体積一定に保ちつつ要素ごとに見つけ寸法 t を変化させて座屈に対する最適化を狙う。

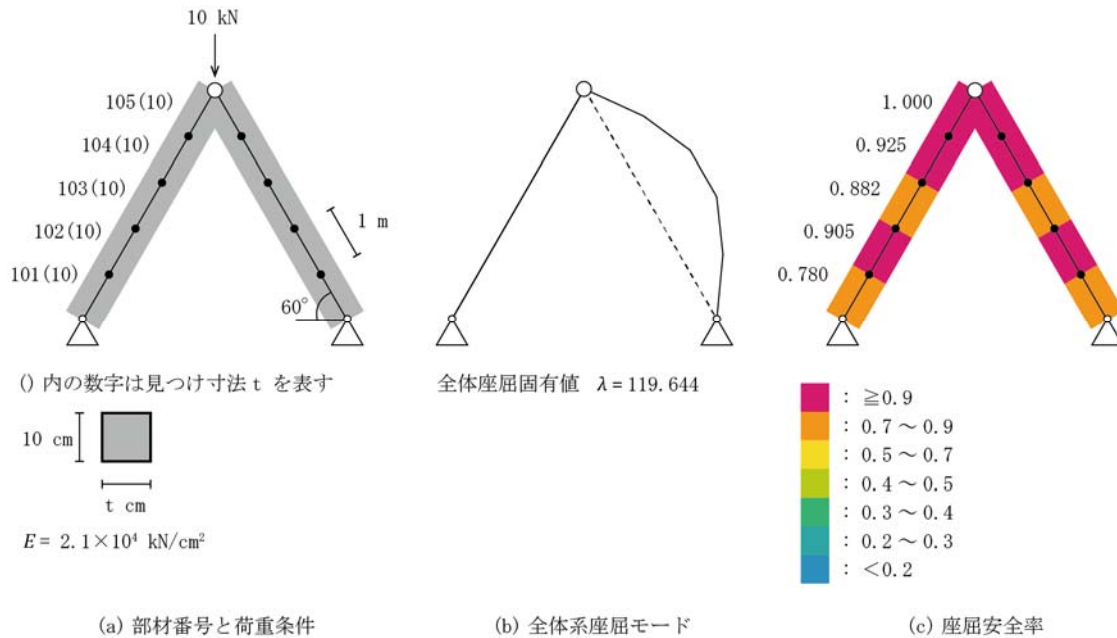


図 4.3.8 triangle A0 解析モデルと解析結果

表 4.3.9 triangle A0 縮約による個材固有値と見つけ寸法

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	$1/\lambda'$ の比に分配した 見つけ寸法 (cm)	実際に採用する 見つけ寸法 t (cm)
105	205.098	1.000	11.141	11
104	221.917	0.925	10.296	10
103	232.761	0.882	9.817	10
102	226.741	0.905	10.077	10
101	263.123	0.780	8.684	9

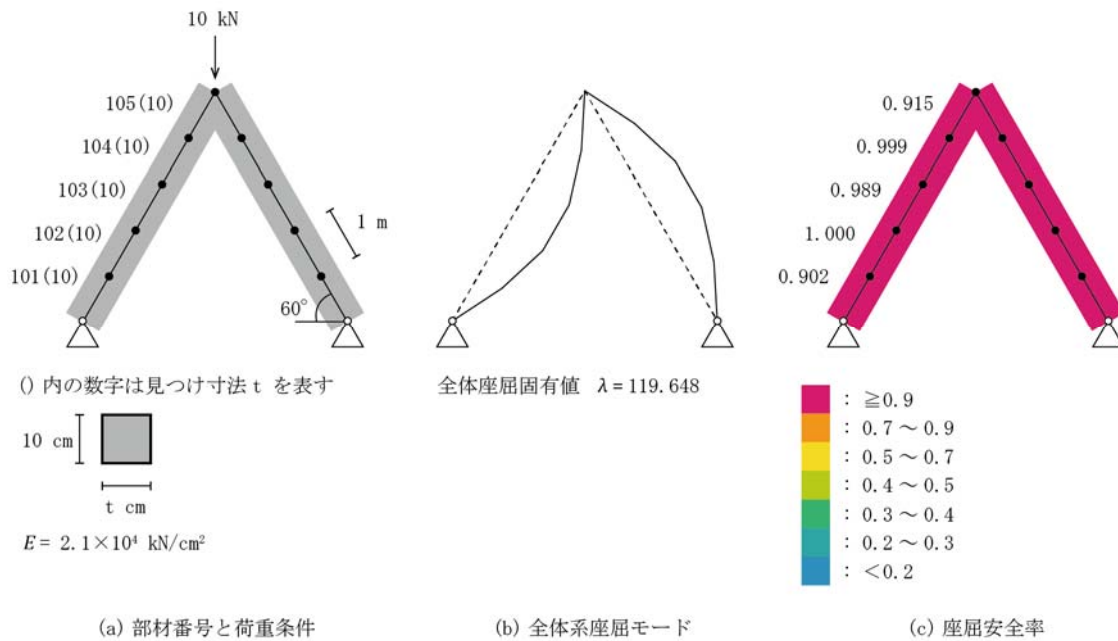


図 4.3.9 triangle B0 解析モデルと解析結果

表 4.3.10 triangle B0 縮約による個材固有値と見つけ寸法

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	$1/\lambda'$ の比に分配した 見つけ寸法 (cm)	実際に採用する 見つけ寸法 t (cm)
105	316.976	0.915	9.522	9
104	290.482	0.999	10.390	11
103	293.218	0.989	10.293	10
102	289.981	1.000	10.408	11
101	321.592	0.902	9.385	9

見つけ寸法を変更したモデルの解析結果をそれぞれ、図 4.3.10, 4.3.11, 表 4.3.11 に示す.

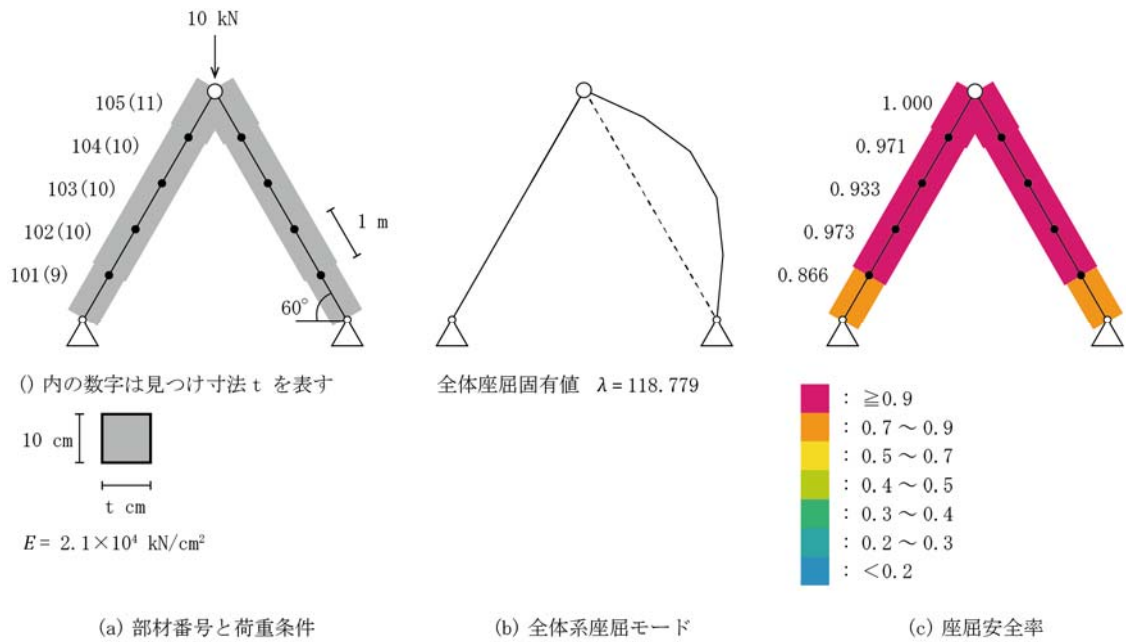


図 4.3.10 triangle A1 解析モデルと解析結果

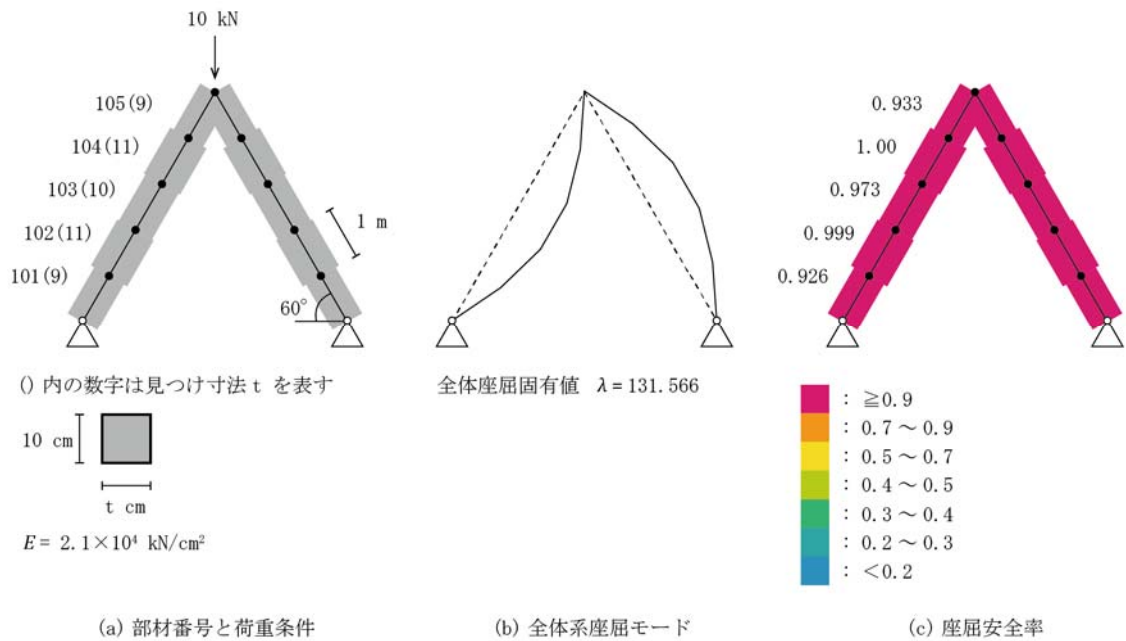


図 4.3.11 triangle B1 解析モデルと解析結果

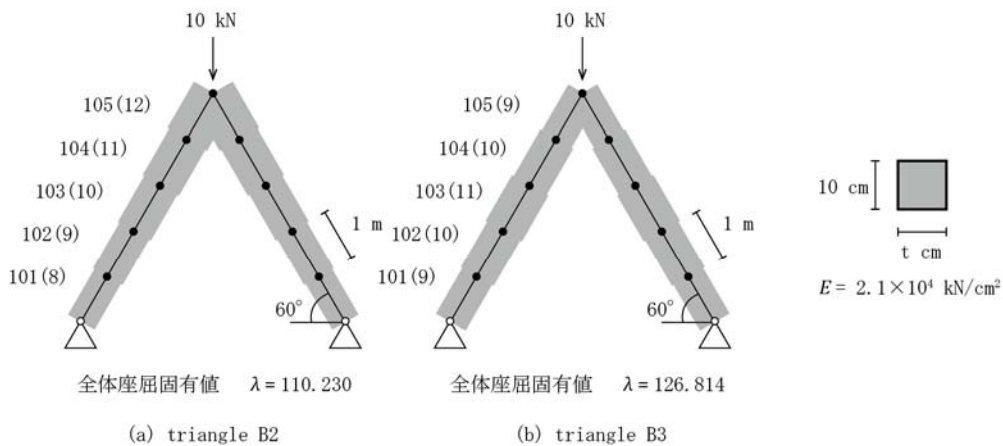
表 4.3.11 triangle A1, B1 縮約による個材固有値と座屈安全率

triangle A1			triangle B1		
部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
105	213.443	1.000	105	328.352	0.933
104	220.002	0.971	104	306.289	1.000
103	228.804	0.933	103	315.031	0.973
102	219.367	0.973	102	306.801	0.999
101	246.506	0.866	101	330.795	0.926

三角形モデルの場合も両モデルで、座屈安全率のばらつきは小さくなっていることが分かる。全体固有値を基本モデルと比較すると、triangle A0→A1 は $\lambda = 119.644 \rightarrow \lambda = 118.779$ と低下している。一方で triangle B0→B1 は $\lambda = 119.648 \rightarrow \lambda = 131.566$ と 10% 増加した。

ピン柱を 2 本接合したような頂点ピン接合の triangle A0 の方が最適化に成功するかと思われたが、結果は剛接合の triangle B0 の方で座屈荷重を上げることに成功した。

triangle B1 の断面分布は予測しづらい形をとっている。そこで、図 4.3.12 (a) ピン柱の最適形状を折り曲げたような断面分布の triangle B2 や、(b) 2 本頂点で接合したような断面分布の triangle B3 でも座屈荷重が上がらないのか比較検証してみる。



() 内の数字は見つけ寸法 t を表す

図 4.3.12 triangle B2, B3 解析モデルと解析結果

全体系の線形座屈解析の結果、全体固有値はそれぞれ $\lambda = 110.230, 126.814$ となった。triangle B2 は低下している。一方 triangle B3 は増加しているが、6% ほどの増加で triangle B1 には劣る。よって、あらゆる断面分布の可能性の中で一番効率がよいとまではまだいえないが、座屈安全率分布を用いて、座屈に対する最適形態の 1 つとして見つけづらい断面分布を検出できたといえる。

4.3.4 部材分割数を変えた場合の検討

次に、堤^[4]の論文で部材の分割数を変えると算出される個材固有値が変化することが指摘されているので、この最適化手法の可能性を、分割数を変えて検証する。

triangle B0 と相似形な基本モデル図 4.3.13 の triangle C0 と図 4.3.14 の triangle D0 を用意する。triangle C0 は一辺 6 要素で 6 (m)、triangle D0 は 10 要素で 10 (m) ある。(c) 座屈安全率分布をみると、両モデルで部材端部の安全率が triangle B0 に比べて小さくなっていて、特に triangle D0 では、頂点に一番近い部材 110 で安全率が 0.5 以下とかなり安全側に評価されている。

今までと同様に、要素ごとに見つけ寸法 t を変化させて座屈に対する最適化を狙う。

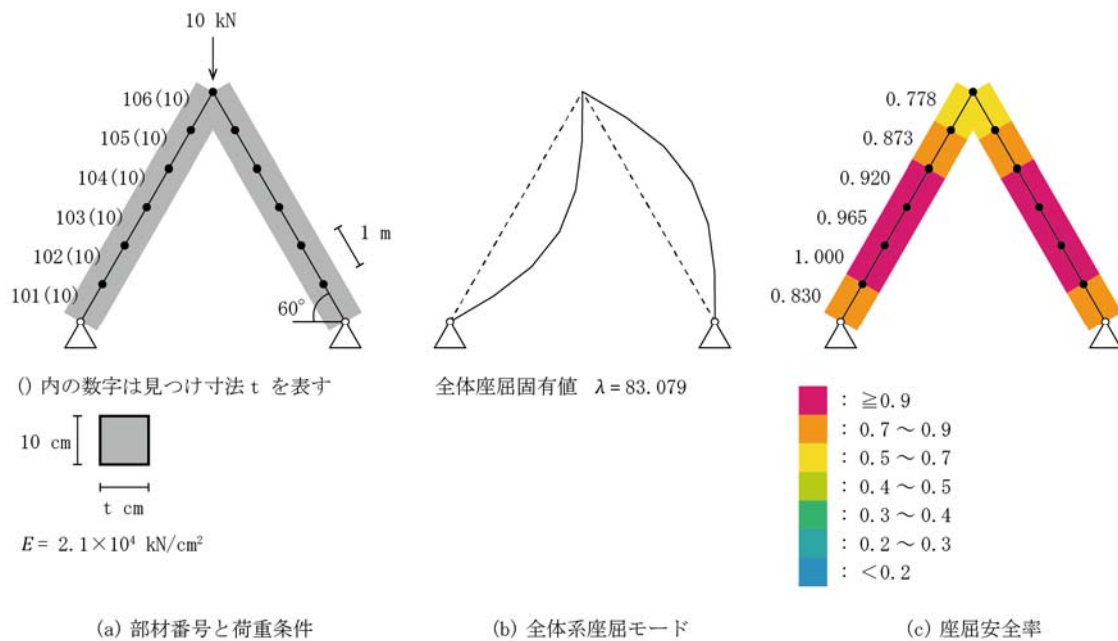


図 4.3.13 triangle C0 解析モデルと解析結果

表 4.3.12 triangle C0 縮約による個材固有値と見つけ寸法

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	$1/\lambda'$ の比に分配した 見つけ寸法 (cm)	実際に採用する 見つけ寸法 t (cm)
106	259.301	0.778	8.696	9
105	230.900	0.873	9.765	10
104	219.176	0.920	10.288	10
103	209.003	0.965	10.789	11
102	201.596	1.000	11.185	11
101	243.117	0.830	9.275	9

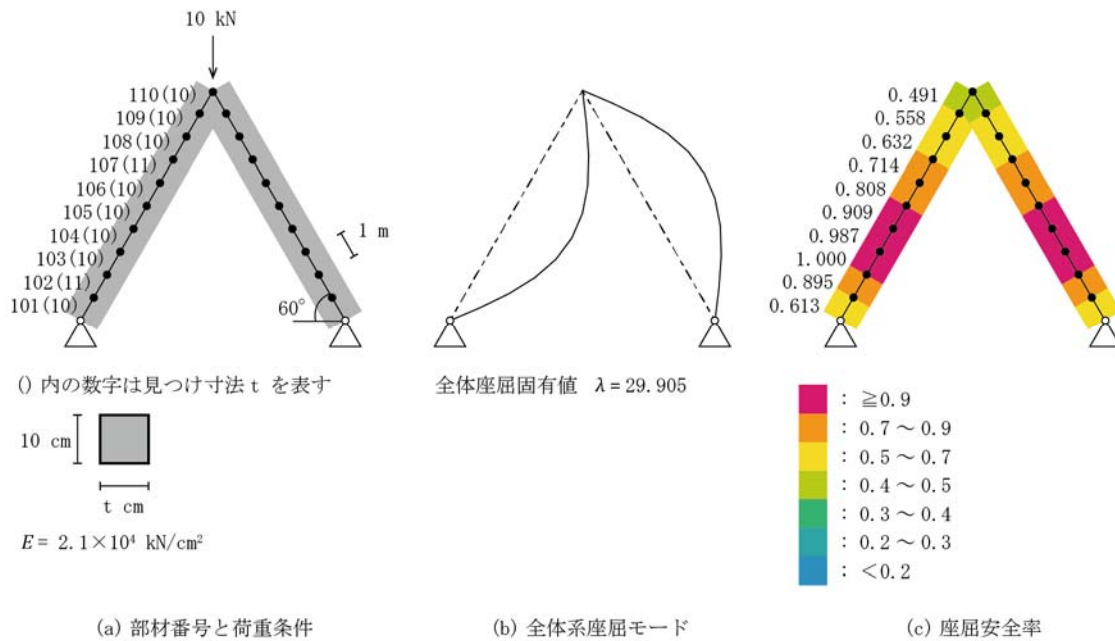


図 4.3.14 triangle D0 解析モデルと解析結果

表 4.3.13 triangle D0 縮約による個材固有値と見つけ寸法

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	$1/\lambda'$ の比に分配した 見つけ寸法 (cm)	実際に採用する 見つけ寸法 t (cm)
110	151.022	0.491	6.447	7
109	132.682	0.558	7.338	7
108	117.250	0.632	8.304	8
107	103.793	0.714	9.380	9
106	91.611	0.808	10.627	11
105	81.484	0.909	11.948	12
104	75.000	0.987	12.981	13
103	74.024	1.000	13.152	13
102	82.726	0.895	11.769	12
101	120.880	0.613	8.054	8

見つけ寸法を変更したモデルの解析結果をそれぞれ，図 4.3.15，4.3.16，表 4.3.14 に示す．操作後の見つけ寸法の傾向は両モデルで変わらない．

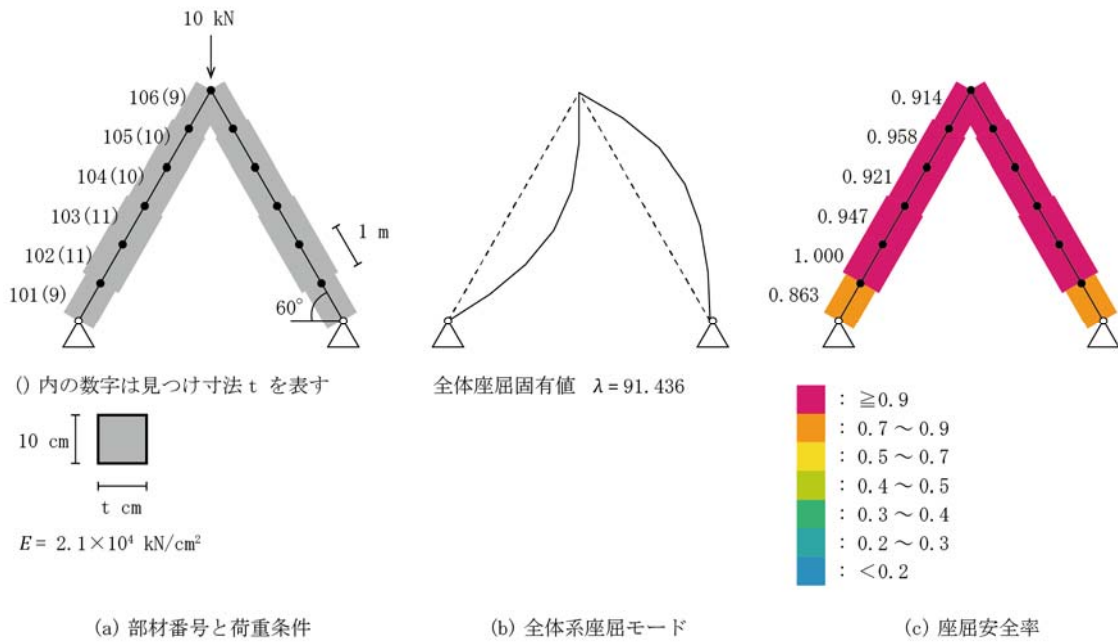


図 4.3.15 triangle C1 解析モデルと解析結果

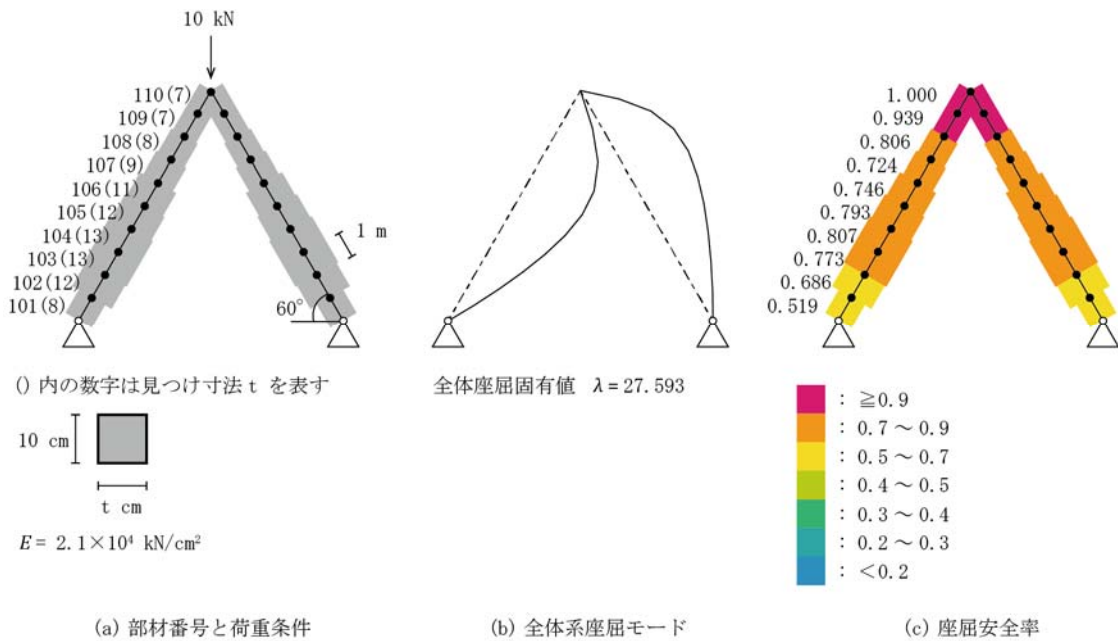


図 4.3.16 triangle D1 解析モデルと解析結果

表 4.3.14 triangle C1, D1 縮約による個材固有値と座屈安全率

triangle C1			triangle D1		
部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
106	249.035	0.914	110	78.880	1.000
105	237.477	0.958	109	84.044	0.939
104	247.068	0.921	108	97.962	0.806
103	240.343	0.947	107	109.059	0.724
102	227.464	1.000	106	105.774	0.746
101	263.696	0.863	105	99.532	0.793
			104	97.822	0.807
			103	102.066	0.773
			102	115.001	0.686
			101	152.145	0.519

まず, triangle C1 についてみると, 座屈安全率のばらつきは triangle C0 に比べて小さくなっていることが分かる. 安全率の最小値は triangle C0→C1 で 0.778→0.863 に増加している. 全体固有値も $\lambda = 83.079 \rightarrow \lambda = 91.436$ と 10.0% 増加しており, 一辺 5 要素の triangle B0 と同等の増加率である.

一方, triangle D1 についてみると, こちらでも座屈安全率のばらつきは小さくなっている. 安全率の最小値は triangle D0→D1 で 0.491→0.519 に増加している. しかし, 全体固有値は $\lambda = 29.905 \rightarrow \lambda = 27.593$ に減少している. この原因は, 座屈安全率の分布が triangle D0→D1 で大きく変わっていることによると考えられる. triangle D0 では, 中央下よりに最も安全率の高い要素があったが, triangle D1 では部材を最も細くした頂点付近の要素で安全率が高くなっている. これによって (c) 座屈モードも, 大きく凸になる点が頂点に寄ってきていることが見て取れる.

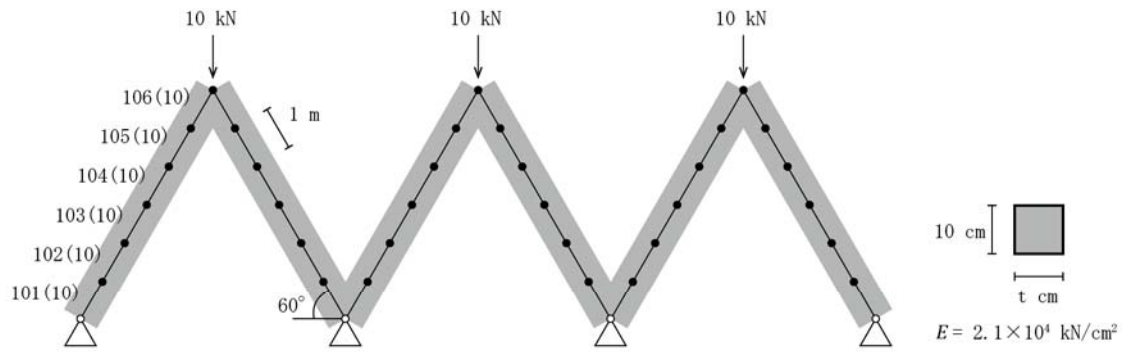
1 部材を細かく要素に分割しすぎると, 個材の長さが部材長に比べて短くなり, 部材端部付近で他の要素と比べて個材固有値が大きく算出される. そのため, 体積再分配後に個材が細くなりすぎてしまうことが分かった. 確かに部材を無限の要素に分割していけば, 端部では分配体積が 0 に近づいていきそうに考えられる.

座屈安全率の比で体積を分配する最適化手法は, 部材の分割要素数に注意して, 1 回の操作で最適化を狙うのであれば操作後の安全率分布や座屈モードが基本モデルから変化しすぎないように注意する必要があることが分かった.

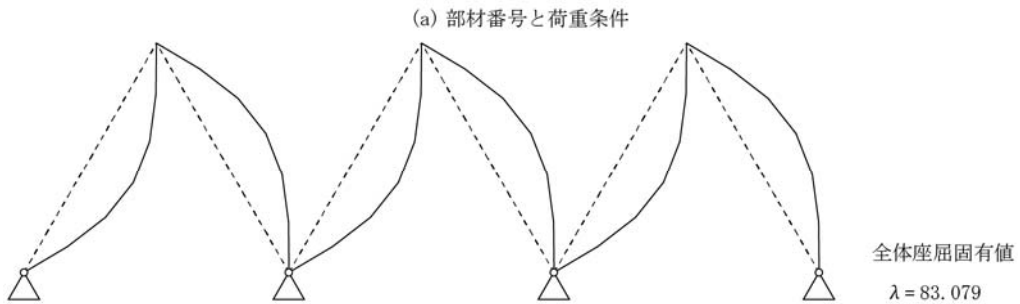
4.3.5 部材の座屈長さが異なる場合の検討

前項で最適化に成功した足元ピン支持で頂点が剛接合の三角形モデルを使って適用できるモデルの種類を増すことを考える。

triangle C0 を単純に横につなげたような図 4.3.17 triangle E0 は図 4.3.18 triangle E1 の分布で同様に最適化できる。



() 内の数字は見つけ寸法 t を表す



(b) 全体系座屈モード

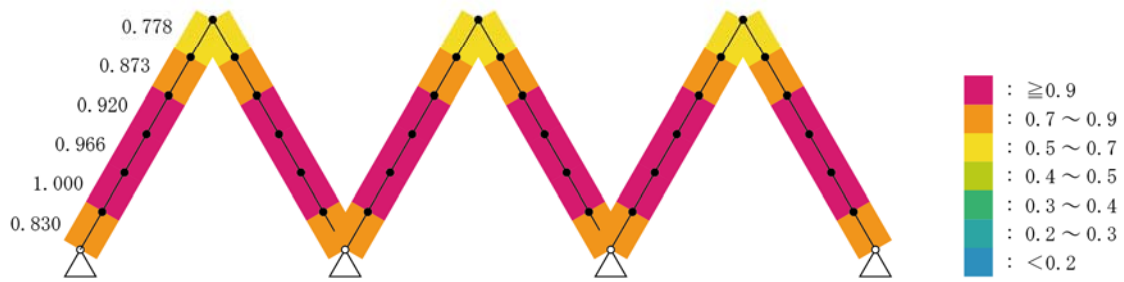
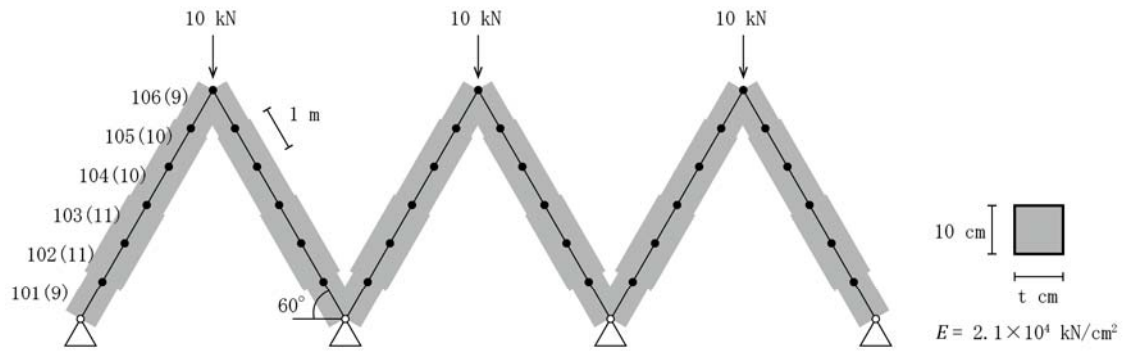


図 4.3.17 triangle E0 解析モデルと解析結果



() 内の数字は見つけ寸法 t を表す

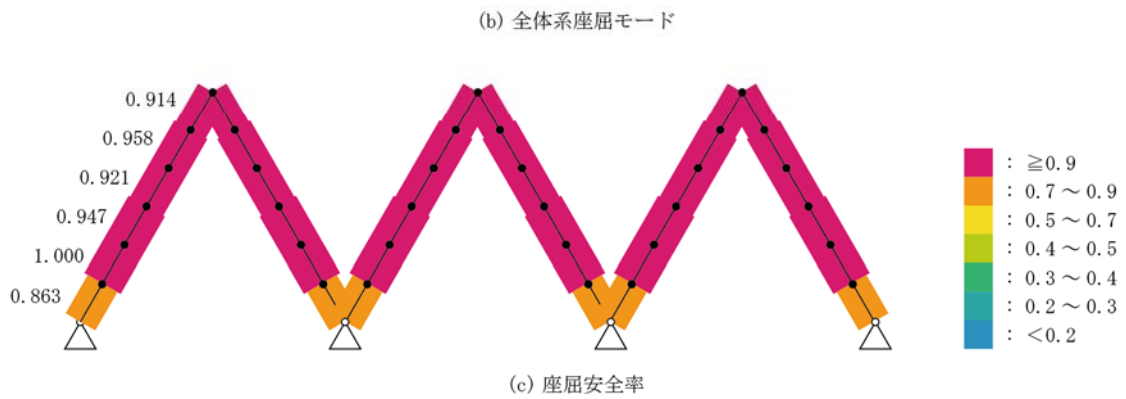
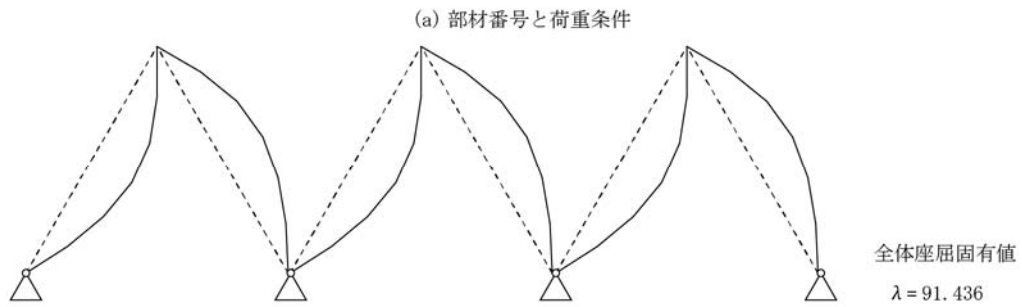
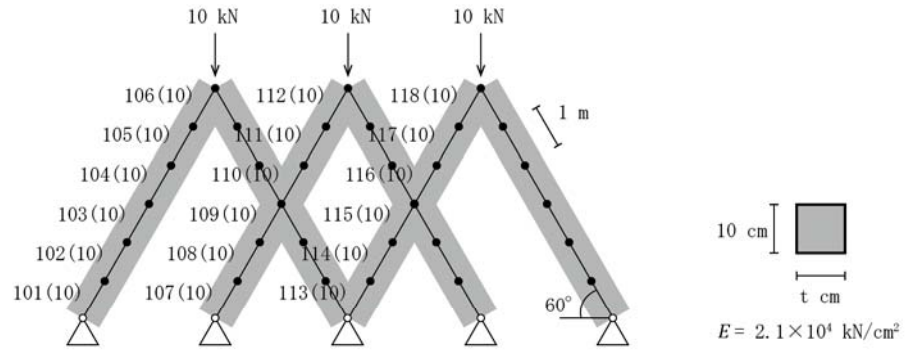


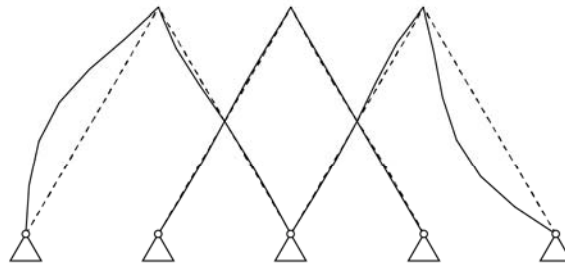
図 4.3.18 triangle E1 解析モデルと解析結果

半分ずつ重ねて横につなげた図 4.3.19 triangle F0 についても同様の操作で最適化してみる。
 このモデルでは (c) 座屈モードから分かるように、両端と中央で座屈長さが異なる。全体座屈は
 外側の部材の変形による影響が大きい。



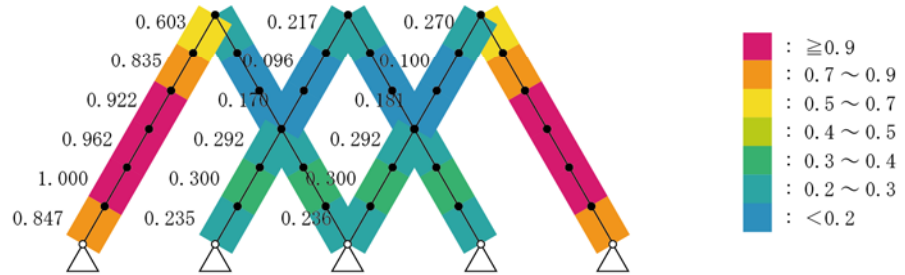
() 内の数字は見つけ寸法 t を表す

(a) 部材番号と荷重条件



全体座屈固有値
 $\lambda = 132.667$

(b) 全体系座屈モード



(c) 座屈安全率

図 4.3.19 triangle F0 解析モデルと解析結果

表 4.3.15 triangle FO 縮約による個材固有値と見つけ寸法

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	$1/\lambda'$ の比に分配した 見つけ寸法 (cm)	実際に採用する 見つけ寸法 t (cm)
118	839.982	0.270	6.189	6
117	2282.696	0.100	2.277	2
116	1254.747	0.181	4.143	4
115	777.268	0.292	6.688	7
114	756.406	0.300	6.873	7
113	964.526	0.236	5.390	5
112	1049.024	0.217	4.956	5
111	2383.362	0.096	2.181	2
110	1334.528	0.170	3.895	4
109	777.895	0.292	6.683	7
108	757.095	0.300	6.866	7
107	965.420	0.235	5.385	5
106	376.342	0.603	13.813	14
105	271.637	0.835	19.138	19
104	246.081	0.922	21.125	21
103	235.753	0.962	22.051	22
102	226.743	1.000	22.927	23
101	267.700	0.847	19.419	20

見つけ寸法を変更したモデル triangle F1 の解析結果を図 4.3.20, 表 4.3.16 に示す。

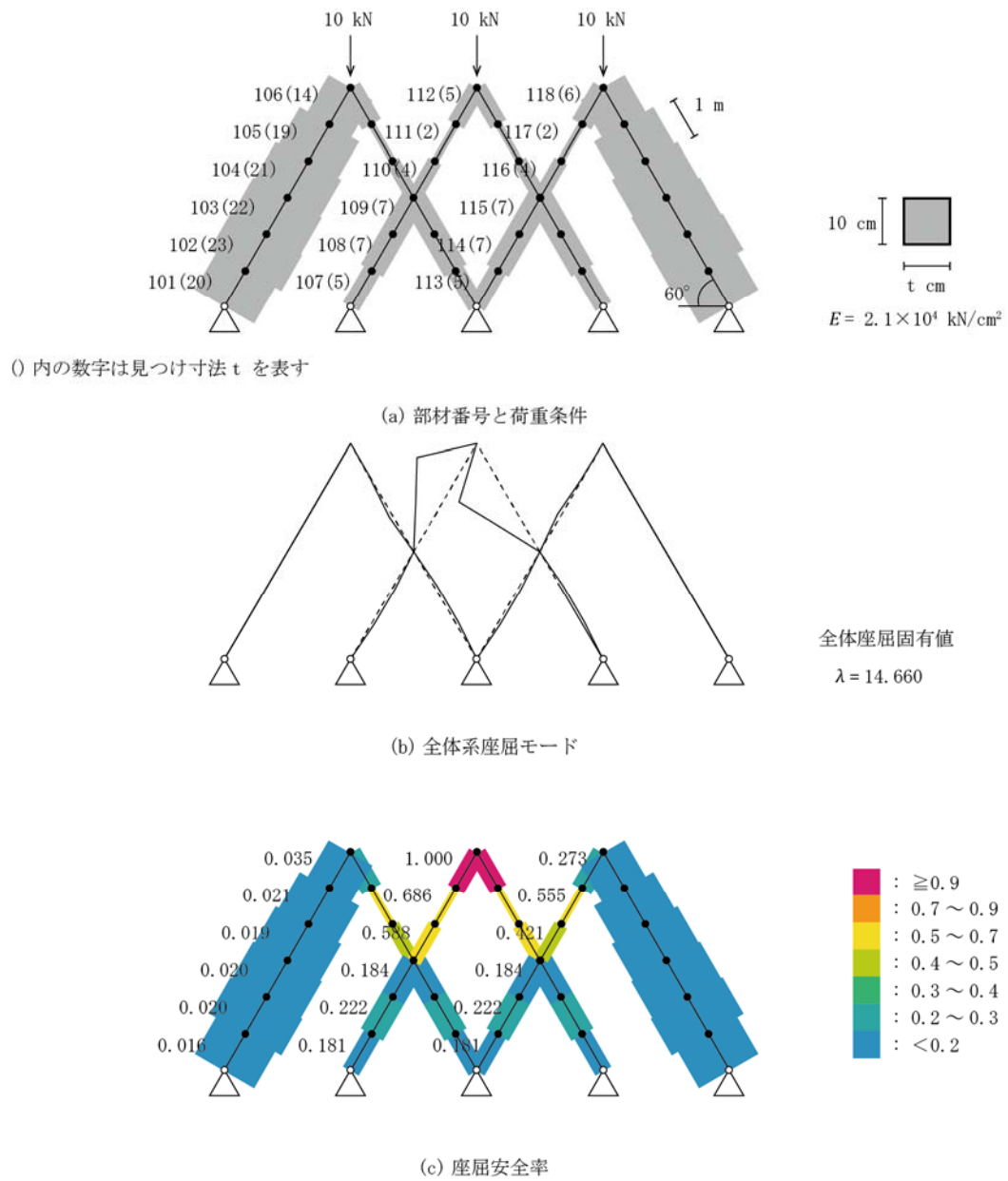


図 4.3.20 triangle F1 解析モデルと解析結果

表 4.3.16 triangle F1 縮約による個材固有値と座屈安全率

triangle F1			triangle F1		
部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
112	31.466	1.000	118	115.656	0.273
111	45.905	0.686	117	56.716	0.555
110	53.522	0.588	116	74.858	0.421
109	171.378	0.184	115	171.309	0.184
108	142.095	0.222	114	142.023	0.222
107	174.460	0.181	113	174.368	0.181
106	916.050	0.035			
105	1526.071	0.021			
104	1674.542	0.019			
103	1594.259	0.020			
102	1589.227	0.020			
101	2033.188	0.016			

今回の断面操作では、座屈安全率を一律にすることはできず、中央の頂点付近のみが集中的に安全率が高い結果となった。このことは、triangle F0→F1 で座屈モードも変化したことが一因として考えられる。全体固有値も $\lambda = 132.667 \rightarrow \lambda = 14.660$ とかなり低下している。

このように、座屈長さが異なる部材からなり、一部の座屈が全体系の座屈に支配的なモデルでは、基本モデルで座屈長さが長い部材の安全率が高くてすぎてしまうため体積分配に偏りがでてしまい、座屈最適化できないことが分かった。

4.3.6 斜め格子壁の最適化

現況では、端部はピン支持、中間部は剛接合、部材の座屈長さは同程度の場合に安全率の比に体積を分配するという操作でよい効果がみられたことから、最後に斜め格子壁の最適化を試してみる。ここでは1部材1要素とする。面外の変形は拘束している。

基本モデルは図 4.3.21 の wall A0 とする。今までと同様の操作で最適化してみる。

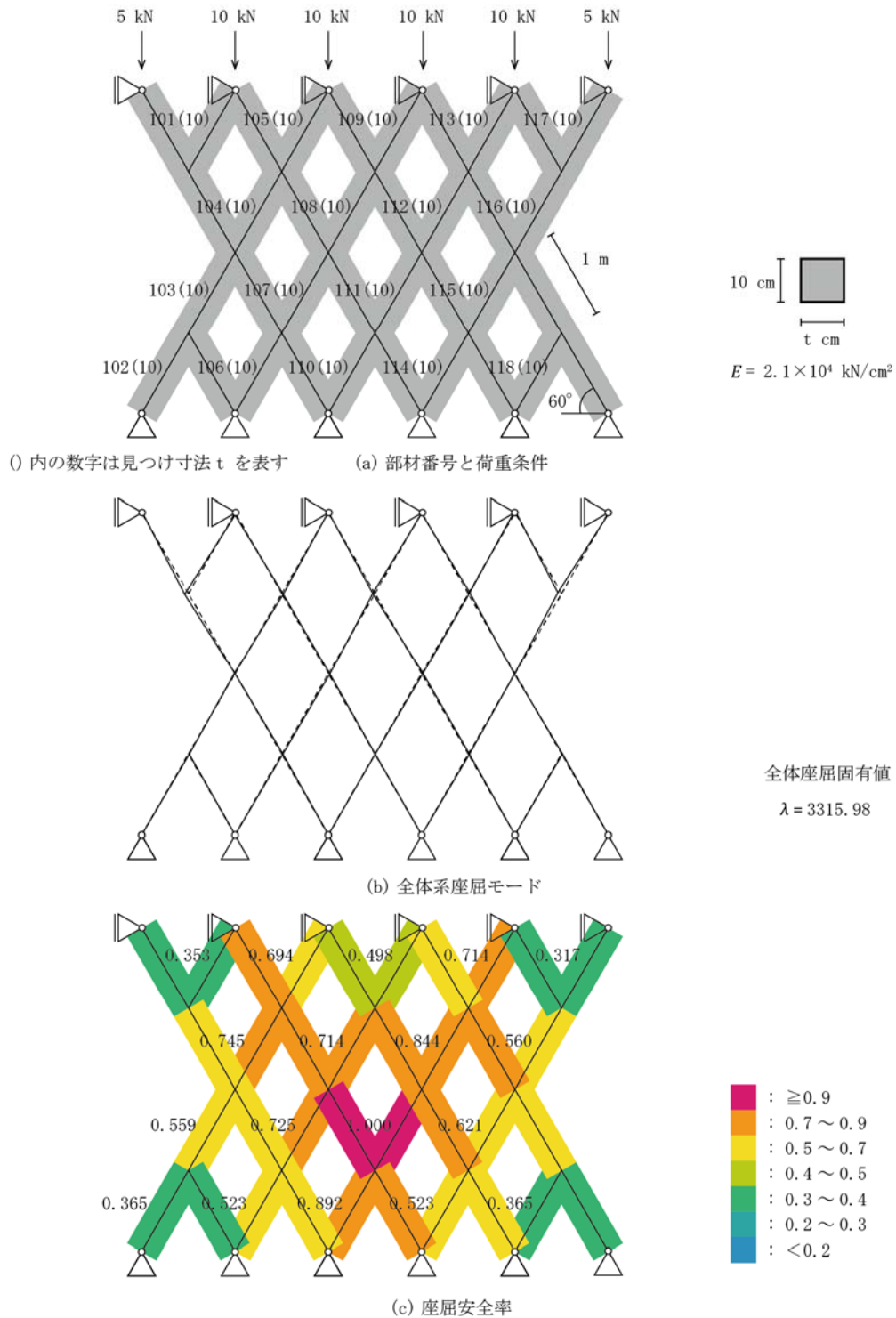


図 4.3.21 wall A0 解析モデルと解析結果

表 4.3.17 wall A0 縮約による個材固有値と見つけ寸法

部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	$1/\lambda'$ の比に分配した 見つけ寸法 (cm)	実際に採用する 見つけ寸法 t (cm)
118	11053.855	0.365	5.927	6
117	10874.914	0.371	6.025	6
116	7196.946	0.560	9.103	9
115	6481.620	0.621	10.108	10
114	7705.392	0.523	8.503	8
113	5638.740	0.714	11.619	12
112	4770.436	0.844	13.734	14
111	4024.314	1.000	16.280	16
110	4514.514	0.892	14.513	15
109	8090.177	0.498	8.098	8
108	5637.423	0.714	11.622	12
107	5556.430	0.725	11.791	12
106	7705.392	0.523	8.503	8
105	5803.429	0.694	11.289	11
104	5402.527	0.745	12.127	12
103	7208.631	0.559	9.089	9
102	11053.855	0.365	5.927	6
101	11411.309	0.353	5.741	6

見つけ寸法を変更したモデル wall A1 の解析結果を図 4.3.22, 4.3.18 に示す.

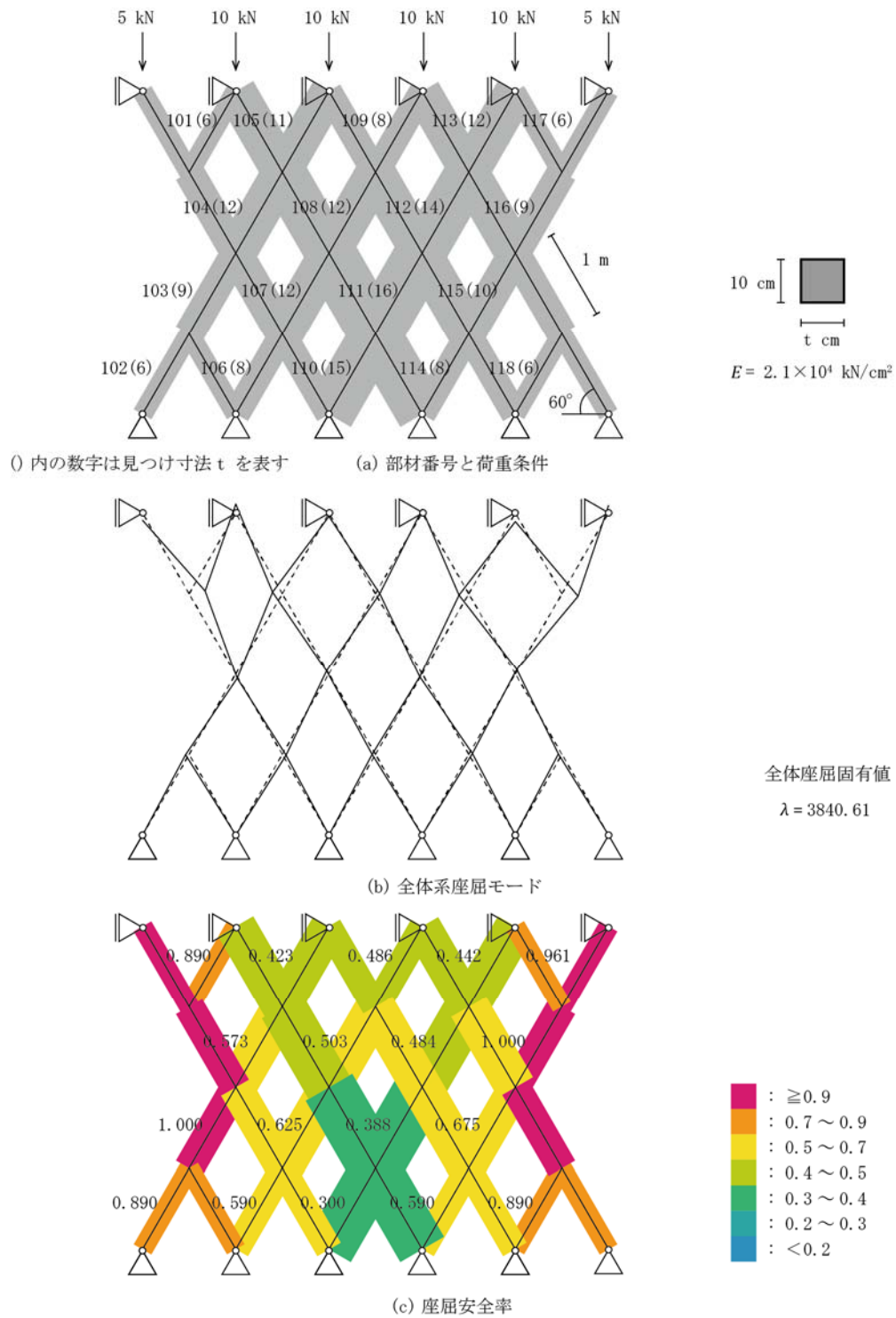


図 4.3.22 wall A1 解析モデルと解析結果

表 4.3.18 wall A1 縮約による個材固有値と座屈安全率

wall A1			wall A1		
部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)	部材	個材固有値 λ'	座屈安全率 $1/\lambda'$ (基準化)
109	9256.248	0.486	118	5054.705	0.890
108	8949.376	0.503	117	4680.896	0.961
107	7194.117	0.625	116	4495.300	1.000
106	7623.193	0.590	115	6664.335	0.675
105	10644.327	0.423	114	7623.193	0.590
104	7854.204	0.573	113	10186.585	0.442
103	4495.973	1.000	112	9303.139	0.484
102	5054.705	0.890	111	11601.081	0.388
101	5053.882	0.890	110	15014.117	0.300

操作後の wall A1 の座屈安全率分布傾向は基本モデル wall A0 から変わっている。安全率最小値は wall A0→A1 で 0.353→0.300 と減少していて一律化できたとはいいがたい。しかし、安全率の平均値は 0.614→0.650 と増加していて、全体固有値も $\lambda = 3315.98 \rightarrow \lambda = 3840.61$ と 15.8% 増加している。

縮約によって求まる個材固有値をもとにした座屈安全率の比に体積を分配するという手法で、1つの座屈最適形状を見つけられたといえる。

4.4 今後の最適化手法についての検討事項

本論文では、ピン支持・剛接合・座屈長さ同程度という条件であれば均一断面の基本モデルから個材固有値による座屈安全率 $1/\lambda'$ の比に部材体積を分配することが、構造全体系の座屈荷重を上昇させることに有効であることを示した。今後座屈安全率による形状最適化を目指すには、この手法で求まる断面分布が最適かどうかを他のあらゆる断面パターンと比較することで確かめる必要がある。しかし、複雑な架構形状を扱うときに座屈に対して強くするための1つの手法としては既に有効であるといえる。

また、この手法に座屈モードの考察を合わせることで、適用対象が広がる可能性があると考えられる。個材自体の変形による影響が大きい座屈モードの個材固有値による安全率分布の比に部材体積を分配することで、固定端や座屈長さの異なる場合の架構にも拡張できるのではないかと。

しかしその場合、高次の座屈モードまで考慮するという事は、高次固有値法^{[6] [9] [11]}と同じように、個材自体の変形が支配的な座屈モードがどれかを判別する方法が課題となる。

5. 結論と今後の課題

本論文では、架構中の個材座屈荷重を適切に算出するために提案された構造全体系の座屈固有値問題の縮約によって求まる個材の座屈荷重の妥当性を検証すること、またこのとき算出される個材固有値をもとにした形状最適化手法を提案することを目的としていた。

3章では、既存の座屈設計法と比較しながら縮約によって検出される個材座屈荷重の妥当性を、1層門型ラーメンの実験と解析を通して検証した。

架構を構成する個材の座屈を直接観測するのは困難なので、実験から求まるラーメン構造全体系の終局強度から各柱の最大耐力を逆算し、これと解析による個材座屈荷重を式中含む $M-N$ 相関曲線とを比べることで、個材座屈荷重の妥当性を評価するという手法をとった。

結果、実験を行った範囲では縮約による個材座屈荷重から導いた $M-N$ 相関曲線は実験結果に比べて安全側であり、なおかつ既存の座屈設計法に比べて精度よく評価できていることが示された。

ただし、今回は実験設備の制約などから $M-N$ 相関曲線のある程度 M の大きい範囲の実験しかできなかったため、今後検証範囲を広げる必要がある。また、材料非線形と幾何学的非線形を考慮した FEM 等でも同じ手法で検証できるので、任意の座屈荷重から引かれる $M-N$ 相関曲線を部材ごとに設定し解析できるような環境を開発することも、検証を進めるために有効であると考えられる。

4章では、既知の座屈に対する最適形状^[18]とそのときの個材の座屈安全率分布を考察することで、縮約による個材固有値をもとにした最適化手法の可能性を探った。

様々なモデルを用いた検討から、2次元解析でピン支持・剛接合・座屈長さ同程度という条件を満たす場合、体積一定を保ちつつ基本となるモデルの座屈安全率の比に部材幅を分配することで、座屈安全率を一律化でき、全体系の座屈荷重を上昇させることができることを示した。

また、既往研究^{[12]~[15]}で考察されてこなかった縮約による個材の座屈モードの描画をしてみた。個材の座屈モードには、個材自体の変形による影響が大きいものと個材端部の拘束度のゆるさによる影響が大きいものがあることが分かった。

今後、最適化手法の適用範囲をさらに広げるためには、縮約による個材の高次座屈モードに関する考察を組み込むことが考えられる。例えば、個材自体の変形が大きい座屈モードの個材固有値から座屈安全率を求め、その比に部材幅を分配することで、座屈長さの異なる部材から構成される架構に拡張できる余地がある。

参考文献

- [1]日本建築学会, 鋼構造設計規準—許容応力度設計法—, 2005
- [2]日本建築学会, 鋼構造座屈設計指針, 2009
- [3]日本建築学会, 鋼構造塑性設計指針, 2017
- [4]三谷勲・片平崇・大谷恭弘・林原光司郎, 長柱が混在する純ラーメンの座屈荷重, 日本建築学会構造系論文集, 第 557 号, pp.161-166, 2002.7
- [5]土木学会鋼構造委員会座屈設計ガイドライン改訂小委員会, 鋼構造シリーズ 12 座屈設計ガイドライン 改訂第 2 版, 2005
- [6]野上邦栄・山本一之, 構造全体系の固有値解析による骨組部材の合理的な有効座屈長の評価, 土木学会論文集, No.489/I-27, pp.157-166, 1994.4
- [7]井上一朗・多田元英, 鋼柱の座屈長さに関する一考察, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 第 47 号・構造系, pp.193-196, 2007.6
- [8]高田明伸・多田元英・向出静司, 水平荷重による柱軸力を受ける鋼構造ラーメン骨組中の柱の座屈長さについての考察, 日本建築学会構造系論文集, 第 78 巻, 第 693 号, 1969-1978, 2013.11
- [9]尾下里治・吉田昭仁, 高次の座屈固有値を用いた有効座屈長の決定方法の提案, 土木学会第 47 回年次学術講演会, pp.248~249, 1992.9
- [10]荒木慶一・高木次郎・上谷宏二, 線形座屈解析を用いた鋼構造平面骨組の座屈設計 その 1 基本的枠組と純ラーメン骨組への適用, 日本建築学会構造系論文集, 第 586 号, pp.211-218, 2004.12
- [11]野上邦栄・高瀬弘・山本一之, 微小軸圧縮力を受ける骨組部材の有効座屈長に関する一考察, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第 16 巻, pp.385~390, 1992.7
- [12]鈴木宏之 他, 骨組モデルを用いた座屈固有値問題の縮約, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 2013.8
- [13]朝原真知子 他, 座屈固有値問題の縮約を用いた個材座屈荷重の検出法, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 2017.8
- [14]堤千春, 弾性剛性と幾何剛性を用いた座屈固有値問題の縮約による個材座屈荷重の検出法とその最適化, 東京大学大学院新緑域創成化学研究科社会文化環境学専攻, 2017 年度修士論文
- [15]高岡俊一郎 他, 弾性剛性と幾何剛性を用いた座屈固有値問題の縮約による個材座屈荷重の検出法 その 1:縮約方法の提案と縮約された剛性マトリクスの具象化, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 2018.8
- [16]I. Tadjbakhsh and J. B. Keller, Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech, Vol.29, pp.159-164, 1962
- [17]甘利昌彦・山川宏・奥村敦史, 弾性座屈を考慮した骨組構造物の最適設計, 日本機械学会論文集, 44 巻 383 号, pp.2253-2262, 1978
- [18]浜田実・瀬口靖幸・多田幸生, 逆変分原理による構造物の形状決定問題:第 2 報, 座屈問題と振動問題, 日本機械学会論文集 A 編, 46 巻 402 号, pp.187-196, 1980

謝辞

本研究に取り組むにあたって多くの方々にお世話になり、こうして修士論文にまとめることができました。ご指導、ご鞭撻して下さった皆様に感謝の意を表し、謝辞にかえさせていただきます。

指導教員である東京大学准教授 佐藤淳先生には、お忙しい中でも時間をとってご指導していただきました。研究が思うように進められなかったときも、相談に応じて下さったうえに激励していただき、大変嬉しく思いました。心より感謝申し上げます。また研究以外にも、卒論生として佐藤研究室に所属してから様々な活動を通してたくさんのことを学ばせていただきました。今後も、どうぞよろしくお願いたします。

東京大学准教授 佐久間哲哉先生には、副指導としてご指導いただきました。拙い説明にも関わらず、適切な助言をして下さったことに大変感謝いたします。

また、東京大学准教授 清家剛先生、同准教授 藤田香織先生、同准教授 権藤智之先生には、構法系研究室会議にて、研究内容から発表方法まで貴重なご意見をいただきました。深く感謝申し上げます。

佐藤研究室の古市渉平さんには、日ごろから研究の進み具合を気にかけていただき、私の疑問にもいつも丁寧に答えて下さいました。西村祐哉さんには、本論文や梗概を細かく校正していただきました。またケンさんは、実験に毎回協力して下さいました。ここに感謝の意を表します。

佐藤淳構造設計事務所の荒木美香さんには、研究室に所属した当初から研究内容だけでなく、解析ソフトの使い方や実験方法等について多くのご助言をいただきました。また、本研究テーマを遂行していた佐藤研究室の卒業生 堤千春さんは、たくさんの考察とデータを分かりやすく残して下さいました。修士論文を執筆する際に、参考になるだけでなく励みにもなりました。大変感謝いたします。

佐藤研究室で同期の河村京介くんには、様々な場面で助けていただきました。また、河村くんに加えて、元々同期の大霜潤也くん、小島慎平くんには多くの刺激をもらい、精神的にも支えられました。ありがとうございました。

そして、佐藤研究室の院生、学部生には実験やゼミで多大なご協力をいただきました。一日中地下の実験室や、314号室で共に多くのミッションに取り組んだことは研究室生活の思い出です。

最後に、ここにお名前を記した方以外にも、暖かいご助言やご協力をいただいた皆様に心から感謝の気持ちと御礼を申し上げます。

2019年1月21日

朝原 真知子