

非線形緩勾配方程式に基づく屈折・回折・碎波変形
モデルの開発

有川 太郎



①

非線形緩勾配方程式に基づく屈折・回折・碎波変形モデルの開発

有川太郎

目次

Chapter1. 緒論	1
1.1 海岸環境と海岸工学	1
1.1.1 海岸と波浪	1
1.1.2 波動方程式と碎波	2
1.2 本研究の構成	4
Chapter2. 基礎方程式	5
2.1 波動方程式	5
2.1.1 Boussinesq 方程式の導出 [Nwogu(1993)]	6
2.1.2 非線形緩勾配方程式	7
2.2 鉛直分布関数の概念	8
2.3 基礎方程式の導出	9
2.3.1 変分原理を用いた導出方法	9
2.3.2 鉛直分布関数系による基礎方程式の違い	9
2.3.3 係数の定義	14
2.3.4 鉛直分布関数の選択	15
Chapter3. 平面における数値計算の方法	19
3.1 計算方法	19
3.1.1 基礎方程式の変形	19
3.1.2 離散化	20
3.1.3 既知数の取り扱い	21
3.2 矩形水路における計算精度の検証	22
3.2.1 概要	22
3.2.2 境界条件の離散化の注意点	23
3.2.3 計算結果	24
3.3 斜め入射波の計算精度の確認	26
3.3.1 斜め入射波における入射境界条件	26
3.3.2 45度の斜め波の入射	39
Chapter4. 周期波の Mach 反射と Stem 波	41
4.1 概要	41
4.2 基礎方程式および境界条件	41
4.2.1 基礎方程式	41
4.2.2 境界条件および計算領域	41
4.3 エネルギーの保存について	42
4.3.1 エネルギーの保存式	42

4.3.2	計算条件	44
4.4	Mach 反射・Stem 波の計算	48
4.4.1	計算領域	48
4.4.2	線形条件での入・反射波浪場の比較	48
4.4.3	非線形条件での入・反射波浪場の比較	49
Chapter 5.	任意反射率を持つ構造物周りの波浪場の計算	53
5.1	任意の反射率を持つ境界の取り扱い	53
5.1.1	概念	53
5.1.2	計算方法	54
5.1.3	推定結果および考察	54
5.2	任意の反射率を持つ構造物周辺の波浪場	57
5.2.1	計算条件	57
5.2.2	結果および考察	58
Chapter 6.	砕波減衰項の提案	61
6.1	砕波減衰項の導出	61
6.2	拡散係数 ν_f のモデル化	62
6.2.1	エネルギー逸散と拡散係数	62
6.2.2	逸散エネルギーの取支式	63
6.2.3	生成項について	64
6.2.4	砕波判定条件	65
6.2.5	各種パラメタ	65
6.3	実験との比較	65
6.3.1	数値計算方法	65
6.3.2	一様勾配斜面	66
6.3.3	バー型地形	66
Chapter 7.	断面汀線計算モデル	71
7.1	汀線境界の取り扱い	71
7.1.1	鉛直分布関数	71
7.1.2	先端における物理的な境界条件	71
7.1.3	数値計算における取り扱い	72
7.2	非砕波条件での解析解との比較	77
7.2.1	解析解	77
7.2.2	計算条件および結果の比較	77
7.3	砕波する条件での実験値との比較	78
7.3.1	計算条件	78
7.3.2	減衰係数 f_D のパラメタ	78
7.3.3	計算結果	78
Chapter 8.	平均水位問題の提示	83
8.1	概要および基礎方程式	83
8.1.1	概要	83
8.1.2	基礎方程式および計算条件	83

8.2	保存量の検討	83
8.2.1	エネルギー保存	83
8.2.2	運動量保存に関する基礎的知識	85
8.2.3	運動量に関する数値的な考察	90
8.3	既知級数 1 項での検討	91
8.3.1	時々刻々の基礎方程式の満足度の検討	91
8.3.2	水深積分および時間平均における検討	98
8.3.3	平均水位の生じない理由	100
8.4	摩擦項を加えることによる修正	101
8.4.1	摩擦項の導入	101
8.4.2	各減衰項の係数	103
8.4.3	計算結果	103
Chapter 9.	結論	107
Reference		109
付録 A	非線形緩勾配方程式の導出課程	113
A.1	式 (2.39) について	113
A.2	式 (2.40) について	114

目次

2.1 速度ポテンシャルの級数近似の概念図	8
3.1 計算の流れの模式図	21
3.2 計算の流れの概念図	22
3.3 断面図	22
3.4 線境界入射法	24
3.5 ST3 における実験値との比較	25
3.6 ST5 における実験値との比較	25
3.7 斜め入射境界の取り扱い (A)	27
3.8 境界の詳細図 A-1	28
3.9 斜め入射境界の取り扱い (B)	29
3.10 境界の詳細図 B-1	30
3.11 境界の詳細図 B-2	31
3.12 境界の詳細図 B-3	32
3.13 斜め入射境界の取り扱い (C)	33
3.14 境界の詳細図 B-3	34
3.15 境界の詳細図 C-1	35
3.16 境界の詳細図 C-2	36
3.17 境界の詳細図 C-3	37
3.18 位相の考え方	38
3.19 斜め規則波島嶼図	39
3.20 波高比の等高線	39
4.1 計算領域の概念図	42
4.2 概念図	42
4.3 軸の設定	44
4.4 計算領域 (テストケース)	44
4.5 35 周期目	47
4.6 45 周期目	47
4.7 計算領域 (Mach 反射)	48
4.8 線形解との比較 ($T = 2.0(s)$, $H_i/h = 0.001$, $h = 0.1(m)$)	48
4.9 波形の変化の様子 (5 周期~35 周期)	49
4.10 壁沿いの波高の変化の入射角による違い	51
4.11 波高の最大値の比較	51
5.1 μ の b に関する変化	53

5.2 Sommerfeld 型の境界のみを用いた場合の波高変化	54
5.3 反射率計算例	55
5.4 反射率 ($\Delta x = L/25, \Delta t = T/400$)	55
5.5 μ の波長に関する変化 ($b = 1.0$)	56
5.6 μ の波長に関する変化 ($b = 0.3$)	56
5.7 μ の Δx に関する変化 ($b = 0.5$)	57
5.8 計算領域 (反射率を持つ構造物)	58
5.9 入射角 15 度および 45 度の時の波形の等高線 (吸収帯あり)	58
5.10 壁沿いの波高の変化の違い (吸収帯あり)	59
6.1 エネルギー収支の概念図	63
6.2 波高および平均水深の変化	67
6.3 波形の比較	68
6.4 実験条件	68
6.5 波高および平均水深の比較	69
6.6 ν_f の 1 周期平均	69
6.7 k_x/h の 1 周期平均	69
6.8 u_s/C の 1 周期での最大値	70
6.9 波形の比較	70
7.1 先端部付近の格子の概念図	72
7.2 x 軸における格子の配置	73
7.3 格子の増減による微分を使用する格子の位置の違い	76
7.4 格子の増減による先端流速 u の不連続	76
7.5 改善した方法による先端流速 u	76
7.6 非碎波条件での解析解との空間波形比較	77
7.7 汀線の x 方向変化	77
7.8 汀線の時系列変化	79
7.9 波高および平均水位の比較	80
7.10 時系列波形の比較 ($h = 0.12(\text{m})$)	80
7.11 時系列波形の比較 ($h = 0.09(\text{m})$)	80
7.12 各諸量の空間波形	81
8.1 エネルギーフラックスおよびエネルギーの比較	86
8.2 運動量保存式の残差の大きさの空間変化	91
8.3 式 (8.53) の第一項目の空間変化	92
8.4 S_{xx} の比較	93
8.5 2 つの方法による比較	94
8.6 波高および平均水位	94
8.7 級数の項数による比較	94
8.8 ある瞬間の式 (8.62) における項の比較	95
8.9 ある瞬間の式 (8.63) における項の比較	95
8.10 ある瞬間の式 (8.65) における項の比較	96
8.11 式 (8.65) の誤差の時間的空間的変化	96
8.12 式 (8.65) における $t/T = 0.6$ での各項の比較	96

8.13 式 (8.65) における $t/T = 0.6$ での第 3 項との比較	97
8.14 ある瞬間での式 (8.69) における項の比較	97
8.15 式 (8.69) の誤差の時間的空間的変化	97
8.16 ある瞬間における式 (8.77) の各項の比較	99
8.17 式 (8.77) における時間による比較	100
8.18 式 (8.83) における時間による比較	100
8.19 減衰項と $(\hat{h} + \hat{\eta})$ の時系列	101
8.20 減衰項 (2 階微分; 原型) と $(\hat{h} + \hat{\eta})$ の時系列	101
8.21 波高の変化	104
8.22 平均水位の変化	104
8.23 波高の変化 ($f_w = 0.5$)	104
8.24 平均水位の変化 ($f_w = 0.5$)	105
8.25 $h = 0.09\text{m}$ での時系列波形の比較	105
8.26 $h = 0.12\text{m}$ での時系列波形の比較	105
8.27 $h = 0.17\text{m}$ での時系列波形の比較	106
8.28 $h = 0.20\text{m}$ での時系列波形の比較	106

表目次

4.1 周期ごとによる誤差	45
4.2 周期ごとによる誤差	49
6.1 各パラメタ	66
6.2 パラメタ (Nwogu(1996) のケース)	66
6.3 パラメタ (Scäffer(1993) のケース)	67
7.1 <i>A</i> における離散係数	74
7.2 <i>B</i> における離散係数	74
7.3 <i>C</i> における離散係数	74
7.4 <i>D</i> における離散係数	74

記号一覧

ϕ	速度ポテンシャル
∇	$(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ を表す微分演算子
z	鉛直方向の座標 (上向き正)
t	時間座標
g	重力加速度
η	水面変動
h	静水深 (z 方向下向きに正. よって, 底面は $z = -h$ となる)
ϵ	非線形性を表すパラメタ ($= \frac{g}{h}$)
μ	分散性を表すパラメタ ($= \frac{g}{L}$)
L	波長, 水平方向の代表長さ, または Lagrangian
a	水面変動の振幅, もしくはその代表長さ
y	水平方向の座標, ただし 1 章では変数の代表として用いている)
y_0, y_1, y_2, y_3, y_4	摂動を説明する際の係数
h_0	鉛直方向の代表長さ
a_0	振幅の代表長さ
l_0	水平方向の代表長さ
$\acute{x}, \acute{z}, \dots$	'は各変数の無次元量を表す
n, m	級数の項
N	級数の項数
z_a	任意の水深位置
u_a	$z = z_a$ の水深位置での流速
u	水平 x 方向の流速
C	波速
A	平面における対象領域
t_1, t_2	開始時間と終了時間
Z_α	鉛直分布関数
Z_β	鉛直分布関数 ($= -(h+z)$)
f_α	鉛直分布関数に対応した重み係数
α	鉛直分布関数の級数の項
ξ	積分された Lagrangian
$A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}, \dots$	非線形緩勾配方程式における係数
p	圧力
τ_{ij}	Reynolds 応力
μ_t	渦動粘性係数
μ	分子粘性係数
μ_e	$\mu_t + \mu$

w	鉛直方向 z の流速
v	水平 y 方向の流速
ν_f	砕波減衰係数 ($= \frac{2\nu_s}{\rho}$)
p_d	動圧
n_j	単位法線ベクトル
δ_{ij}	クロネッカーの δ
U_j	回転成分の流速
E	波動エネルギー
C_g	群速度
s	流線方向座標軸
v_s	流線方向速度
M_d	砕波減衰項
ϵ_e	エネルギー逸散率
$\gamma_{\nu_f}, \gamma_{k1}, \dots$	砕波パラメタ
E_w	波のエネルギー
E_k	乱れエネルギー
ϵ	熱エネルギーの増加率
P_{k1}, P_{k2}, \dots	乱れ方程式などにおける生成項
T	周期
$\Delta t, \Delta x, \Delta y$	時間間隔および空間格子間隔
γ_b	流速・波速比
C^*, σ_k	乱流方程式におけるパラメタ
l_k	乱れの代表長さ
l_w	回転場における代表長さ
F_x	エネルギーフラックス
S_{xx}	ラディエーションストレス
\bar{p}, \dots	は周期程度の時間平均
\bar{M}	平均流成分などの断面平均

Chapter 1. 緒論

1.1 海岸環境と海岸工学

1.1.1 海岸と波浪

砂浜でうち寄せる波を眺めているとき、時間の経過を忘却してしまう。その魅力に引き込まれ、海岸についての研究を初めた、ところが、海岸について知れば知るほど、日本ではそのような場所が喪失しかけているという深刻な問題が生じていることがわかる。そのように、問題が深刻になるに至った原因は、海岸工学という学問が成熟していないことと大きく関係がある。これまで、国土の保全のため、海岸を津波、高潮などの災害から防護する必要があり、その方法として、離岸堤や突堤などを建設してきた。離岸堤や突堤は、波を受けその背後で静穏域を作りだしそれにより、波によって砂が沖などに運ばれることを阻止するものであるが、それらの建設は、周囲の漂砂環境を崩し、それを防ぐため、また突堤を建設するという悪循環を生むことになった。さらに、岩壁のような場所を守るための護岸は、そこからの砂の供給を止めた。しかし当時の段階では、第一に砂浜や岩壁の背後の住民の安全、国土の保全という観点からは犠牲もやむなしといったところである。

ところが、海岸における法律である海岸法が、1999年に43年ぶりに改正された。改正後、法律の(目的)のなかで「…(略)…海岸を防護するとともに、海岸環境の整備と保全及び公衆の海岸の適正な利用を図り、もって国土の保全に資することを目的とする。」と唱っている。これは、国土の保全に、環境の整備や保全、公衆の利用ということが含まれたことになる。そうすると、これまでのように単に特定の地域だけを考えるのではなく、それによって影響を受ける地域も考慮に入れて、海岸整備を行う必要があることになる。海岸における環境の整備・保全とは、砂移動の制御もあれば、沿岸域にすむ生態系の保護・育成ということも含まれる。そのようなことを予測、評価するのに海岸工学の果たす役割は非常に大きい。

環境を保全し、利用しやすく、かつ安全な海岸を造成するためには、その物理、化学、生物過程などを正確に予測できる手法が必要となる。物理的過程には、波浪変形、漂砂移動、波力の予測などが含まれる。化学、生物過程は海水に含まれるさまざまな化学物質が起こしうる反応と生態系に及ぼす影響予測であり、青潮や赤潮などがその代表的な問題となろう。しかし、それだけでなく、砂の移動により生態系の環境が変化するということもあり、当然、それらの過程が相互に影響を及ぼしあう。そのなかでも、特に海岸を特徴づけるものはやはり波浪である。沖で風などによって作られた波は、屈折、回折、浅水変形を繰り返す、最後には砕波をすることで、そのエネルギーを放出する。屈折は水深によって波速が違ふことにより、波向きが変化していくことをいい、回折は波のエネルギーの不連続をなくすため、エネルギーの高い方から低い方へ波のエネルギーが移動することをいう。また、浅水変形はエネルギーの伝達率は変化しないのであるが、伝達速度が変化するために起こる変形であり、基本的には水深が浅くなるにつれ伝達速度は小さくなるため、波高が大きくなることになる。そのように変形した波が最後にたどり着くのが砕波である。砕波は波がエネルギーを持ちすぎたために崩れる現象である。そのときに乱れ、渦を生成しながら崩れていき、それが、砂の巻き上げ移動に大きな影響を与える。

一方、波は、非線形性と分散性という、屈折などとは異なる性質も持ち合わせる。線形理論が成り

立つような波浪場では、重ね合わせの原理を用いることができるため、たとえば屈折効果と回折効果を計算したい場合、まず屈折の影響による波浪変形を計算し、次に回折の影響だけによる変形計算を行い、最後にそれらを重ね合わせるという手法をとることができる。しかし、非線形効果が効くようになると、そのように別々に考えることができず同時に解くことを要求される。さらに、波の前傾化や急峻化が起こり、非対称な波が発生する。また、分散性とは、周期が異なると同じ水深でも波長が異なるために波速が異なり、そのため周波数成分ごとに波が分散するようになるところから名付けられた。この効果は、水深に比べて波高が小さくなるような波浪場であるほどよく現れる。

このような効果が現れる原因は、水表面における境界条件にある。その境界条件を厳密に満たすことが可能であれば、砕波を除くすべての効果を正確に表現することができる。それらを精度良く再現できれば、当然波浪変形予測が可能となることを意味する。波浪変形予測には波動方程式が用いられることが多い。波動方程式は鉛直方向に積分することによって、空間的な次元を1次元減少させて解けるようにするものである。それを、離散化し、数値的に解く方法が主となる。それ以外の方法として、次元を減少させることなく、直接数値的に解く方法も研究されているが、砕波など複雑な波面形状を再現するのに適し、断面2次元の問題や狭い範囲での平面問題に適用されている。その方法の問題点は、水表面の自由境界の取り扱いが難しいということと、広い範囲での計算では現段階では計算機の能力不足ということが挙げられる。波浪の計算を精度良く行うには、細かい格子を要求されるためである。そのため実用的にも波動方程式は波浪計算に多く用いられてきた。

波浪方程式を導出する元となる基礎方程式は、連続式、表面および底面の境界条件である。連続式は線形方程式であるものの、表面の境界条件が非線形方程式であるために、解を得るために通常なんらかの近似を施して計算を行う。そのため波動方程式にはさまざまな方程式がある。境界条件を線形で取り扱っているもの、屈折および回折を同時に解けるようにした波動方程式をBerkhoff(1972)が緩勾配方程式として提案した。波動方程式に対する詳しい説明は後述する。緩勾配方程式は時間発展型の方程式ではなく、定常波動場を対象にした方程式である。しかし、この方程式は、これまでの波浪変形予測手法の流れを大きく変える方程式として、数々の論文で取り上げられている。その後、渡辺・丸山(1984)が非定常緩勾配方程式という、緩勾配方程式を時間発展型として導出した方程式を提案している。これも線形ではあるものの、非定常となったため、変形の時間的な変化を追えるようになった。

現在は、コンピュータの進歩も手伝って、より精度の高い非線形波動方程式を用いた変形予測の研究が盛んになっている。そのなかでも主流となっているのがBoussinesq方程式である。Boussinesq方程式はPeregrine(1967)が非線形性・分散性がともに小さいとして導出した方程式であり、浅海域で有効となる方程式である。これについてはさまざまな改良がなされ、かなり実用化も進んでいる。一方、積分をするということは、如何にして流速の鉛直分布を適切に表現するかという問題に帰着されるという観点から、複数の鉛直モードを重ねあわせ、その係数を未知数として求める方法をとる方程式系が瀬岡・中川(1993)、磯部(1994)などにより提案された。本論文では、後者の方法より提案された非線形緩勾配方程式(磯部, 1994)を用いた、計算予測手法の開発研究を行う。

1.1.2 波動方程式と砕波

最後に波動方程式と砕波の関係について述べる。砕波は文字通り波が崩れるという現象である。砕波点近傍から汀線にかけては、波、流れ、乱れが複雑に絡みあう工学的にも重要な場所であることから、古くから研究が多く行われている。波動方程式上で砕波を取り扱う場合は、砕波したと考えられる点から強制的にエネルギーを奪うような項を方程式に加えるということを行う。ただし、強制的にはあるが、その係数を的確に与えることができれば、砕波後の波高変化だけでなく、非線形性を有する方程式であれば波形まであわせることが可能であるはずである。そのために、砕波の構造を知ることは非常に重要となる。

砕波の研究は、はじめに砕波形態や砕波条件、砕波後の波高変化を追った研究がある。上述したように、砕波したと考えられる点から波動方程式に減衰項を入れるため、砕波点を正確に知ることは非常に重要である。砕波条件についての研究は、一様水深上での保存波の存在限界としての砕波限界条件と、一様勾配斜面上での砕波限界条件にわけられる。両方とも進行波砕波については、

$$\frac{u}{C} \geq 1.0 \quad (\text{at Crest}) \quad (1.1)$$

が砕波条件となる。つまり、波頂部の流速が波速を越えると、波から飛び出してしまうということの意味し、それが砕波となることは物理的な視点から考えても明らかである。一様水深での砕波に関しては、Yamada and Shiotani(1968)によって数値計算より保存波の砕波限界が求められている。斜面上の砕波限界に関しては、数値計算で行うことが難しく、合田(1970)が非常に多くの実験データから求めた砕波条件式が現在でも良く用いられている。しかし、渡辺ら(1983)が微小振幅波理論に基づいて、流速・波速比による砕波限界を提案してからは、流速・波速比がある値を超えると砕波と判定する方法も用いられるようになった(たとえば、片山・佐藤(1993))。この提案に関しては、田島ら(1996)、および有川・磯部(1997)によって数値的にも証明されている。また、瀬岡ら(1996)は流体内部には、負圧は生じないことから、水表面の鉛直方向の圧力勾配を砕波指標として用い、

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \leq 0 \quad (1.2)$$

になる点を砕波点として提案している。ただし、これによって求められる砕波点は相対的に浅い水深になるほど、合田(1970)より求められる砕波指標からずれる傾向にある。

砕波形態に関しては、Galvin(1968)によって始められ、砕波形態がsurf similarityパラメタによって分けられることおよび、主にそれが3形態によって分けられることを実験によって明らかにしている。また、Goughan & Komar(1975)は、2次のオーダーまでの解析解を求め、Lagrange的に計算する事によって、数値計算から、砕波形態のパラメタを考えている。また、Longuet & Cockett(1976)が境界要素法を用いて、波の巻き込みのシミュレーションを行っている。安田(1990)は境界積分法(BIM)を用いて、孤立波の砕波限界波形を計算し、支配パラメタおよび砕波形式指標を定義している。その後も、安田ら(1991)、安田ら(1994)、において、一様斜面上での砕波形態についてBIMを用いて、詳細に調べている。岩田ら(1990)は砕波後の位置エネルギーと運動エネルギーの低減過程が砕波形態によって異なることを実験から明らかにしている。

砕波後の減衰過程は、佐々木・佐伯(1974)が斜面勾配に分け、実験データを用いて詳細に調べている。減衰過程では、その内部構造も重要になることから、山下ら(1988)が砕波に伴ってできる渦の生成機構と移動形態を研究している。また最近ではVof法(Hirt & Nicholas(1981))を用いて、断面で狭い領域ではあるが、波の変形を渦なしの仮定などに縛られることなくダイナミックに計算する方法(蔭ら(1999))により、砕波内部の圧力や流速場を明らかにしている。また数多くの論文が存在するが、ここでは、砕波後の減衰項の評価の仕方について記述することにする。Svensen *et al.*(1978)は砕波後をouter region(tarnsition region), inner region, に分け、特徴を記述する。そして、Svensen(1984)は、砕波減衰は波のエネルギーが大規模渦の生成に移動することにより波高が減衰するというSurface Rollerモデルを提案した。そのモデルはBoussinesq方程式で用いられ(Schäffer *et al.*(1992), Schäffer *et al.*(1993)), 波の再生場を含めて良好な結果を得ている。ただし、平面に拡張することが難しい。Nwogu(1996)は、Boussinesq方程式に拡散型の砕波減衰項¹⁾を導入し、その係数を乱流方程式を用いて算出するという試みを行い、良い結果を得ている。瀬岡・大野(1997)、瀬岡ら(1999)は、強非線形・強分散波動方程式モデルに、Reynolds応力項を連成法を用いて鉛直積分した減衰項を加え、乱流方程式から減衰係数を評価することで、砕波を計算している。ただし、実験波形との比較は行われていない。また、減衰項の形は大きく分けると、拡散型と抵抗型があるが、拡散型の方が波形の前傾をうまく表現できることが明らかになっている(佐藤・鈴木(1990))。

¹⁾ただし、導出過程には誤りがあり、減衰項の係数はマイナスになるはずであるが、プラスになっている。

1.2 本研究の構成

2章では、波動方程式の説明と非線形緩勾配方程式の導出を行った。また、その後の章で取り扱われている数値計算方法を概観した。3章では、平面における数値計算方法およびその精度の検討を行う。4章、5章で、開発した数値計算方法を用いて、平面波浪場の計算を行う。ここでは、Mach 反射と呼ばれる現象についての再現、および考察を行い、さらに、任意の反射率を持つ壁境界について取り扱えるようにした。6章では、非線形緩勾配方程式に適用可能な砕波減衰モデルを導出し、断面地形に適用し、実験と比較してその妥当性を検討した。7章では、断面地形における遡上域の取り扱いに対する数値的な取り扱いについての提案を行った。最後に8章では、平均水位の上昇の再現性についての問題点の提示を行い、それについての考察を行っている。

Chapter 2. 基礎方程式

2.1 波動方程式

灘岡 (1999) にその歴史的経緯がこと細かく述べられており、それらの方程式の適用範囲については、磯部 (1994a) に記述されている。灘岡 (1999) には、方程式の導出課程は記されていないものの¹、方程式の分散性やエネルギー保存性など、方程式の性質そのものをわかりやすく述べている。

本研究で扱う方程式は、非線形緩勾配方程式と呼ばれ、任意の非線形性、分散性を取り扱えることから強非線形・強分散方程式の類に属する。波動方程式を知る上で、非線形性および分散性は避けて通ることはできない。非線形性とは、波の尖り具合を示し、分散性とは波数が異なると波速が異なるという性質を表す。水の波そのものがこの2つの性質を持ち合わせているために、波の急峻や不規則性が現実存在することになる。

よって、波動方程式はそれらの性質をできる限り厳密に表現できることが重要となる。それがどの程度表現できるかは、波動方程式の導出方法により推定することができる。つまり、波の支配方程式は、

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (-h < z < \eta) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ (\nabla \phi)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad (z = \eta) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \nabla \eta = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (z = \eta) \quad (2.3)$$

$$\nabla \phi \nabla h + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad (2.4)$$

からなり、上から連続式、表面の力学的境界条件、運動学的境界条件、底面境界条件である。連続式は数学的に線形であるものの表面の境界条件が非線形であるために、近似を行う必要があり、その近似を導入する仮定で、各モデル方程式がどの程度まで、非線形性および分散性を表せるかがわかり、それを示しているのが磯部 (1994b) の表である。ここでは、その表の中の主要部分だけ抜き出したものを掲載する。

Boussinesq 方程式は、Peregrine (1967) により提案され、その方程式では非線形性 ($\epsilon = a/h \approx H/h$) が2次オーダーまで、分散性 ($\mu^2 = (h/L)^2$) が1次オーダーまで取られている。分散性に関しては、1次オーダーというのは μ^2 のことであり、分散性2次オーダーというのは μ^4 のことになる²。

1次オーダーなどの意味は摂動法より由来している。これに関しては磯部 (1985) が詳しい。ここでは、その解説にない簡単に説明する。たとえば、 $\mu^2 = 0.1$ で、ある変数 y が 0.1234 であったとき、ある変数は、

$$y = y_0 \mu^0 + y_1 \mu^1 + y_2 \mu^2 + y_3 \mu^3 + y_4 \mu^4 \quad (2.5)$$

$$= 0 \mu^0 + 1 \mu^2 + 2 \mu^4 + 3 \mu^6 + 4 \mu^8 \quad (2.6)$$

となる。このとき係数 y_0 などは1のオーダーになる。これにより、この y を厳密に記述するためには μ^8 オーダー (ここでは分散性4次オーダー) までとらなければならない。これが、オーダーの具体的な意味となる。ここで、分散性や非線形性に話を戻すと、波が非常に荒れている時や砕波近辺などは非常

¹導出課程を知るには、「海岸波動」(土木学会, 1994) を参考にするとよい。

²この規則は、慣用的なものと思われる。また、式展開するとわかるが常に、 μ^2 の単位で現れる。

に波が突るため、非線形性が非常に高いオーダーで効いてくることになり、また、様々な周波数を持つような不規則な波は分散性が効いてくるわけである。このとき、Boussinesq 方程式 [Peregrine(1967)] では、非線形性に対し 2 次のオーダー、分散性に対し 1 次のオーダーまで精度を保證できるということになる。

Boussinesq 方程式は現在に至るまで、分散性に対して多くの研究者が修正を試みている。それらをまとめたものとしては喜岡(1999)に詳しい。次にNwogu(1993)を参考に Boussinesq 方程式の導出方法について記述する。

2.1.1 Boussinesq 方程式の導出 [Nwogu(1993)]

Nwogu(1993)は、力学的境界条件から、Boussinesq 方程式を導いている。ここでは、その導出方法の概略を述べる。

力学的境界条件は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + g\eta = 0 \quad (\text{at } z = \eta) \quad (2.7)$$

である。これを、代表長さ h_0, l_0, a_0 を用いて、次のように無次元化を行う。なお、 η は無次元変数を表す。

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{x}{l_0}, & \hat{z} &= \frac{z}{h_0}, & \hat{t} &= \frac{\sqrt{g h_0}}{l_0} t, & \hat{\eta} &= \frac{\eta}{a_0} \\ \hat{h} &= \frac{h}{h_0}, & \hat{\phi} &= \frac{h_0}{a_0 l_0 \sqrt{g h_0}} \phi \end{aligned} \quad (2.8)$$

このようにすると、力学的境界条件は、

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} + \frac{\epsilon}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right\} + \hat{\eta} = 0 \quad (\text{at } \hat{z} = \hat{\eta}) \quad (2.9)$$

となる。ここで、

$$\epsilon = \frac{a_0}{h_0}, \quad \mu^2 = \left(\frac{h_0}{l_0} \right)^2 \quad (2.10)$$

と定義される無次元パラメタである。先ほどの記述との整合性を持つためには、 $a_0 \rightarrow a, h_0 \rightarrow h, l_0 \rightarrow L$ であるが、 x, y, z, t に関する関数ではないことを確実に示すために a_0 を用いている。

Nwogu(1993)では、速度ポテンシャルを、

$$\hat{\phi}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} (\hat{z} + \hat{h})^m \hat{\phi}^{(m)}(\hat{x}, \hat{t}) \quad (2.11)$$

のように級数表示する。

連続式および底面の境界条件を満たすように $\hat{\phi}^{(n)} (n = 1, \dots, N)$ を $\hat{\phi}^{(0)}$ で表すように解き、次のように、 $\mathcal{O}(\mu^4)$ まで記述すると、

$$\hat{\phi}(x, z, t) = \hat{\phi}^{(0)} - \mu^2 (\hat{h} + \hat{z}) \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}^{(0)}}{\partial \hat{x}} - \mu^2 \frac{(\hat{z} + \hat{h})^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}^{(0)}}{\partial \hat{x}^2} + \mathcal{O}(\mu^4) \quad (2.12)$$

となる。これより、任意の水深 $\hat{z} = \hat{z}_a(x)$ における速度ポテンシャル $\hat{\phi}_a(\hat{x}, \hat{t})$ は、

$$\hat{\phi}_a = \hat{\phi}^{(0)} - \mu^2 (\hat{z}_a + \hat{h}) \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}^{(0)}}{\partial \hat{x}} - \mu^2 \frac{(\hat{z}_a + \hat{h})^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}^{(0)}}{\partial \hat{x}^2} + \mathcal{O}(\mu^4) \quad (2.13)$$

となる。そして、式(2.12)から式(2.14)を引き、 $\hat{\phi}_a = \hat{\phi}^{(0)} + \mathcal{O}(\mu^2)$ であることを用いると、

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_a + \mu^2 (\hat{z}_a - \hat{z}) \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}_a}{\partial \hat{x}} + \mu^2 (\hat{z}_a - \hat{z}) \hat{h} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_a}{\partial \hat{x}^2} + \mu^2 \frac{(\hat{z}_a - \hat{z})^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_a}{\partial \hat{x}^2} \quad (2.14)$$

となる。 \hat{x} 方向に微分をとると、

$$\hat{u}_a = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{z}=\hat{z}_a} = \frac{\partial \hat{\phi}_a}{\partial \hat{x}} + \mu^2 \frac{\partial \hat{z}_a}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}_a}{\partial \hat{x}} + \mu^2 \frac{\partial \hat{z}_a}{\partial \hat{x}} \hat{h} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_a}{\partial \hat{x}^2} + \mu^2 \hat{z}_a \frac{\partial \hat{z}_a}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_a}{\partial \hat{x}^2} \quad (2.15)$$

となり、これより、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\phi}_a}{\partial \hat{x}} &= \hat{u}_a - \mu^2 \frac{\partial \hat{z}_a}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}_a}{\partial \hat{x}} - \mu^2 \frac{\partial \hat{z}_a}{\partial \hat{x}} \hat{h} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_a}{\partial \hat{x}^2} - \mu^2 \hat{z}_a \frac{\partial \hat{z}_a}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_a}{\partial \hat{x}^2} \\ &= \hat{u}_a - \mu^2 \frac{\partial \hat{z}_a}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} \hat{u}_a - \mu^2 \frac{\partial \hat{z}_a}{\partial \hat{x}} \hat{h} \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial \hat{x}} - \mu^2 \hat{z}_a \frac{\partial \hat{z}_a}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial \hat{x}} + \mathcal{O}(\mu^4) \end{aligned} \quad (2.16)$$

となり、それを力学的境界条件を \hat{x} 方向に微分した式に代入することによって、Boussinesq 方程式は導かれ、

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \nabla \cdot \left\{ (\hat{h} + \epsilon \hat{\eta}) \hat{u}_a \right\} + \mu^2 \nabla \cdot \left[\left(\frac{\hat{z}_a^2}{2} - \frac{\hat{h}^2}{6} \right) \hat{h} \nabla (\nabla \hat{u}_a) + \left(\hat{z}_a + \frac{\hat{h}}{2} \right) \hat{h} \nabla \left\{ \nabla (\hat{h} \hat{u}_a) \right\} \right] = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_a}{\partial \hat{t}} + \nabla \hat{\eta} + \epsilon (\hat{u}_a \nabla) \hat{u}_a + \mu^2 \left[\frac{\hat{z}_a^2}{2} \nabla \left(\nabla \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial \hat{t}} \right) + \hat{z}_a \nabla \left\{ \nabla \left(\hat{h} \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial \hat{t}} \right) \right\} \right] = 0 \quad (2.18)$$

となる。この導出方法を用いれば、任意の分散性や非線形性を有する方程式を導出することが可能である。しかし、式をみてもわかる様にこの段階ですでに 3 階微分が用いられており、数値計算的にも解きにくい方程式となっていることがわかる。

2.1.2 非線形緩勾配方程式

そこで、導出方法を変え、速度ポテンシャルの級数近似のまま方程式を導いたのが、非線形緩勾配方程式である。この導出については次章で述べる。これにより、高階微分を含むことなしに、任意の非線形性および分散性を有する方程式が得られる。また、非線形緩勾配方程式から、これまでの波動方程式(非線形長波方程式 [Carrier & Greenspan(1957)], Boussinesq 方程式 [Peregrine(1967)]) は導くことができる [磯部(1994a)]。非線形緩勾配方程式は、変分原理を用いて定式化しているが、瀧岡・中川(1993)は Galerkin 法を用いて定式化している。

どちらとも、級数で近似をした後、磯部(1994b)は変分原理を用いて、瀧岡ら(1994)は Galerkin 法を用いて定式化している。しかし、導出において完全に同一の思想が流れているわけではない。変分法を用いて波の基礎方程式が導けることを証明したのは、Luke(1967)である。そして、汎関数のひとつである速度ポテンシャルを級数で近似し、積分をして解を求める方法が磯部(1994b)の方法であり、数学の中ではレイリー・リッツの方法(たとえば、Craggs(1975))と呼ばれる方法に属するものである。

一方、瀧岡ら(1994)では、もともになる方程式は運動方程式であり、それを単純に水深積分すると、エネルギーの保存が成り立たなくなるために、その保存が成り立つように積分をするために、級数で近似をしている。瀧岡ら(1994)ではその方法を連成法と呼んでいる。変分法を用いた定式化では、もともとベルヌイの式から出発しているため、エネルギーの保存は当然成立することになる。

非線形緩勾配方程式の研究例は、田島ら(1996)が砕波限界に関する数値的な研究を行っている。非線形緩勾配方程式は、強非線形方程式であるために、砕波直前まで精度良く波形を予測することが可能であるという考え方に基づいている。それを踏まえて有川・磯部(1997)がさらに精度良く計算をし、進行波の砕波限界は物理的な砕波限界つまり、流速が波速を越えた時点で定義できることを示した。

有川ら (1995) は碎波減衰を考慮するために、非線形緩勾配方程式を拡張して、波高までは精度良く求められるモデルを提案している。平面の計算では、Newton-Raphson 法および ADI 法を用いて計算しようとしたが、計算がうまく収束しないという報告を近藤 (1996) が行っている。柿沼ら (1997) は Dohn (1995) の方法で、陽的に計算を行うことで、三角潜堤上の平面波浪場の計算を行っている。また、木村 (1998) は級数の近似は 2 項であるものの精度の高い平面計算方法を提案した。

2.2 鉛直分布関数の概念

非線形緩勾配方程式は、速度ポテンシャルを級数で近似し、変分原理を用いて定式化される。速度ポテンシャルは、鉛直方向の分布を既知として、

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{\alpha=1}^N Z_{\alpha}(z; h(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x}, t)) f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \equiv Z_{\alpha} f_{\alpha} \quad (2.19)$$

のように級数で近似する³。ここで、 $\mathbf{x} = (x, y)$ は水平方向座標、 z は鉛直上向きを正とする座標、 h は水深、水面変動 η および、 f_{α} は未知数である。そして、速度ポテンシャル ϕ は、 N 個の未知数 f_{α} で表されることになる。たとえば、既知の鉛直分布関数として、

$$Z_{\alpha} = \left(\frac{h+z}{h} \right)^{2(\alpha-1)} \quad (2.20)$$

を用い、3 項まで近似した場合、ある地点のある瞬間に $f_1 = 1.0$ 、 $f_2 = -0.1$ 、 $f_3 = 0.05$ であると仮定すると、図 2.1 のようになる。

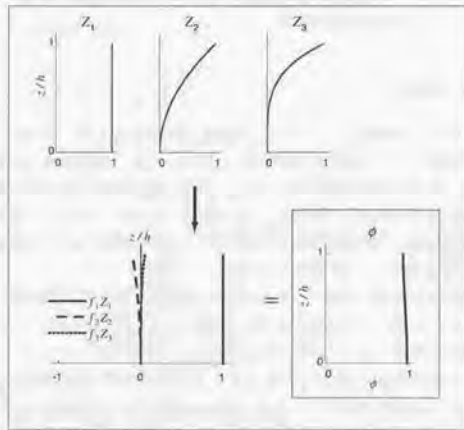


図 2.1: 速度ポテンシャルの級数近似の概念図

同図からもわかるように、鉛直分布関数の関数系および級数の項数はその方程式の精度を決定する。鉛直分布関数の関数系を変えると、基礎方程式も変化する。それについては次節で説明する。

³ $Z_{\alpha}(z; h(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x}, t))$ は、 Z_{α} は z の関数であるものの、実際には、 h や η を含む場合もあり、その時には、 \mathbf{x} や t の関数でもあるということを暗に意味している。

2.3 基礎方程式の導出

2.3.1 変分原理を用いた導出方法

第 1 章からもわかるように、波動方程式を考える場合、鉛直方向の分布を精度良く表すことが大切になるが、2.2 節のように多くの変数を用いて近似する場合、その基礎方程式の導出には変分原理が有効である。変分原理は、場に適した Lagrangian を定義し、未知変数に関する Euler 方程式を導くことにより、その場の状態を解析できることを示すものである。波の場に適した Lagrangian は、

$$L[\phi, \eta] = \int_{t_1}^{t_2} \iint_A \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + g z \right\} dz dA dt \quad (2.21)$$

で定義される [Luke, 1967]。ここで、 g は重力加速度、 A は平面における対象領域、 t_1 、 t_2 は開始時間および終了時間をそれぞれ表す。未知数である速度ポテンシャル ϕ および水面変動 η に関する Euler 方程式を解くと、運動学的境界条件や連続式といった方程式となることからわかる。導出に関しては近藤 (1996) に詳しい。

磯部 (1994a) は、2.2 節で説明したように、速度ポテンシャルを既知の鉛直分布関数を用いて級数表示し、式 (2.21) を z 方向に積分したものを新たに Lagrangian とおくことにより、基礎方程式を導出した。その方法にならない、本研究で取り扱う鉛直分布関数系についての方程式を導出する。

2.3.2 鉛直分布関数系による基礎方程式の違い

鉛直分布関数を

$$Z_{\alpha} = Z_{\alpha}(z; h) \quad (2.22)$$

のような h のみを用いるものでは、遡上域を含めて同じ方程式を用いて計算をすることはできない⁴。そこで、 h および η を用いた鉛直分布関数を定義する必要がある。

$$\bullet Z_{\alpha} = Z_{\alpha}(z; h, \eta)$$

の関数系についての Euler 方程式を導出する。導出された方程式は Z_{α} として、 \cosh 系であっても、偶次べき乗系であっても、 \cos 系であってもよいが、本研究では、主に碎波帯のような水深の浅い領域を対象としているため、偶次べき乗系を用いた⁵。

しかし、偶次べき乗級数を用いた場合、速度ポテンシャルの水底での鉛直方向微分が常に 0 となるため、底面の運動学的境界条件が満足されない。そこで、その条件が満足されるように、

$$\phi \equiv Z_{\eta}(z; h) \nabla h \cdot \nabla f_1 + Z_{\alpha} f_{\alpha} \equiv -(h+z) \nabla h \cdot \nabla f_1 + \left(\frac{h+z}{h+\eta} \right)^{2\alpha-2} f_{\alpha} \quad (2.23)$$

としたものの方程式も導出する。

2.3.2.1 $Z_{\alpha}(z; h)$ を用いた方程式

速度ポテンシャルは、

$$\phi = Z_{\alpha}(z; h(\mathbf{x})) f_{\alpha} \quad (2.24)$$

と仮定する。この仮定は磯部 (1994a) の通りであり、近藤 (1996) に基礎方程式の導出課程は詳しく述べられているため、ここでは、簡潔に記述することとする。

⁴ 水深がある程度浅くなってから他の方程式系 (たとえば、非線形長波方程式など) に接続すれば可能である。[鄭ら (1999)]
⁵ \cosh 系は形からもわかるように、深海域に適している。また、そのような最適関数系についての研究は Abobadima ら (1998) が行っている。また、 \cosh および偶次べき乗級数の 2 つの異なる関数系を用いた定式化は木村 (1998) に詳しい

まず, Lagrangian は,

$$L[f_\alpha, \eta] = \int_{t_1}^{t_2} \iint_A \xi \left(\eta, f_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}, \nabla f_\alpha \right) dA dt \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} & \xi \left(\eta, f_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}, \nabla f_\alpha \right) \\ &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \bar{Z}_\alpha + \frac{1}{2} D_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta (\nabla h)^2 + \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha \nabla f_\beta \\ & \quad C_{\alpha\beta} f_\alpha \nabla f_\beta \nabla h + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta + \frac{1}{2} g (\eta^2 - h^2) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.26)$$

となる。ここで、係数 $A_{\alpha\beta}$ などは、2.3.3 項で示す通りである。変分原理に従い、未知変数 f_α , および η に関する Euler 方程式は,

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial f_\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)} \right] + \nabla \left[\frac{\partial \xi}{\partial (\nabla f_\alpha)} \right] \quad (2.28)$$

であり、それより,

$$\begin{aligned} & Z_\alpha^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \bar{D}_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta (\nabla h)^2 + \bar{C}_{\beta\alpha} \nabla f_\alpha f_\beta \nabla h \\ & + \frac{1}{2} \bar{A}_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha \nabla f_\beta + \frac{1}{2} \bar{B}_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} & Z_\alpha^n \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla (A_{\alpha\beta} \nabla f_\beta) - B_{\alpha\beta} f_\beta + \nabla (C_{\beta\alpha} f_\beta \nabla h) \\ & - C_{\alpha\beta} \nabla f_\beta \nabla h - D_{\alpha\beta} f_\beta (\nabla h)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

となるが、次節の方程式との比較を行いやすくするために式 (2.30) を,

$$\begin{aligned} & -Z_\alpha^n \frac{\partial \eta}{\partial t} + (D_{\alpha\beta} - \bar{C}_{\beta\alpha}) f_\beta (\nabla h)^2 - \bar{C}_{\beta\alpha} f_\beta \nabla \eta \nabla h + B_{\alpha\beta} f_\beta \\ & + (C_{\alpha\beta} - C_{\beta\alpha} - \bar{A}_{\alpha\beta}) \nabla f_\beta \nabla h - \bar{A}_{\alpha\beta} \nabla f_\beta \nabla \eta - C_{\beta\alpha} f_\beta \nabla^2 h - A_{\alpha\beta} \nabla^2 f_\beta = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

と展開する。また、この方程式は N 本あることになる。

2.3.2.2 $Z_\alpha(z; h, \eta)$ を用いた方程式

速度ポテンシャルは、鉛直分布関数系 Z_α を用いて,

$$\phi = Z_\alpha(z; h(\mathbf{x}, t), \eta(\mathbf{x}, t)) f_\alpha \quad (2.32)$$

の様に仮定する。

鉛直方向に関して積分すると,

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial t} dz = \frac{\partial \eta}{\partial t} f_\alpha \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} dz + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} Z_\alpha dz + \frac{\partial h}{\partial t} f_\alpha \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} dz \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 dz &= \frac{1}{2} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} dz f_\alpha f_\beta (\nabla \eta)^2 + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} \frac{\partial Z_\beta}{\partial h} dz f_\alpha f_\beta (\nabla h)^2 \right. \\ & \quad + \int_{-h}^{\eta} Z_\alpha Z_\beta dz \nabla f_\alpha \nabla f_\beta + 2 \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta}{\partial h} dz f_\alpha f_\beta \nabla \eta \nabla h \\ & \quad \left. + 2 \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} Z_\beta dz f_\alpha \nabla f_\beta \nabla h + 2 \int_{-h}^{\eta} Z_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} dz \nabla f_\alpha f_\beta \nabla \eta \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial z} \frac{\partial Z_\beta}{\partial z} dz f_\alpha f_\beta \quad (2.35)$$

$$\int_{-h}^{\eta} g z dz = \frac{g}{2} (\eta^2 - h^2) \quad (2.36)$$

となる。そうすると,

$$L[f_\alpha, \eta] = \int_{t_1}^{t_2} \iint_A \xi \left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \nabla \eta, f_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}, \nabla f_\alpha \right) dA dt \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} & \xi \left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \nabla \eta, f_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}, \nabla f_\alpha \right) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} f_\alpha \bar{Z}_\alpha + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \bar{Z}_\alpha + \frac{\partial h}{\partial t} f_\alpha \bar{Z}_\alpha \\ & \quad + \frac{1}{2} \bar{E}_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta (\nabla \eta)^2 + \frac{1}{2} \bar{D}_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta (\nabla h)^2 + \frac{1}{2} \bar{A}_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha \nabla f_\beta \\ & \quad + \bar{G}_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla \eta \nabla h + \bar{C}_{\alpha\beta} f_\alpha \nabla f_\beta \nabla h + \bar{F}_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha f_\beta \nabla \eta \\ & \quad + \frac{1}{2} \bar{B}_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta + \frac{1}{2} g (\eta^2 - h^2) \end{aligned} \quad (2.38)$$

であり、 \bar{Z}_α や $\bar{A}_{\alpha\beta}$ は後述する。

変分原理を適用すると Euler 方程式は,

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \right] + \nabla \left[\frac{\partial \xi}{\partial (\nabla \eta)} \right] \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial f_\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)} \right] + \nabla \left[\frac{\partial \xi}{\partial (\nabla f_\alpha)} \right] \quad (2.40)$$

となる。詳しい導出課程は付録 A に記し、ここでは結論だけ記述すると、式 (2.39), (2.40) は次のよ

うになる.

$$\begin{aligned} & Z_\alpha^\eta \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left[\frac{\partial Z_\alpha^\eta}{\partial h} - \frac{\partial Z_\alpha^{-h}}{\partial h} \right] f_\alpha \frac{\partial h}{\partial t} + g\eta \\ & - \frac{1}{2} \bar{E}_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta (\nabla\eta)^2 - \bar{E}_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla\eta \nabla h - 2E_{\alpha\beta} (\nabla f_\alpha) f_\beta \nabla\eta - E_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla^2 \eta \\ & + \left(\frac{1}{2} \bar{D}_{\alpha\beta} - \bar{G}_{\alpha\beta} \right) f_\alpha f_\beta (\nabla h)^2 - (G_{\alpha\beta} + G_{\beta\alpha} + \bar{F}_{\alpha\beta} - \bar{C}_{\beta\alpha}) \nabla f_\alpha f_\beta \nabla h \\ & - G_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla^2 h + \left(\frac{1}{2} \bar{A}_{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta} \right) \nabla f_\alpha \nabla f_\beta - F_{\alpha\beta} (\nabla^2 f_\alpha) f_\beta + \frac{1}{2} \bar{B} f_\alpha f_\beta = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} & - Z_\alpha^\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} - Z_\alpha^{-h} \frac{\partial h}{\partial t} \\ & + (E_{\alpha\beta} - \bar{F}_{\alpha\beta}) f_\beta (\nabla\eta)^2 + (D_{\alpha\beta} - \bar{C}_{\beta\alpha}) f_\beta (\nabla h)^2 \\ & + (G_{\alpha\beta} + G_{\beta\alpha} - \bar{C}_{\beta\alpha} - \bar{F}_{\alpha\beta}) f_\beta \nabla\eta \nabla h + B_{\alpha\beta} f_\beta \\ & + (C_{\alpha\beta} - C_{\beta\alpha} - \bar{A}_{\alpha\beta}) \nabla f_\beta \nabla h + (F_{\beta\alpha} - F_{\alpha\beta} - \bar{A}_{\alpha\beta}) \nabla f_\beta \nabla\eta \\ & - C_{\beta\alpha} f_\beta \nabla^2 h - F_{\alpha\beta} f_\beta \nabla^2 \eta - A_{\alpha\beta} \nabla^2 f_\beta = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.3.2.3 底面の境界条件を考慮した方程式

速度ポテンシャルの鉛直分布関数が偶次べき乗級数では, 底面の境界条件を満足しないために,

$$\phi \equiv Z_\alpha \nabla h \cdot \nabla f_1 + Z_\alpha f_\alpha \quad (2.43)$$

と仮定する. 鉛直方向に積分すると, それぞれ,

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial t} dz = \bar{Z}_\alpha (\nabla h \cdot \nabla) \frac{\partial f_1}{\partial t} + \bar{Z}_\alpha \frac{\partial \eta}{\partial t} f_\alpha + \bar{Z}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} (\nabla \phi)^2 dz = & H_{pp} (\nabla h)^2 (\nabla h \cdot \nabla f_1)^2 + I_{pp} \{ \nabla (\nabla h \cdot \nabla f_1) \}^2 \\ & + D_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta (\nabla h)^2 + E_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta (\nabla \eta)^2 + A_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha \nabla f_\beta \\ & + 2P_{pp} \{ \nabla h \cdot \nabla (\nabla h \cdot \nabla f_1) \} + 2Q_{p\alpha} f_\alpha (\nabla h)^2 (\nabla h \cdot \nabla f_1) \\ & + 2R_{p\alpha} f_\alpha (\nabla h \cdot \nabla f_1) (\nabla h \cdot \nabla \eta) + 2S_{p\alpha} (\nabla h \cdot \nabla f_\alpha) (\nabla h \cdot \nabla f_1) \\ & + 2T_{p\alpha} f_\alpha \{ \nabla h \cdot \nabla (\nabla h \cdot \nabla f_1) \} + 2U_{p\alpha} f_\alpha \{ \nabla \eta \cdot \nabla (\nabla h \cdot \nabla f_1) \} \\ & + 2V_{p\alpha} \{ \nabla f_\alpha \cdot \nabla (\nabla h \cdot \nabla f_1) \} + 2G_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla h \cdot \nabla \eta \\ & + 2C_{\alpha\beta} f_\alpha \nabla f_\beta \cdot \nabla h + 2F_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha f_\beta \cdot \nabla \eta \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dz = X_{pp} (\nabla h \cdot \nabla f_1)^2 + B_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta + 2Y_{p\alpha} f_\alpha \nabla h \cdot \nabla f_1 \quad (2.46)$$

$$\int_{-h}^{\eta} g z dz = \frac{1}{2} g (\eta^2 - h^2) \quad (2.47)$$

となる. ここで, 式が煩雑であることから内積を示す記号「 \cdot 」を積極的に示すことにする. そうすると, Lagrangian は,

$$L[f_\alpha, \eta] = \int_{t_1}^{t_2} \iint_A \xi \left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \nabla \eta, f_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}, \nabla f_\alpha, \nabla \frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \right) dA dt \quad (2.48)$$

となり, Euler 方程式は,

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial t}} \right] + \nabla \cdot \left[\frac{\partial \xi}{\partial \nabla \eta} \right] \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial f_1} = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial t}} \right] + \nabla \cdot \left[\frac{\partial \xi}{\partial \nabla f_1} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left[\frac{\partial \xi}{\partial (\nabla \frac{\partial f_1}{\partial t})} \right] \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}} \right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}} \right] - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial f_\gamma} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \frac{\partial f_\gamma}{\partial t}} \right] + \nabla \cdot \left[\frac{\partial \xi}{\partial \nabla f_\gamma} \right] \quad (\gamma = 2, 3, \dots, N) \quad (2.51)$$

となる. そして, オイラー方程式に基づき基礎方程式を導出するのであるが, ここでは, $O(\nabla^2 h)$, および $O(\nabla h)^2$ より高次のオーダーを無視し, かつ x 方向のみの方程式を記述すると, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{Z}_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial t} + Z_\alpha^\eta \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} f_\alpha f_\beta + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial \eta} - F_{\beta\alpha} \right) \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \\ & + \frac{\partial V_{p\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + \left(\frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial \eta} - \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial h} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_\beta}{\partial x} f_\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial \eta} f_\alpha f_\beta \\ & + \frac{\partial Y_{p\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} f_\alpha + g\eta - \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} f_\alpha f_\beta - E_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} f_\alpha f_\beta \\ & - 2E_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} f_\beta - (G_{\alpha\beta} + G_{\beta\alpha}) \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} f_\beta \frac{\partial h}{\partial x} - F_{\beta\alpha} \frac{\partial^2 f_\beta}{\partial x^2} f_\alpha \\ & - U_{p\alpha} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} f_\alpha - U_{p\alpha} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x^2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} & - Z_\alpha^\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(E_{1\beta} - \frac{\partial F_{1\beta}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} f_\beta + U_{p1} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & + \left(G_{1\beta} + G_{\beta 1} - \frac{\partial C_{\beta 1}}{\partial h} - \frac{\partial F_{1\beta}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} f_\beta + \left(F_{\beta 1} - \frac{\partial A_{1\beta}}{\partial \eta} - F_{1\beta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \\ & + \left(C_{1\beta} - \frac{\partial A_{1\beta}}{\partial h} - C_{\beta 1} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_\beta}{\partial x} - A_{1\beta} \frac{\partial^2 f_\beta}{\partial x^2} - F_{1\beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} f_\beta \\ & + B_{1\beta} f_\beta + Y_{p1} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_{p\beta}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} f_\beta - Y_{p\beta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \\ & - \frac{\partial V_{p1}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - V_{p1} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \bar{Z}_\alpha}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Z}_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial x} \\ & + \frac{\partial^2 U_{p\beta}}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial h}{\partial x} f_\beta + \frac{\partial U_{p\beta}}{\partial \eta} \left\{ 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} f_\beta + 2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \right\} \frac{\partial h}{\partial x} \\ & + U_{p\beta} \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} f_\beta + 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial f_\beta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 f_\beta}{\partial x^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_{p\beta}}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \\ & + \frac{\partial V_{p\beta}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial f_\beta}{\partial x} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 f_\beta}{\partial x^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + V_{p\beta} \frac{\partial^3 f_\beta}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}
& -Z_\gamma \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(E_{\alpha\beta} - \frac{\partial F_{\gamma\beta}}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 f_\beta + \left(U_{p\gamma} - \frac{\partial V_{p\gamma}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
& + \left(G_{\gamma\beta} + G_{\beta\gamma} - \frac{\partial C_{\beta\gamma}}{\partial h} - \frac{\partial F_{\gamma\beta}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} f_\beta + \left(F_{\beta\gamma} - \frac{\partial A_{\gamma\beta}}{\partial \eta} - F_{\gamma\beta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \\
& + \left(C_{\gamma\beta} - \frac{\partial A_{\gamma\beta}}{\partial h} - C_{\beta\gamma} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_\beta}{\partial x} - A_{\gamma\beta} \frac{\partial^2 f_\beta}{\partial x^2} - F_{\gamma\beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} f_\beta + B_{\gamma\beta} f_\beta \\
& + Y_{p\gamma} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} - V_{p\gamma} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 0 \quad (\gamma = 2, 3, \dots, N) \quad (2.54)
\end{aligned}$$

鉛直分布関数を 2.3.2.2 項で記述した方程式にアンダーラインの部分を加えたものになっている。

2.3.3 係数の定義

全体を通した係数を記述する。

$$\bar{Z}_p = \int_{-h}^{\eta} Z_p dz \quad (2.55)$$

$$\bar{Z}_\alpha = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} dz \quad (2.56)$$

$$\dot{Z}_\alpha = \int_{-h}^{\eta} Z_\alpha dz \quad (2.57)$$

$$A_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} Z_\alpha Z_\beta dz \quad (2.58)$$

$$\bar{A}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (Z_\alpha Z_\beta) dz + Z_\alpha^2 Z_\beta^\eta = \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial \eta} \quad (2.59)$$

$$\dot{A}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial h} (Z_\alpha Z_\beta) dz + Z_\alpha^{-h} Z_\beta^{-h} = \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial h} \quad (2.60)$$

$$B_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial z} \frac{\partial Z_\beta}{\partial z} dz \quad (2.61)$$

$$\bar{B}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial z} \frac{\partial Z_\beta}{\partial z} \right) dz + \frac{\partial Z_\alpha^\eta}{\partial z} \frac{\partial Z_\beta^\eta}{\partial z} = \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial \eta} \quad (2.62)$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} Z_\beta dz \quad (2.63)$$

$$\bar{C}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} Z_\beta \right) dz + \frac{\partial Z_\alpha^\eta}{\partial h} Z_\beta^\eta = \frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial \eta} \quad (2.64)$$

$$\dot{C}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} Z_\beta \right) dz + \frac{\partial Z_\alpha^{-h}}{\partial h} Z_\beta^{-h} = \frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial h} \quad (2.65)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} \frac{\partial Z_\beta}{\partial h} dz \quad (2.66)$$

$$\bar{D}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} \frac{\partial Z_\beta}{\partial h} \right) dz + \frac{\partial Z_\alpha^\eta}{\partial h} \frac{\partial Z_\beta^\eta}{\partial h} = \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial \eta} \quad (2.67)$$

$$E_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} dz \quad (2.68)$$

$$\bar{E}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} \right) dz + \frac{\partial Z_\alpha^\eta}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta^\eta}{\partial \eta} = \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial \eta} \quad (2.69)$$

$$\dot{E}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} \right) dz + \frac{\partial Z_\alpha^{-h}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta^{-h}}{\partial \eta} = \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial h} \quad (2.70)$$

$$F_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} Z_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} dz \quad (2.71)$$

$$\bar{F}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Z_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} \right) dz + Z_\alpha^\eta \frac{\partial Z_\beta^\eta}{\partial \eta} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \eta} \quad (2.72)$$

$$\dot{F}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial h} \left(Z_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} \right) dz + Z_\alpha^{-h} \frac{\partial Z_\beta^{-h}}{\partial \eta} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial h} \quad (2.73)$$

$$G_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta}{\partial h} dz \quad (2.74)$$

$$\bar{G}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta}{\partial h} \right) dz + \frac{\partial Z_\alpha^{-h}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta^{-h}}{\partial h} = \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial \eta} \quad (2.75)$$

$$H_{pp} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_p}{\partial h} \frac{\partial Z_p}{\partial h} dz \quad (2.76)$$

$$I_{pp} = \int_{-h}^{\eta} Z_p Z_p dz \quad (2.77)$$

$$P_{pp} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_p}{\partial h} Z_p dz \quad (2.78)$$

$$Q_{p\alpha} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_p}{\partial h} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} dz \quad (2.79)$$

$$R_{p\alpha} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_p}{\partial h} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} dz \quad (2.80)$$

$$S_{p\alpha} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_p}{\partial h} Z_\alpha dz \quad (2.81)$$

$$T_{p\alpha} = \int_{-h}^{\eta} Z_p \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} dz \quad (2.82)$$

$$U_{p\alpha} = \int_{-h}^{\eta} Z_p \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} dz \quad (2.83)$$

$$V_{p\alpha} = \int_{-h}^{\eta} Z_p Z_\alpha dz \quad (2.84)$$

$$X_{pp} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_p}{\partial z} \frac{\partial Z_p}{\partial z} dz \quad (2.85)$$

$$Y_{p\alpha} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_p}{\partial z} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial z} dz \quad (2.86)$$

また、上付き文字に関しては、 $R(x, t, z)$ を代表的な関数とすると、

$$R^{z^*} = R|_{z=z^*} \quad (2.87)$$

を表すものとする。

2.3.4 鉛直分布関数の選択

鉛直分布関数に、

$$Z_\alpha = \left(\frac{h+z}{h+\eta} \right)^{2(\alpha-1)} \quad (2.88)$$

を用いる。すると、式(2.55)~(2.75)までの係数は次のようになる。

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2(\alpha+\beta)-3} (h+\eta) \quad (2.89)$$

$$\bar{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2(\alpha+\beta)-3} \quad (2.90)$$

$$\hat{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2(\alpha+\beta)-3} \quad (2.91)$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{4(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-5} \frac{1}{h+\eta} \quad (2.92)$$

$$\bar{B}_{\alpha\beta} = \frac{4(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-5} \frac{1}{(h+\eta)^2} \quad (2.93)$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{2(\alpha-1)}{\{2(\alpha+\beta)-4\}\{2(\alpha+\beta)-3\}} \quad (2.94)$$

$$\bar{C}_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.95)$$

$$\dot{C}_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.96)$$

$$D_{\alpha\beta} = 4(\alpha-1)(\beta-1)bk_{\alpha\beta} \frac{1}{h+\eta} \quad (2.97)$$

$$\bar{D}_{\alpha\beta} = -4(\alpha-1)(\beta-1)bk_{\alpha\beta} \frac{1}{(h+\eta)^2} \quad (2.98)$$

$$bk_{\alpha\beta} = \left[\frac{1}{2(\alpha+\beta)-3} - \frac{2}{2(\alpha+\beta)-4} + \frac{1}{2(\alpha+\beta)-5} \right] \quad (2.99)$$

$$E_{\alpha\beta} = \frac{4(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-3} \frac{1}{h+\eta} \quad (2.100)$$

$$\bar{E}_{\alpha\beta} = \frac{4(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-3} \frac{1}{(h+\eta)^2} \quad (2.101)$$

$$\hat{E}_{\alpha\beta} = \frac{4(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-3} \frac{1}{(h+\eta)^2} \quad (2.102)$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{2(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-3} \quad (2.103)$$

$$\bar{F}_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.104)$$

$$\hat{F}_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.105)$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{4(\alpha-1)(\beta-1)}{\{2(\alpha+\beta)-4\}\{2(\alpha+\beta)-3\}} \frac{1}{h+\eta} \quad (2.106)$$

$$\bar{G}_{\alpha\beta} = \frac{4(\alpha-1)(\beta-1)}{\{2(\alpha+\beta)-4\}\{2(\alpha+\beta)-3\}} \frac{1}{(h+\eta)^2} \quad (2.107)$$

$$(2.108)$$

また、

$$\frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial h} = 2(\alpha-1) \left(\frac{h+z}{h+\eta} \right)^{2\alpha-3} \frac{(h+\eta) - (h+z)}{(h+\eta)^2} \quad (2.109)$$

となり、 $(\nabla h)^2$ 、および $\nabla^2 h$ の項を無視すると、べき乗型の鉛直分布関数を適用した非線形緩勾配方程式(2.41)、(2.41)は、

$$\begin{aligned} & 1_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + g\eta \\ & + \frac{2(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-3} \frac{1}{(h+\eta)^2} f_{\alpha} f_{\beta} (\nabla\eta)^2 + \frac{4(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-3} \frac{1}{(h+\eta)^2} f_{\alpha} f_{\beta} \nabla\eta \nabla h \\ & - \frac{8(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-3} \frac{1}{h+\eta} (\nabla f_{\alpha}) f_{\beta} \nabla\eta - \frac{4(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-3} \frac{1}{h+\eta} f_{\alpha} f_{\beta} \nabla^2 \eta \\ & + \frac{8(\alpha-1)(\beta-1)}{\{2(\alpha+\beta)-4\}\{2(\alpha+\beta)-3\}} \frac{1}{h+\eta} (\nabla f_{\alpha}) f_{\beta} \nabla h + \frac{4\beta-3}{2\{2(\alpha+\beta)-3\}} \nabla f_{\alpha} \nabla f_{\beta} \\ & + \frac{2(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-3} (\nabla^2 f_{\alpha}) f_{\beta} - \frac{2(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-5} \frac{1}{(h+\eta)^2} f_{\alpha} f_{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} & -1_{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ & + \frac{4(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-3} \frac{1}{h+\eta} f_{\beta} (\nabla\eta)^2 - \frac{8(\alpha-1)(\beta-1)}{\{2(\alpha+\beta)-4\}\{2(\alpha+\beta)-3\}} \frac{1}{h+\eta} f_{\beta} \nabla\eta \nabla h \\ & + \frac{2(\beta-\alpha)-1}{2(\alpha+\beta)-3} \nabla f_{\beta} \nabla\eta - \frac{4(\beta-1)}{\{2(\alpha+\beta)-4\}\{2(\alpha+\beta)-3\}} \nabla f_{\beta} \nabla h \\ & + \frac{4(\alpha-1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-5} \frac{1}{h+\eta} f_{\beta} - \frac{1}{2(\alpha+\beta)-3} (h+\eta) \nabla^2 f_{\beta} + \frac{2(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)-3} f_{\beta} \nabla^2 \eta = 0 \end{aligned} \quad (2.111)$$

となる。ここで、

$$1_{\alpha} = 1 \quad (2.112)$$

である。

さらに、速度ポテンシャルを 2.3.2.3 項のように、

$$\phi \equiv Z_p \nabla h \cdot \nabla f_1 + Z_{\alpha} f_{\alpha} \quad (2.113)$$

とし、

$$Z_p = -(h+z), \quad Z_{\alpha} = \left(\frac{h+z}{h+\eta} \right)^{2(\alpha-1)} \quad (2.114)$$

とする場合は、上述に加え、式(2.52)～式(2.54)に対する係数値として、

$$U_{p\alpha} = \frac{2\alpha - 2}{2\alpha} (h + \eta) \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial U_{p\alpha}}{\partial \eta} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial^2 U_{p\alpha}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (2.117)$$

$$V_{p\alpha} = -\frac{1}{2\alpha} (h + \eta)^2 \quad (2.118)$$

$$\frac{\partial V_{p\alpha}}{\partial \eta} = -\frac{1}{\alpha} (h + \eta) \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial^2 V_{p\alpha}}{\partial \eta^2} = -\frac{1}{\alpha} \quad (2.120)$$

$$Y_{p\alpha} = -1 \quad (2.121)$$

$$\frac{\partial Y_{p\alpha}}{\partial \eta} = 0 \quad (2.122)$$

$$\dot{Z}_p = -\frac{1}{2} (h + \eta)^2 \quad (2.123)$$

$$\frac{\partial \dot{Z}_p}{\partial \eta} = -(h + \eta) \quad (2.124)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{Z}_p}{\partial \eta^2} = -1 \quad (2.125)$$

となる。

本研究では、平面の計算(第3章～第5章)においては、まず、数値計算方法の確立に重点を置き、遡上計算を入れないため、基礎方程式系は2.3.2.1のものを用いた。

断面の計算においては、計算手法そのものは、有川・磯部(1997)に詳しく述べられているため、碎波モデルおよび遡上計算モデルに重点を置いている。碎波モデルに関しては乱流モデルを用いているが、遡上部で不安定になりやすいことから、基礎方程式系は2.3.2.1を用いた(第6章)。その他の章(第7章、第8章)では、遡上を考慮にいたした計算を行い、かつ、精度良く行うためには底面の境界条件も重要であると考えたため、2.3.2.3の方程式系を用いた。

なお、すべての方程式系で、未知数は η 、 $f_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, N)$ の $N+1$ 個であり、方程式もそれと同等数あるために解けることになる。

Chapter 3. 平面における数値計算の方法

3.1 計算方法

3.1.1 基礎方程式の変形

非線形緩勾配方程式を用いた平面波浪場の数値計算に関して、これまでの研究からNewton法を用いた陰的方法では、計算が不安定になることがわかっている(近藤, 1996)。そこで、本研究では陽的に計算する方法を用いる。木村(1998)は鉛直分布関数の項数を2項における陽的計算方法を提案し、Berkoff *et al.*(1982)の円形shoalの計算を行い、実験結果と整合する結果を得ている。その方法にならない計算方法を提案するが、3項以上でも適用可能となるように基礎方程式を変形する。

ここでは、鉛直分布関数としてもっとも単純な

$$Z_\alpha = \left(\frac{h+z}{h}\right)^{2\alpha-2} \quad (3.1)$$

を用いた。基礎方程式を水面変動 $\eta(x, t)$ 、 f_1 、および残りの項の変数 $f_{\beta'}$ に分ける。すると、

$$Z_\alpha = Z_1 + Z_{\beta'} = 1 + \left(\frac{h+z}{h}\right)^{2\beta'-2} \quad (3.2)$$

となる。ただし今後、 $\alpha', \beta', \dots = 2, 3, \dots, N$ とする。その上で改めて方程式を記述すると、

$$\begin{aligned} & Z_1^n \frac{\partial f_1}{\partial t} + Z_{\beta'}^n \frac{\partial f_{\beta'}}{\partial t} \\ & + g\eta + \frac{1}{2} \left(Z_1^n \nabla f_1 + Z_{\beta'}^n \nabla f_{\beta'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_1^n}{\partial z} f_1 + \frac{\partial Z_{\beta'}^n}{\partial z} f_{\beta'} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial Z_1^n}{\partial h} f_1 + \frac{\partial Z_{\beta'}^n}{\partial h} f_{\beta'} \right) \left(Z_1^n \nabla f_1 + Z_{\beta'}^n \nabla f_{\beta'} \right) \nabla h = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & Z_1^n \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ & + \nabla (A_{11} \nabla f_1 + A_{1,\beta'} \nabla f_{\beta'}) - (B_{11} f_1 + B_{1,\beta'} f_{\beta'}) \\ & + (C_{\gamma,1} - C_{1,\gamma'}) \nabla f_{\gamma'} \nabla h + \left(\frac{\partial Z_1^n}{\partial h} f_1 + \frac{\partial Z_{\gamma'}^n}{\partial h} f_{\gamma'} \right) Z_1^n \nabla \eta \nabla h = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & Z_{\alpha'}^n \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ & + \nabla (A_{\alpha',1} \nabla f_1 + A_{\alpha',\gamma'} \nabla f_{\gamma'}) - (B_{\alpha',1} f_1 + B_{\alpha',\gamma'} f_{\gamma'}) \\ & + (C_{1,\alpha'} - C_{\alpha',1}) \nabla f_1 \nabla h + (C_{\gamma',\alpha'} - C_{\alpha',\gamma'}) \nabla f_{\gamma'} \nabla h \\ & + \left(\frac{\partial Z_1^n}{\partial h} f_1 + \frac{\partial Z_{\gamma'}^n}{\partial h} f_{\gamma'} \right) Z_{\alpha'}^n \nabla \eta \nabla h = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。次に、式(3.4)× Z_1^n - 式(3.5)× Z_1^n を計算すると、

$$\begin{aligned} & Z_1^n \{ \nabla (A_{11} \nabla f_1 + A_{1\gamma} \nabla f_\gamma) - (B_{11} f_1 + B_{1\gamma} f_\gamma) \\ & + (C_{\gamma 1} - C_{1\gamma}) \nabla f_\gamma \nabla h \} \\ & - Z_1^n \{ \nabla (A_{\alpha 1} \nabla f_1 + A_{\alpha \gamma} \nabla f_\gamma) - (B_{\alpha 1} f_1 + B_{\alpha \gamma} f_\gamma) \\ & + (C_{1\alpha} - C_{\alpha 1}) \nabla f_1 \nabla h + (C_{\gamma \alpha} - C_{\alpha \gamma}) \nabla f_\gamma \nabla h \} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

となり、式(3.3)、式(3.4)および式(3.6)を連立して方程式を解く、式(3.6)に関しては $N-1$ だけ式の数が存在することになる。

3.1.2 離散化

式(3.3)を次のよう書き改め、

$$\begin{aligned} & Z_1^n \frac{\partial f_1}{\partial t} + Z_{\beta'}^n \frac{\partial f_{\beta'}}{\partial t} + G(\eta, f_1, f_{\beta'}) = 0 \quad (3.7) \\ & G(\eta, f_1, f_{\beta'}) \equiv g\eta + \frac{1}{2} (Z_1^n \nabla f_1 + Z_{\beta'}^n \nabla f_{\beta'})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_1^n}{\partial x} f_1 + \frac{\partial Z_{\beta'}^n}{\partial x} f_{\beta'} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial Z_1^n}{\partial h} f_1 + \frac{\partial Z_{\beta'}^n}{\partial h} f_{\beta'} \right) (Z_1^n \nabla f_1 + Z_{\beta'}^n \nabla f_{\beta'}) \nabla h \end{aligned} \quad (3.8)$$

既知数に*の添え字を用いて、離散化を行うと、

$$Z_1^{n*} \frac{f_1 - f_1^*}{\Delta t} + Z_{\beta'}^{n*} \frac{f_{\beta'} - f_{\beta'}^*}{\Delta t} + G(\eta^*, f_1^*, f_{\beta'}^*) = 0 \quad (3.9)$$

となる。すると f_1 は、

$$f_1 = -\frac{Z_{\beta'}^{n*}}{Z_1^{n*}} f_{\beta'} + \frac{Z_{\beta'}^{n*}}{Z_1^{n*}} f_{\beta'}^* - \frac{\Delta t}{Z_1^{n*}} G + f_1^* \quad (3.10)$$

となり、 f_1 は $f_{\beta'}$ ($\beta' = 2, \dots, N$) を用いて表すことができる。

全体的な計算の流れは Alternate Direction Implicit (ADI) 法を用いる。x 方向の時点 (x sweep) では、式(3.4)、式(3.6)の x 方向空間差分は未知数を用い、y 方向差分は既知数を用い、 $A_{\alpha \beta'}$ などにある η については既知数を用いる。微分になっていない項に関しては未知数と既知数の平均を与えた。このようにすることで、まず、式(3.10)を式(3.6)の離散化式に代入し、 $f_{\beta'}$ について 3 重対角帯行列を用いて解くことができる。そして f_1 を求め、それらを、式(3.4)の離散化式に代入し、 η を求める。

次に y 方向の時点 (y sweep) では、空間差分の離散化について逆に x 方向差分を既知、y 方向差分を未知とし、手順は同様のことをする。

簡単な具体例を示す。式(3.6)の第1項目は、

$$\begin{aligned} & Z_{\alpha'}^n \{ \nabla (A_{11} \nabla f_1 + A_{1\gamma} \nabla f_\gamma) \} \\ & = Z_{\alpha'}^n \{ \nabla A_{11} \nabla f_1 + A_{11} \nabla^2 f_1 + \nabla A_{1\gamma} \nabla f_\gamma + A_{1\gamma} \nabla^2 f_\gamma \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる。さらに、その第1項目のみを取り出すと、

$$Z_{\alpha'}^n \nabla A_{11} \nabla f_1 = Z_{\alpha'}^n \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial A_{11}}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \quad (3.12)$$

となる。x 方向の計算を行う場合、 (i, j) 点では、

$$Z_{\alpha'}^{n*} \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial x} \Big|_{ij} \frac{f_{i+1j} - f_{i-1j}}{2\Delta x} + \frac{\partial A_{11}}{\partial y} \Big|_{ij} \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \quad (3.13)$$

であり、これに式(3.10)を代入し、

$$\begin{aligned} & Z_{\alpha'}^{n*} \frac{\partial A_{11}}{\partial x} \Big|_{ij} \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \left(\frac{Z_{\beta'}^{n*+1j}}{Z_1^{n*+1j}} \right) f_{\beta'+1j} - \left(\frac{Z_{\beta'}^{n*-1j}}{Z_1^{n*-1j}} \right) f_{\beta'-1j} \right\} \\ & + Z_{\alpha'}^{n*} \frac{\partial A_{11}}{\partial x} \Big|_{ij} \frac{1}{2\Delta x} (G_{i+1j} - G_{i-1j}) + Z_{\alpha'}^{n*} \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial y} \Big|_{ij} \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

とする。このように、すべての項に f_1 を代入する。

ここまでの一連の流れを模式的に示したものが図3.1である。図中の \mathcal{H} , \mathcal{F} , \mathcal{J} , \mathcal{K} , および \mathcal{L}

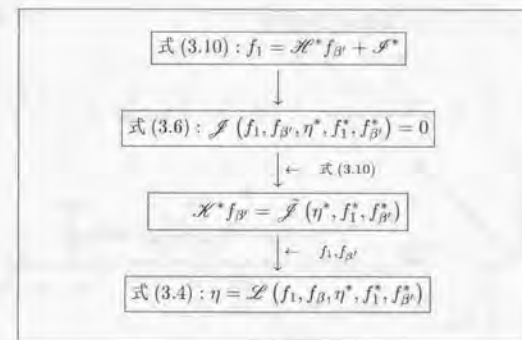


図 3.1: 計算の流れの模式図

は離散化した式もしくは、係数を表す。

3.1.3 既知数の取り扱い

時間発展方程式では、時間に関する微分値を精度良く求められる手法であるかどうか大きな問題となる。つまり、図3.1の \mathcal{H} などの係数を、時間的に整合性があるように計算できればよいわけである。よって、各係数のなかの既知数の評価の仕方が計算アルゴリズムの精度と効率を変えようと考えられる。

もっとも単純なものとしては、単に前時間ステップのものを用いて評価することが考えられるが、単に陽的に ADI 法を用いて計算を行うと、誤差が大きく、長時間計算することは困難であった。

そこで、ADI 法を用いるものの Runge-Kutta 法のように 2 段階法も同時に適用するアルゴリズムを開発する。まず、ADI 法を用いて t から $t + \Delta t/4$ を経て $t + \Delta t/2$ の値を予測する。次に、その予測値を用いて、 t から $t + \Delta t/2$ を経て $t + \Delta t$ の値を求める際に、もう一度 ADI 法を用いる。この場合、1 段階目の ADI 法では x sweep では y 方向の差分に t 時間での既知数を代入する。また、y sweep では逆に x 方向の微分に関して、 $t + \Delta t/4$ 時間での既知数を代入する。

2 段階目の ADI 法では、x sweep では、y 方向の空間差分に 1 段階目で得られた既知数を用い、x 方向の空間差分は未知である $t + \Delta t/2$ での値とする。そして、y sweep では、x 方向の空間差分は $\frac{\Delta t}{2}$ の既知数を用い、y 方向の空間差分には $t + \Delta t$ の未知数を用いた。

全体の流れは図 3.2 に示す通りである。

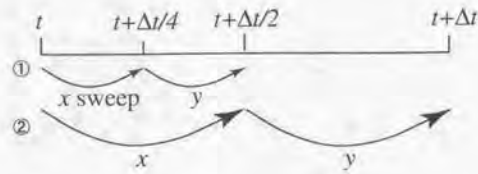


図 3.2: 計算の流れの概念図

3.2 矩形水路における計算精度の検証

3.2.1 概要

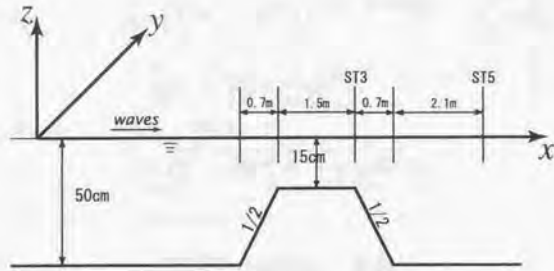


図 3.3: 断面図

浅海域における数値計算を行うため、速度ポテンシャルの鉛直分布関数の項数を2項とした。また、本計算アルゴリズムを使用した際の非線形性および分散性の精度を確かめるために、潜堤による規則波の変形計算を行った。実験は、大山ら(1993)によるものである(図-3.3)。図に示すように、水平方向の座標をx方向、およびy方向とし、x方向を岸沖方向にとり、岸側を正の方向にする。また、z方向は水平面に鉛直にとり静水面を0とする。入射方法は線境界法(石井ら, 1993)を用い、入射点で各変数に、流れ関数法より得られる厳密解を与えることとする(有川・磯部, 1997)。y軸に垂直な側方は完全反射境界を用い、岸側および沖側では、Sommerfeldの透過境界条件を用いた。また、空間格子サイズはL/40、時間間隔はT/400である。

3.2.2 境界条件の離散化の注意点

3.2.2.1 側方境界

側方境界条件の完全反射境界は

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial f_{3y}}{\partial y} = 0 \quad (3.17)$$

で与えられる。離散化は、

$$\eta_1 - \eta_0 = 0 \quad \eta_{y_{max}} - \eta_{y_{max}-1} = 0 \quad (3.18)$$

とした。ほかの境界条件も同じようにする。ここで、0およびy_{max}はy軸方向両端点を表す。2次精度の微分を用いて計算をおこなったところうまくいかなかったためこの方法を採用した。2次精度とは、

$$\eta_2 - \eta_0 = 0 \quad (3.19)$$

とすることをいう。

3.2.2.2 Sommerfeld 境界

境界条件は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + C_x \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

となる。C_xはx方向の線形分散関係式より求められる波速である。それを離散化すると、

$$\frac{\eta_0 - \eta_0^*}{c_x^* \Delta t} + \frac{3\eta_0^* - 4\eta_1^* + \eta_2^*}{2\Delta x} = 0 \quad (3.21)$$

とした。計算が安定するため、η₀のような端点中心の差分にした。また、c_x^{*}は係数であり、

$$1 \text{ 段階目の ADI: } c_x^* = \frac{1}{4}$$

$$2 \text{ 段階目の ADI: } c_x^* = \frac{1}{2}$$

となる。他の変数および端点についても同じである。

3.2.2.3 入射境界

石井ら(1993)が提案した入射境界の概念は、入射側では入射波と放出波になり、放出波側では放出波のみになるというものである。断面の計算でもこの概念で入射境界を行ったが、平面の計算では、用いられる点が異なることに注意する必要がある。式(3.6)を離散化し、式(3.10)を代入すると、具体例として、式(3.14)となる。その中で、

$$Z_{\alpha}^{\eta_j} \frac{\partial A_{1j}}{\partial x} \Big|_{ij} \frac{1}{2\Delta x} (G_{i+1j} - G_{i-1j}) \quad (3.22)$$

の項に注目する。この項には $G_{i+1,j}$ 、および $G_{i-1,j}$ が含まれている。 G は式 (3.8) で表され、その中に微分も含まれる。そうすると、 $G_{i+1,j}$ の場合、微分があるために、 $f_{ni+2,j}^*$ が含まれることになる。つまり、 x sweep の i 点を計算するとき、式 (3.6) の離散式は、

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(f_{\beta i+1,j}, f_{\beta i,j}, f_{\beta i-1,j}) \\ &= \mathcal{F}(\eta_{i+1,j}^*, \eta_{i,j}^*, \eta_{i-1,j}^*, f_{i+2,j}^*, f_{i+1,j}^*, f_{i,j}^*, f_{i-1,j}^*, f_{i-2,j}^*, f_{\beta i+2,j}^*, f_{\beta i+1,j}^*, f_{\beta i,j}^*, f_{\beta i-1,j}^*, f_{\beta i-2,j}^*) \end{aligned} \quad (3.23)$$

となる。よって、図 3.4 のように入射境界を挟んで両側に 2 点ずつの地点で離散式をたてる場合はそれぞれ処理をしなければならない。具体的には、 $inp+1$ の地点の場合、

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(f_{\beta i+1,j}, f_{\beta i,j}, f_{\beta i-1,j}) \\ &= \mathcal{F}(\eta_{i+1,j}^*, \eta_{i,j}^*, \eta_{i-1,j}^*, f_{i+2,j}^*, f_{i+1,j}^*, f_{i,j}^*, f_{i-1,j}^*, f_{i-2,j}^*, f_{\beta i+2,j}^*, f_{\beta i+1,j}^*, f_{\beta i,j}^*, f_{\beta i-1,j}^*, f_{\beta i-2,j}^*) \end{aligned} \quad (3.24)$$

アンダーラインの変数から、位相を考慮した入射値を足せば、すべての点で入射+放出となって計算ができることになる。図 3.4 にその模式図を示す。図の中の黒丸が入射値を加えることを意味し、白の中塗りが入射値を引くことを意味する。

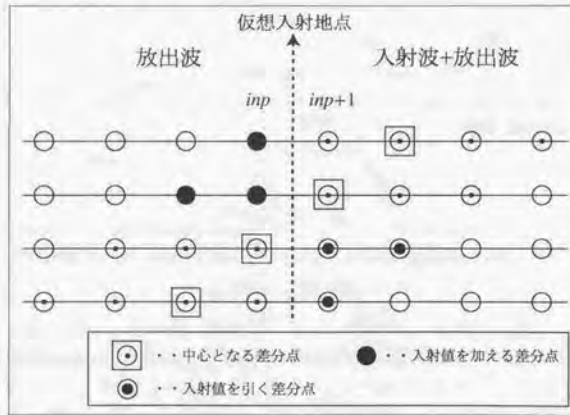


図 3.4: 線境界入射法

3.2.3 計算結果

ST3 および ST5 で実験値と比較を行ったものを図 3.5、および 3.6 にのせる。

2 項でも浅海域では非線形性・分散性がよく表現できていることがわかる。つまり、内部の分布特性をうまく表していることにほかならない。また、計算方法の妥当性を確認した。

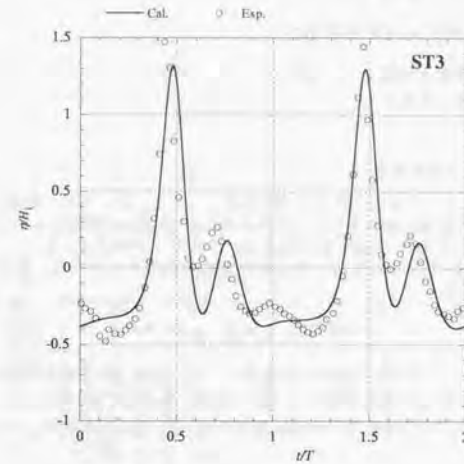


図 3.5: ST3 における実験値との比較

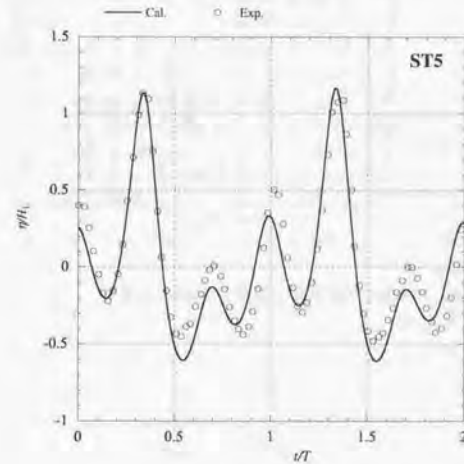


図 3.6: ST5 における実験値との比較

3.3 斜め入射波の計算精度の確認

3.3.1 斜め入射波における入射境界条件

側方境界条件などは斜め入射波でも 3.2.2 項で述べた方法で行う。しかし、入射方法はより複雑になるために、ここで正確に記述する。

3.3.1.1 線境界法における取り扱い

線境界法の考え方のものは平面でも同じでとなる。ここで、用いられる変数の違いから3つのケースに分ける。計算の全体の流れは図 3.1 のようになる。式 (3.10) を離散化したものを用いて、式 (3.6) に代入し、その離散式である式 (3.23) を行列で $f_{i,j}$ を求め、求めた $f_{i,j}$ を式 (3.10) に代入して f_i を求める。そして、式 (3.4) の離散式を用いて水面変動を求めることになる。この際、式 (3.10) および (3.4) の離散化に際しては、

$$\eta_i, \eta_i^*, \eta_{i+1}^*, \eta_{i-1}^*, f_{i+1}, f_{i-1}, \dots \quad (3.25)$$

となり両隣の点しか用いないため、Type A とした。一方、式 (3.23) をみるとわかるように、式 (3.23) に関しては両隣の点のさらに隣の点を用いることになる。ただし、 x sweep の時は x 方向にのみ用いることになる。そのため、式 (3.23) の x sweep 時を Type B、 y sweep 時を Type C、とそれぞれ別のケースに分ける。

3.3.1.2 Type A

式 (3.10) および (3.4) の離散化時の場合である。図 3.7 中から、 x 方向では $npx \sim nex$ の間で入射境界を仮定し、一方 y 方向では、 $npj \sim nej$ の間で仮定されることとする。

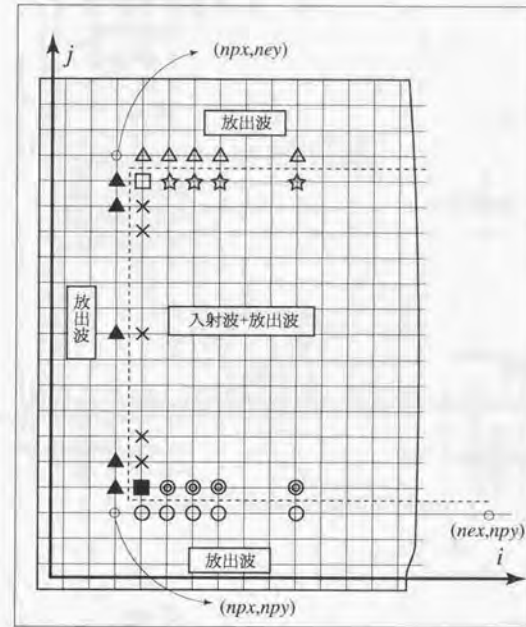


図 3.7: 斜め入射境界の取り扱い (A)

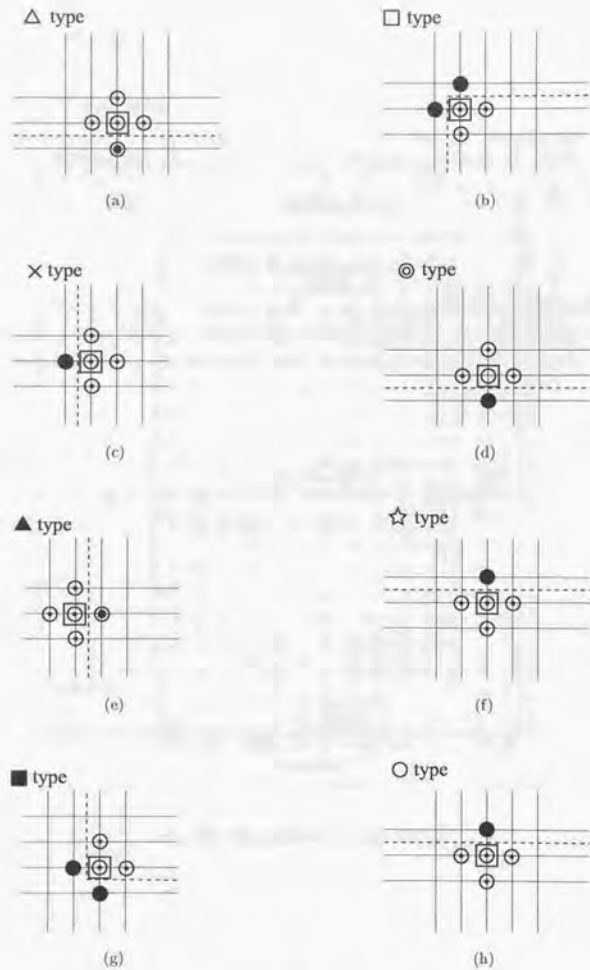


図 3.8: 境界の詳細図 A-1

3.3.1.3 Type B

式 (3.23) の x sweep 時の離散化時の場合である。

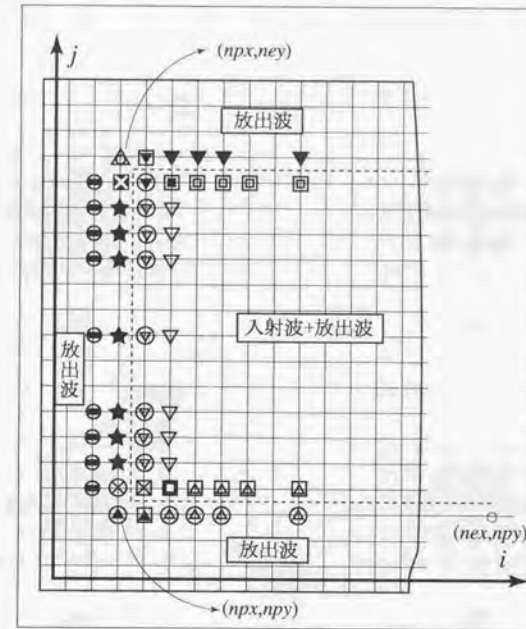


図 3.9: 斜め入射境界の取り扱い (B)

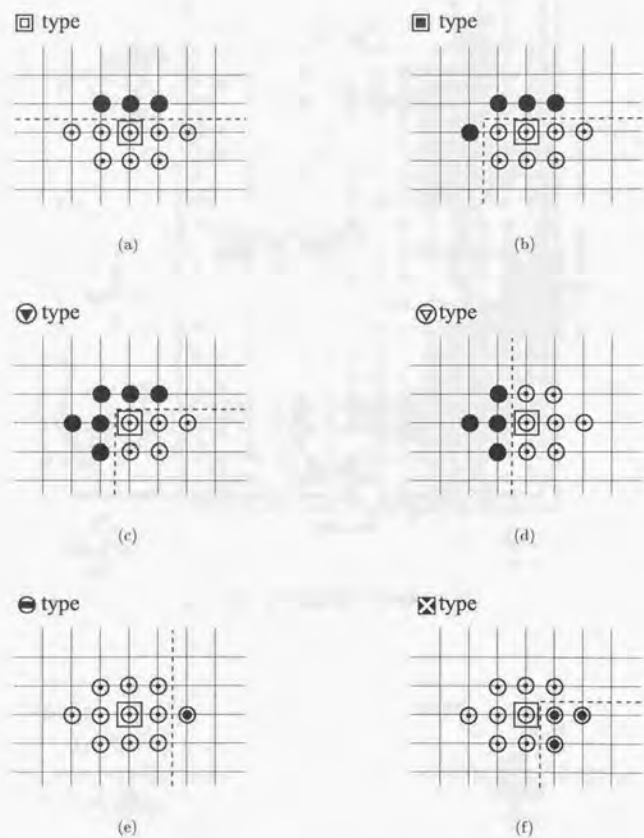


図 3.10: 境界の詳細図 B-1

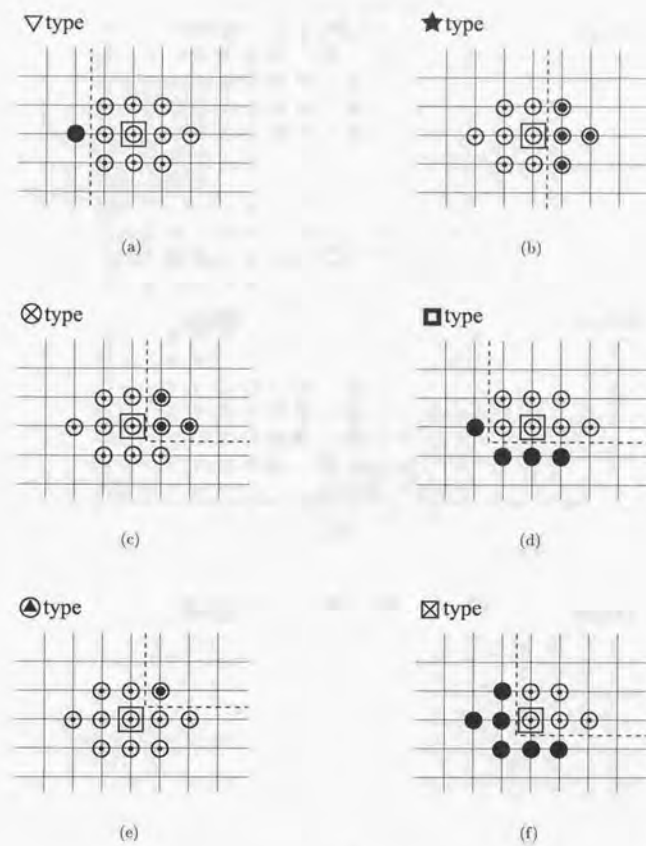


図 3.11: 境界の詳細図 B-2

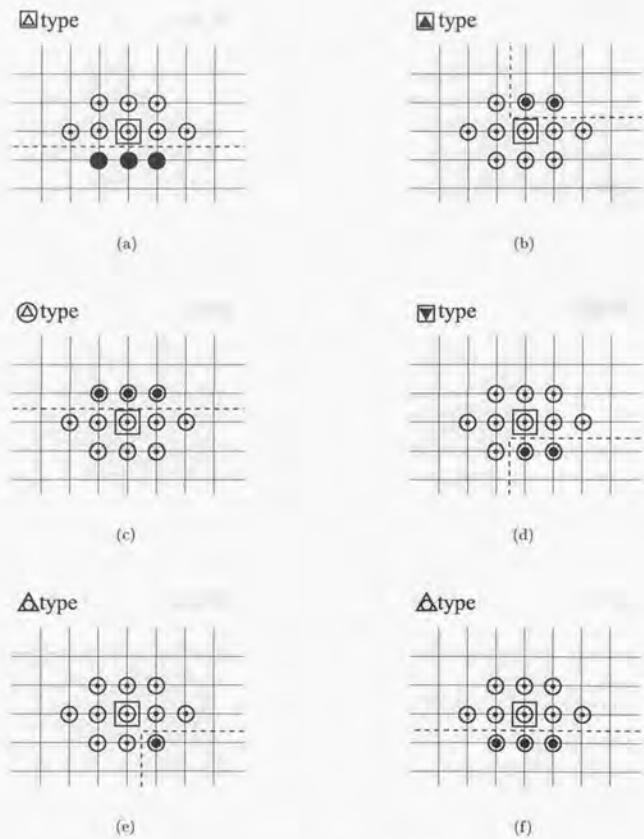


図 3.12: 境界の詳細図 B-3

3.3.1.4 Type C

式 (3.23) の x sweep 時の離散化時の場合である.

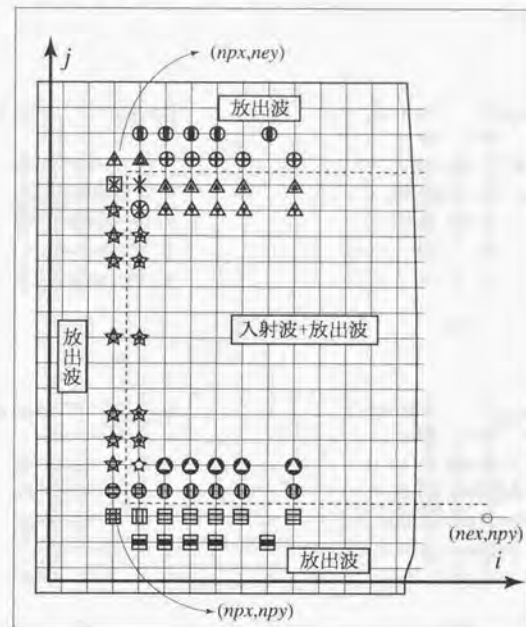


図 3.13: 斜め入射境界の取り扱い (C)

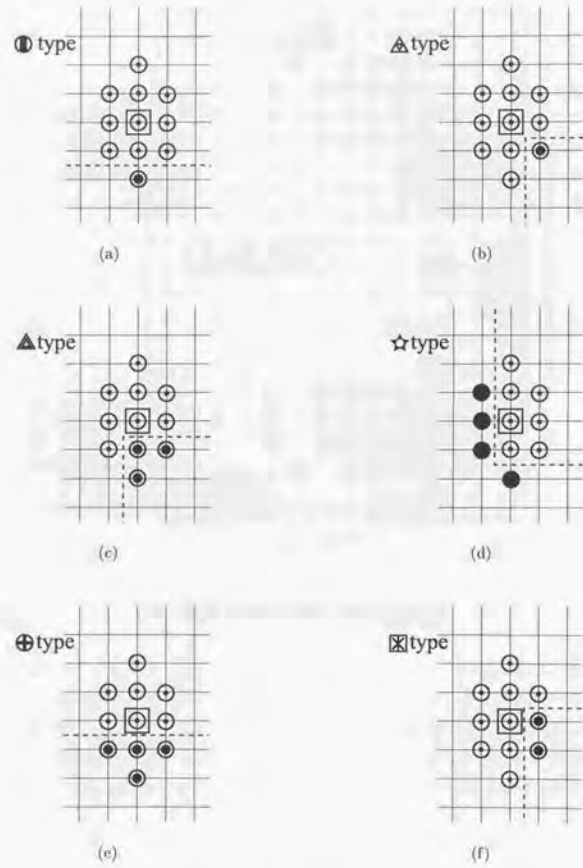


図 3.14: 境界の詳細図 B-3

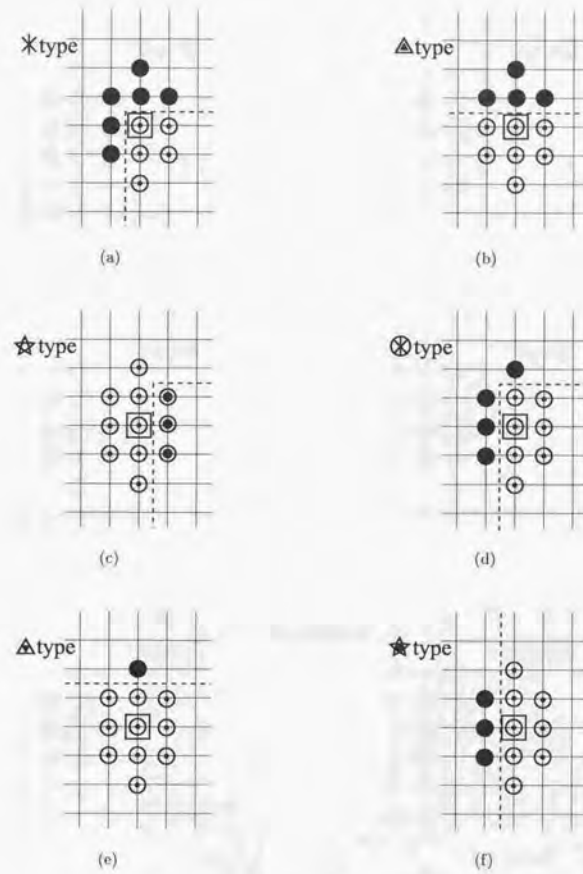


図 3.15: 境界の詳細図 C-1

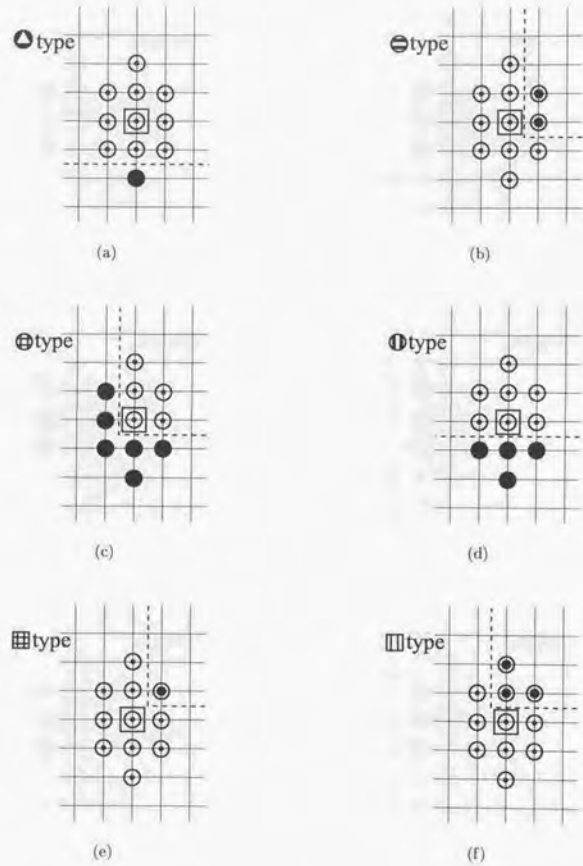


図 3.16: 境界の詳細図 C-2

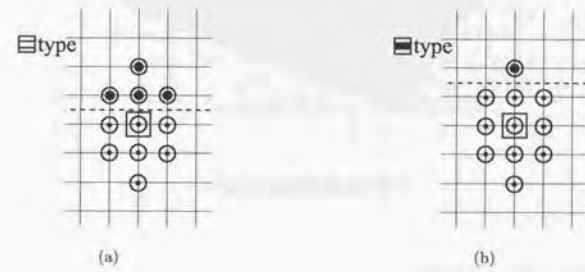


図 3.17: 境界の詳細図 C-3

3.3.1.5 位相の取り扱い

位相の考え方は図 3.18 に示すように、ある入射点の位相は、入射線上の位相と同位相であると考えられる。これは、規則波しか適用できないが、そのように考えることでうまく入射の位相をあわせることができる。ただし、入射する水平距離が長ければ長いほど、計算機での記憶容量を大きくとる必要がある。

この考えに基づき、ある入射点の位相は r 、だけ原点より遅れると考えて、流れ関数法で計算し、それを線境界法における厳密解と考えて代入する。

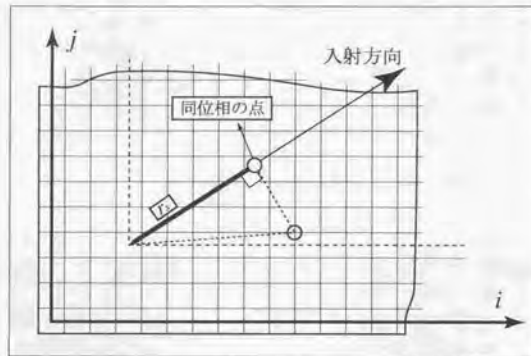


図 3.18: 位相の考え方

3.3.1.6 線形解を境界で与える場合

多方向不規則波に拡張する場合、線形の数値ポテンシャルから求めたものの足しあわせで行うことが現実的である。線形では、

$$\phi = -\frac{H g \cosh k(h+z)}{2 \sigma \cosh kh} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t) \quad (3.26)$$

となる。ここで、 H は波高、 g は重力加速度、 σ は角周波数、 k は波数である。また、入射角を θ とし、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k(x \cos \theta + y \sin \theta) \quad (3.27)$$

とする。

これより、 f_n を求めるため、

$$\cosh k(h+z) = 1 + \frac{(kh)^2}{2!} \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 + \frac{(kh)^4}{4!} \left(1 + \frac{z}{h}\right)^4 + \dots \quad (3.28)$$

と展開し、それぞれの係数を f_n とする。 η に関しては、

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (3.29)$$

とする。

3.3.2 45度の斜め波の入射

ここで、計算方法の確認のために、45度の斜め波の入射を行う。

計算条件は、 $H_1 = 0.01m$, $h = 0.1m$, $T = 2.0s$, $\Delta x = L/25$, および $\Delta t = T/200$ とし、入射角 45度とした。

図 3.19, 3.20 は鳥瞰図と波高比である。線境界法を用いているために、入射境界より外側では波がない。また、エネルギー吸収帯のからの影響により中央付近で反射がみられるもののほぼ一定の波形を形成していることがわかる。

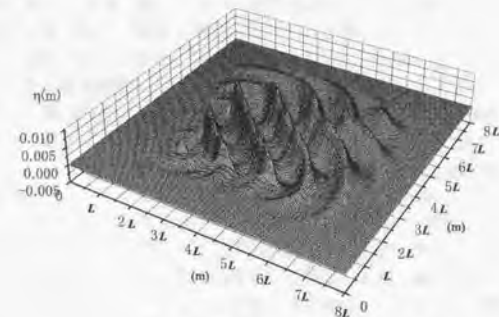


図 3.19: 斜め規則波鳥瞰図

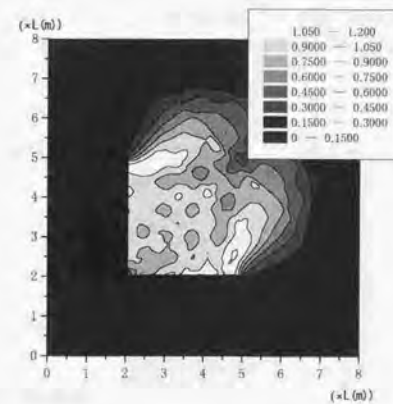


図 3.20: 波高比の等高線

Chapter 4. 周期波の Mach 反射と Stem 波

4.1 概要

構造物に波が斜めに入射する場合、構造物前面では入射波と反射波が共存する波浪場が形成される。特に、入射方向が壁に対してほぼ平行になり、入射する波高が大きい場合、Stem 波と呼ばれる波が形成される。この波は、壁に沿って発達しながら進行するため、その波高の大きさを知ることは、越波などを考えるうえで大切になる。また、その波峰は壁からほぼ垂直に伸び、その長さも進行とともに長くなる。そうすると、壁に垂直に置かれた構造物に大きな影響を与えることになる。このような現象は特に孤立波でよく調べられ、Miles(1977) は波高の比較的小さい場合を理論的に明らかにしている。さらに、波高の大きな場合に関しては Tanaka (1993) が数値計算を行っている。

しかし、周期的な波に対する研究例は少ない。深海域では Stokes 波の解を用いて、Yue and Mei(1980) がその挙動を明らかにしている。浅海域の周期波の Mach 反射に対して、Yoon and Liu(1990) や森屋ら (1995) が、 $(h/L_0 = 0.016)$ を対象として、数値計算を用いて研究している。

Yoon・Liu は水深・波高比 (H/h) が 0.2 および 0.4 について計算を行い、入射角が 20 度以下では角度が大きいくほど壁沿いの波高は大きくなることを示している。また、線形の場合では回折散乱波の影響により、壁沿いの波高が変動するのに対し、 $H/h = 0.4$ の結果になるとその様子は見られない。

それに対し、森屋らは、 $H/h = 0.1$ について計算を行い、入射角が 15 度と 20 度の場合を比べると 15 度の時の方が壁の波高は大きく、また、壁沿いの波高の変動も、線形の場合と比べて緩やかになるものの存在することを確認している。

このような定性的な違いがあるが、定常状態になるまでの距離が長いことから、Stem 波についての実験による検証は困難である。そこで、本研究で開発した計算手法を用いて数値計算を行い、検討することを試みた。また、エネルギーの保存に対する誤差を検討することにより、計算の精度を検証する。

4.2 基礎方程式および境界条件

4.2.1 基礎方程式

鉛直分布関数は、

$$Z_\alpha = \left(\frac{h+z}{h} \right)^{2\alpha-1} \quad (4.1)$$

を用いる。基礎方程式については第 2 章で示す通りである。

4.2.2 境界条件および計算領域

図 4.1 に計算領域の概略を示す。壁の境界は完全反射境界、その他の境界は Sommerfeld 境界であり、離散化については 3.2.2 項で述べた通り行っている。エネルギーの保存則については図-4.1 のなかで示す領域について調べた。入射は 2 本の測線から行った。こうすることで、周期的な波浪場を精度

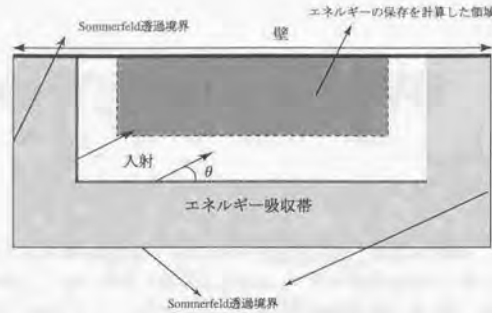


図 4.1: 計算領域の概念図

良く予測することが可能となる。これまで実施されていたような一方方向のみの入射では [森屋 (1996)], 斜め入射を行う場合, 回折が起こり有効領域が狭くなる。

4.3 エネルギーの保存について

4.3.1 エネルギーの保存式

方程式がエネルギーの保存則を満たしているかどうかを考えるために, 図 4.1 に示す領域内でのエネルギーの保存を調べる。図 4.2 はその概念図である。エネルギーフラックスはあらかじめ ρ で除し



図 4.2: 概念図

ておくと,

$$F_x = \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + gz \right\} u \, dz \quad (4.2)$$

$$F_y = \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + gz \right\} v \, dz \quad (4.3)$$

となる。ベルヌーイの定理から,

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + gz \quad (4.4)$$

となることから,

$$F_x = \int_{-h}^{\eta} -\frac{\partial \phi}{\partial t} u \, dz \quad (4.5)$$

$$= - \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dz \quad (4.6)$$

であり,

$$\phi = Z_{\alpha} f_{\alpha} \quad (4.7)$$

を代入すると,

$$F_x = -C_{\beta\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} f_{\beta} \frac{\partial h}{\partial x} - A_{\alpha\beta} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial x} \quad (4.8)$$

となり, 同様に F_y は,

$$F_y = -C_{\beta\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} f_{\beta} \frac{\partial h}{\partial y} - A_{\alpha\beta} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial y} \quad (4.9)$$

であり, それを境界線に沿って積分することによって, 領域内に出入りするエネルギーを計算することができる。また, ここで, $A_{\alpha\beta}$ などは, 第 2 章で示す通りであるものの再掲しておく。

$$A_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} Z_{\alpha} Z_{\beta} \, dz \quad (4.10)$$

$$B_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} \, dz \quad (4.11)$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial h} Z_{\beta} \, dz \quad (4.12)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial h} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial h} \, dz \quad (4.13)$$

波のエネルギー E_w は, 運動エネルギーおよび位置エネルギーであるので,

$$E_w = \iint_D \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + gz \right\} dz \, dA - \iint_D \int_{-h}^0 gz \, dz \, dA \quad (4.14)$$

で計算する。同様に, ϕ を代入すると,

$$\begin{aligned} E_w &= \iint_D \left[\int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + gz \right\} dz - \int_{-h}^0 gz \, dz \right] dA \\ &= \iint_D \left[\frac{1}{2} \left\{ A_{\alpha\beta} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial x} + \left(C_{\alpha\beta} f_{\alpha} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial x} + C_{\beta\alpha} f_{\beta} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + D_{\alpha\beta} f_{\alpha} f_{\beta} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_{\alpha\beta} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial y} + \left(C_{\alpha\beta} f_{\alpha} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial y} + C_{\beta\alpha} f_{\beta} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + D_{\alpha\beta} f_{\alpha} f_{\beta} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_{\alpha\beta} f_{\alpha} f_{\beta} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{2} \eta^2 \right] dA \quad (4.15) \end{aligned}$$

ここでは, 1 周期間での積分量により検証することを考えることにすると,

$$Err = (E_w|_{t+T} - E_w|_t) + \int_t^{t+T} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds \, dt \quad (4.16)$$

となる。ここで、 \mathbf{n} は線分 ds の法線方向となる。1周期の平均エネルギーで無次元化を行うことにより、

$$Err^* = \frac{Err}{E_w} \quad (4.17)$$

誤差を評価することができる。

1次元の積分には台形則を用い、2次元の積分には境界が単純な形をしていることから、まず、一方方向に関して、台形則を用い、次にもう一方の方向について、台形則を適用することにする。軸の定義については、図4.3のようにした。すると、式(4.16)の線積分は、

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_A^B -F_y dx - \int_B^C F_x dy + \int_C^D F_y dx \quad (4.18)$$

となる。

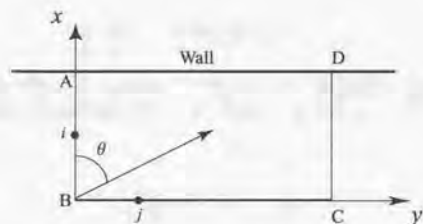


図 4.3: 軸の設定

4.3.2 計算条件

テストケースとして、領域を図4.4のようにした。入射角は45度、周期2s、水深10cm、波高1cm、とした。また、 $\Delta x = L/25$ 、 $\Delta t = T/400$ である。

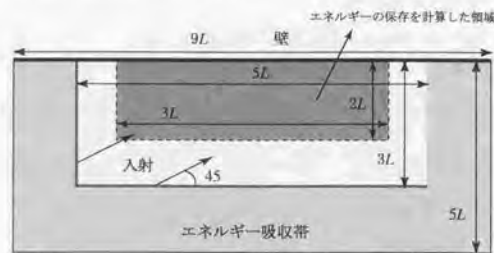


図 4.4: 計算領域(テストケース)

4.3.2.1 結果

結果は次の表4.1のようになった。一つの進行波のエネルギーは、微小振幅波の範囲では、

$$E_{w1} = g \frac{H^2}{8} \quad (4.19)$$

となる。これを図4.5に対して検討すると、平均波向きは y 軸に正の方向であり、エネルギーを計算した領域の波の峰の数を数えると約6個ある。また、波高は重複波になっていることを考えると、平均的に2cm程度であるので、領域内のエネルギーは、

$$E_w \sim \frac{(0.02)^2}{8} \times 6g = 0.00294(m^2/s^2) \quad (4.20)$$

と評価でき、計算により求められた値が妥当であることがわかる。

表 4.1: 周期ごとによる誤差

Period	error(%)	Flux(放出+)(%)	ΔE_w (%)(増加+)	$E_w(m^2/s^2)$
3	0.17	-256.76	256.93	0.000030
4	1.16	-149.95	151.11	0.000225
5	0.11	-94.05	94.16	0.000766
6	-0.06	-55.18	55.12	0.001598
7	-0.31	-24.27	23.96	0.002349
8	0.20	-7.43	7.63	0.002741
9	0.11	0.66	-0.54	0.002806
10	0.12	0.14	-0.02	0.002803
11	0.13	0.16	-0.04	0.002806
12	0.12	0.22	-0.09	0.002802
13	0.13	0.18	-0.05	0.002800
14	0.11	0.10	0.01	0.002803
15	0.18	0.36	-0.18	0.002797
16	0.16	0.61	-0.46	0.002789
17	0.14	0.32	-0.18	0.002784
18	0.13	0.14	-0.01	0.002782
19	0.12	0.05	0.07	0.002778
20	0.18	0.06	0.12	0.002778
21	0.16	-0.20	0.35	0.002785
22	0.08	-0.22	0.31	0.002797
23	0.07	0.03	0.03	0.002808
24	0.15	0.40	-0.25	0.002801
25	0.24	0.68	-0.44	0.002794
26	0.21	0.47	-0.26	0.002782
27	0.14	0.01	0.13	0.002780
28	0.15	-0.11	0.26	0.002782

次のページへ

表 4.1 の続き				
Period	error(%)	Energy Flux(%) (放出+)	ΔE_w (%) (増加+)	E_w (m^2/s^2)
29	0.22	0.10	0.12	0.002785
30	0.26	0.22	0.05	0.002787
31	0.25	0.10	0.15	0.002789
32	0.22	0.01	0.21	0.002799
33	0.19	0.07	0.12	0.002803
34	0.18	0.21	-0.03	0.002807
35	0.20	0.38	-0.18	0.002803
36	0.24	0.46	-0.23	0.002796
37	0.27	0.36	-0.09	0.002789
38	0.31	0.21	0.10	0.002787
39	0.34	0.06	0.28	0.002795
40	0.38	-0.04	0.43	0.002809
41	0.45	0.00	0.45	0.002821
42	0.55	0.16	0.39	0.002834
43	0.67	0.31	0.36	0.002847
44	0.85	0.41	0.44	0.002861
45	1.07	0.42	0.65	0.002879
46	1.39	0.37	1.02	0.002904
47	1.83	0.35	1.48	0.002940
48	2.42	0.36	2.07	0.002988
49	3.24	0.32	2.92	0.003055
50	4.28	0.12	4.16	0.003150

4.3.2.2 Test Case における考察

38 周期程度より、領域全体のエネルギーは増加しているにもかかわらず、放出量はほぼ変化がなく、計算領域内でエネルギーが蓄積されている。この様子を見るために、35 周期目の波形の全体図および、45 周期目の全体図を図 4.5、4.6 にそれぞれ示す。45 周期目で明らかに x 方向の振動が増幅されているのがわかる。

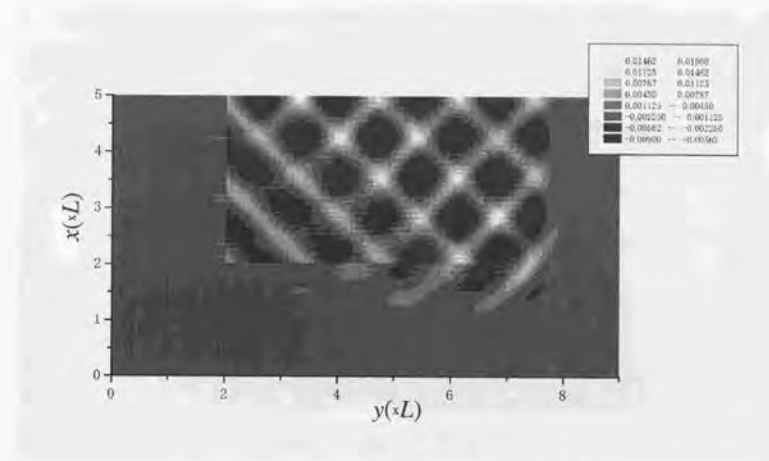


図 4.5: 35 周期目

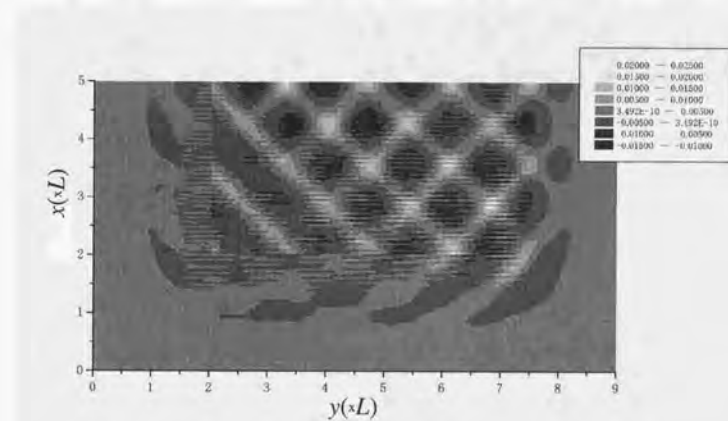


図 4.6: 45 周期目

4.4 Mach 反射・Stem 波の計算

4.4.1 計算領域

計算領域を図 4.7 に示す。 $\Delta x, \Delta y = L/25$, $\Delta t = T/500$ とした。Stem 波の発達を追うために計算領域を長くする。

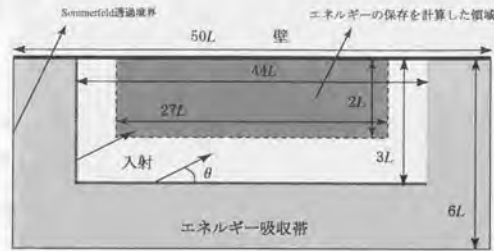


図 4.7: 計算領域 (Mach 反射)

4.4.2 線形条件での入・反射波浪場の比較

線形理論のもとで半無限の長さを持つ鉛直壁に規則波が斜めに入射し反射されてできる波浪場は、Helmholtz 方程式により表される。そこで、その解と本計算との比較を行う。計算条件は $h = 0.1\text{m}$, $H_i/h = 0.001$, $T = 2.0\text{s}$, および入射角を 45 度とする。

図 4.8 は壁沿いでの波高比の変動を示している。これによると回折散乱波の影響をうまく計算で再現していることがわかり、線形理論が適用できる条件における本計算法の妥当性を確認することができた。

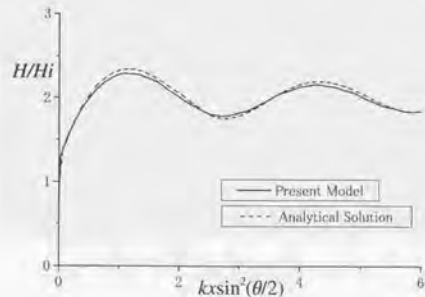


図 4.8: 線形解との比較 ($T = 2.0\text{(s)}$, $H_i/h = 0.001$, $h = 0.1\text{(m)}$)

4.4.3 非線形条件での入・反射波浪場の比較

4.4.3.1 計算条件および概観

計算条件は波高 1cm, 周期 2s, 水深 10cm, および $\Delta x, \Delta y = L/25$, $\Delta t = T/500$ とした。

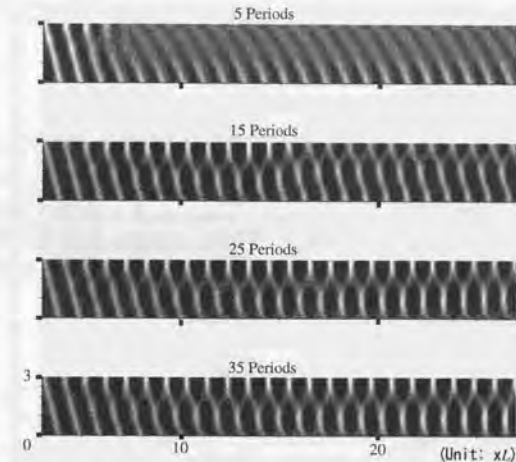


図 4.9: 波形の変化の様子 (5 周期~35 周期)

まず、波浪場の形成過程を知るために、各周期ごとのある瞬間の波形を描いた図を示した (図-4.9)。このときの入射角は 15 度である。縦横の単位は波長である。縮尺は 1:1 であるので、実際に θ は 15 度となっている。また、色が白くなるほど、水位が高くなっている。この結果から、時間とともに波峰線が延びていく様子がよくわかる。

4.4.3.2 エネルギーの保存について

結果は表 4.2 の様になった。

表 4.2: 周期ごとによる誤差

Period	error (%)	Flux (放出+) (%)	ΔE_w (%) (増加+)	\bar{E}_w (m^2/s^2)
3	-1.249	-199.518	198.270	0.000047
4	-1.306	-137.899	136.593	0.000242
5	-1.391	-108.367	106.976	0.000826
6	-1.248	-67.993	66.745	0.001944
7	-1.248	-51.032	49.784	0.003449
8	-1.621	-45.585	43.964	0.005539

次のページへ

表 4.2 の続き				
Period	error(%)	Energy Flux(%) (放出+)	ΔE_w (%) (増加+)	\bar{E}_w (m^2/s^2)
9	-1.638	-37.218	35.580	0.008265
10	-1.587	-28.353	26.766	0.011242
11	-1.520	-22.284	20.765	0.014198
12	-1.532	-20.396	18.864	0.017286
13	-1.477	-18.115	16.638	0.020651
14	-1.473	-15.423	13.951	0.024057
15	-1.371	-12.877	11.506	0.027301
16	-1.384	-10.687	9.304	0.030267
17	-1.346	-8.835	7.489	0.032892
18	-1.354	-7.296	5.942	0.035155
19	-1.335	-6.046	4.711	0.037057
20	-1.335	-5.078	3.742	0.038636
21	-1.355	-4.304	2.948	0.039937
22	-1.349	-3.689	2.340	0.040999
23	-1.328	-3.145	1.817	0.041853
24	-1.313	-2.780	1.467	0.042535
25	-1.305	-2.510	1.205	0.043099
26	-1.299	-2.407	1.108	0.043596
27	-1.299	-2.329	1.029	0.044057
28	-1.301	-2.258	0.958	0.044491
29	-1.304	-2.135	0.831	0.044888
30	-1.305	-2.012	0.708	0.045235
31	-1.306	-1.900	0.594	0.045524
32	-1.304	-1.745	0.441	0.045755
33	-1.297	-1.552	0.255	0.045917
34	-1.286	-1.370	0.085	0.045994
35	-1.281	-1.401	0.120	0.046036
36	-1.286	-1.555	0.269	0.046109
37	-1.280	-1.266	-0.014	0.046117
38	-1.260	-0.797	-0.463	0.045966
39	-1.245	-0.740	-0.506	0.045774
40	-1.243	-0.991	-0.252	0.045655
41	-1.242	-1.273	0.031	0.045645
42	-1.230	-1.322	0.092	0.045686
43	-1.215	-1.338	0.123	0.045741
44	-1.195	-1.307	0.112	0.045795
45	-1.169	-1.263	0.094	0.045836
46	-1.129	-1.229	0.100	0.045868
47	-1.076	-1.214	0.138	0.045904

次のページへ

表 4.2 の続き				
Period	error(%)	Energy Flux(%) (放出+)	ΔE_w (%) (増加+)	\bar{E}_w (m^2/s^2)
48	-1.019	-1.217	0.198	0.045956
49	-0.972	-1.225	0.254	0.046039
50	-0.929	-1.237	0.309	0.046162

この結果からわかるように、計算領域内でエネルギーが数値的に減少もしくは増加するということがないことを示している。

4.4.3.3 壁沿いの波高の変化の角度による違い

図 4.10 に入射角による波高の変化を示す。これからわかることは、入射角度が小さくなるに従い、波高の変化はより緩慢になるということである。また 35 度や 45 度はほぼ線形解と等しいことがわかる。つまり、35 度より大きいところでは、通常の反射現象であることがわかる。それぞれの最大波高を見ると、図 4.11 の様になり、Mach 反射の起こると考えられる範囲では、最大波高はほぼ単調に増加することがわかる。(ただし、10 度については、計算領域が相対的に非常に小さくなるため、定常解を得るまでの領域をとることができず、 $kx \sin^2(\theta/2) = 1.0$ の値をとっている。)

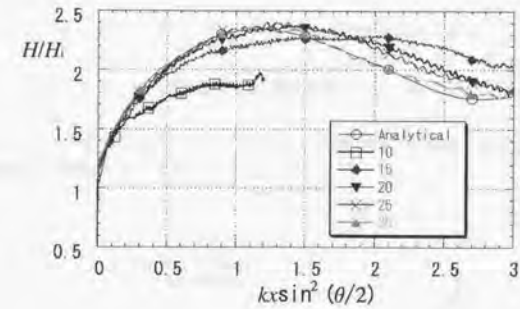


図 4.10: 壁沿いの波高の変化の入射角による違い

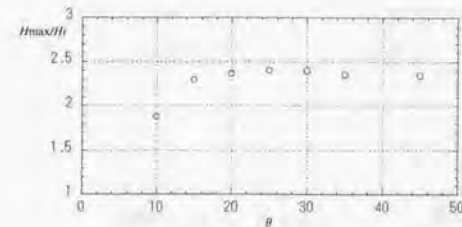


図 4.11: 波高の最大値の比較

これから言えることは、森屋 (1996) の結果は 15 度においては波高比が 2.7 程度、20 度においては 2.5 程度と少し過大に算出していることがわかる。また、波高の変動は緩やかにはなるもの起こっていることがわかる。

Chapter 5. 任意反射率を持つ構造物周りの波浪場の計算

5.1 任意の反射率を持つ境界の取り扱い

5.1.1 概念

構造物前面には消波ブロックを置き、構造物に対する負荷を小さくすることが多い。消波ブロックはその形状から吸収率も様々であるが、ここでは、任意の反射率を取り扱うことを可能にすることで、そのような構造物系にも適用できるようにする。

具体的には、エネルギー吸収帯による強制的な減衰方法を用いる場合、吸収帯前面より数値的な反射を起こす。その反射を制御することにより、任意の反射率を持つ境界を構築する。

エネルギーの吸収方法は、吸収帯内で変数を定数 μ で割ることで、変数を減少させる方法を用いる。波の進行方向を x とし、 μ を、

$$\mu(x) = \begin{cases} \exp[2^b((x-x_{\max})/\Delta x) - 2^b(x_s-x_{\max})/\Delta x] \ln a & \text{for } x_s \leq x \leq x_{\max} \\ 1 & \text{for } x < x_s \end{cases} \quad (5.1)$$

のようにする¹。 a は 2.0 とした。 x_s は吸収帯を始める場所、 x_{\max} は岸側の境界点、 b は定数の勾配を決定するパラメタである。

具体的には、図 5.1 のような変化をすることになる。この図では、吸収帯の長さは 2 波長、 $\Delta x = L/25$ とし、また 0 は吸収帯を開始する点であることを示す。

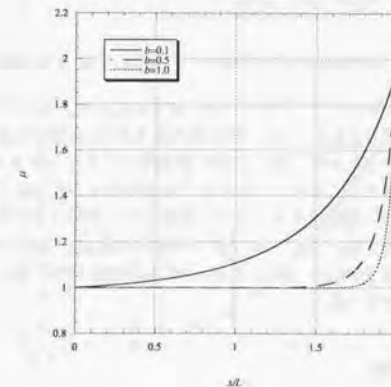


図 5.1: μ の b に関する変化

¹有川、磯部 (1998) でのこの関数の記述に誤りがある。この論文の記述の方が正しい

5.1.2 計算方法

式(5.1)での b および吸収帯の長さ($x_{max} - x_b$)を変化させることによる反射率の違いを計算する。線境界法の特徴として、入射点より沖側では反射波のみが現れることから、反射率の推定は、そこでの波高を求めて行った。計算は一様水深、矩形水路で行い、側方は完全反射境界とする。また、計算に用いた波の諸量は、 $H_i = 0.01m$, $h = 0.1m$, および $T = 2.00s$ とし、空間格子サイズ Δx , Δy を $L/25$, 時間間隔 Δt を $T/400$ とした。

5.1.3 推定結果および考察

5.1.3.1 推定結果

まず、岸側に吸収帯を用いず透過境界のみを用いて計算したところ、入射境界より沖側では波高比の平均は0.009であり、有意な反射なしに透過していることを確認した(図5.2)。

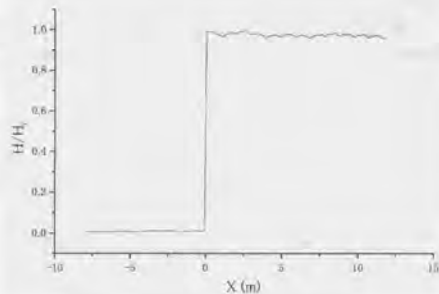


図 5.2: Sommerfeld 型の境界のみを用いた場合の波高変化

次に岸側境界を完全反射境界として、 $b = 0.1 \sim 2.0$ まで変化させ、吸収帯の長さを L_i , $2L_i$, $3L_i$ とし、反射率を計算した。図5.3は $b = 1.0$, 吸収帯の長さが L_i の場合の波高比である。これを見ると反射波の波高は一樣であることから上述の方法の妥当性を示すものである。

反射率をまとめたものを図5.4に示す。これより、吸収帯の長さを固定すると、反射率は極値を持ち、吸収帯の長さが長いほど、極値は小さくなり、極値より大きい b をとると反射率は吸収帯の長さによらず、また吸収帯の長さが長いほど、より広く反射率の設定が可能であることもわかる。また、時間間隔を長くして同じ計算をおこなったところ、 $\Delta t = T/200$ の時は、反射率は1割ほど小さくなったが傾向はほぼ変化しなかった。

5.1.3.2 反射率に対する考察

吸収帯の長さおよび、 b に対する反射率の結果から、 Δx などの変化がどのように影響するかという点は興味のあるところである。まず、 $b = 1.0$ とした時と、 $b = 0.3$ としたときの μ の変化を示したものが、図5.5, 5.6である。このとき $\Delta x = L/25$ とした。

反射率では、 $b = 1.0$ の時ほどの長さでも反射率は同じであり、 $b = 0.3$ の時1波長の時のみ大き

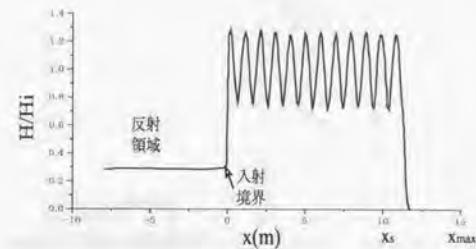


図 5.3: 反射率計算例

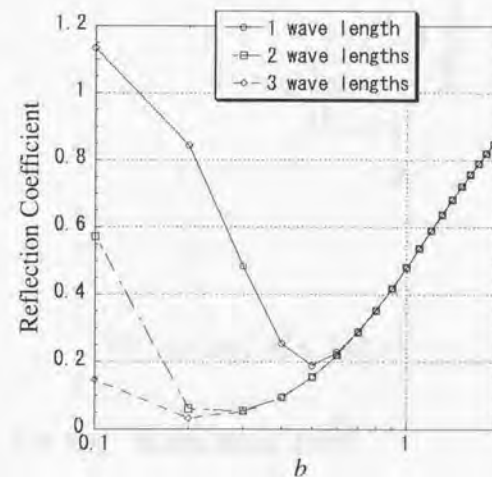


図 5.4: 反射率 ($\Delta x = L/25, \Delta t = T/400$)

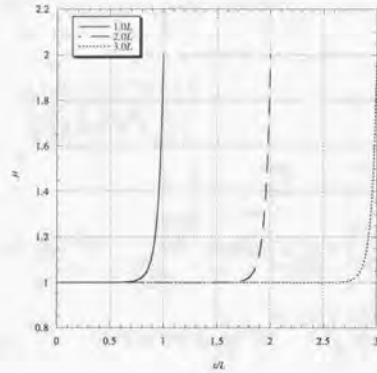


図 5.5: μ の波長に関する変化 ($b = 1.0$)

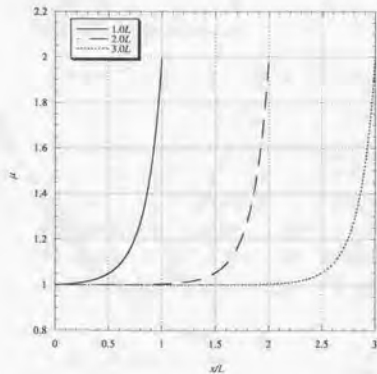


図 5.6: μ の波長に関する変化 ($b = 0.3$)

く反射率が異なる。図 5.5, 5.6 からわかることは、 $b = 1.0$ の時には、ほんの少しの距離で係数が大きくなっているため、2 波長や 3 波長あっても実質 1 波長と同じであることがわかる。ただ、どの程度の大きさから有意に減衰に効いてくるのかということに関しては波高や水深によって違うことが予測される。

次に Δx が変化することによる効果を考える。 $x_0 \leq x \leq x_{\max}$ では、

$$\mu(x) = \exp[(2^{b((x-x_{\max})/\Delta x)} - 2^{b(x-x_{\max})/\Delta x}) \ln a] \quad (5.2)$$

であり、これを、 L を波長として、

$$x = \hat{x}L \quad x_0 = \hat{x}_0L \quad x_{\max} = \hat{x}_{\max}L \quad \Delta x = \frac{L}{n_x} \quad (5.3)$$

とすると、

$$\mu(x) = \exp[(2^{bn_x(\hat{x}-\hat{x}_{\max})} - 2^{bn_x(\hat{x}-\hat{x}_{\max})}) \ln a] \quad (5.4)$$

となる。ここで、 n_x は波長の空間分割数を表す。このことから、分割数が 2 倍になると、 b を半分にしたときの反射率と同じになると考えられる。図 5.7 は、 $b = 0.5$ 、吸収帯の長さを $2L$ としたときの空間分割数による μ の違いである。これをみてもわかるように、 $\Delta x = L/50$ の形状は $b = 0.1$ の形状と一致する。ただし、これに伴い、 Δt も細かくする必要がある、その影響もあるものの、5.1.3.1 項で述べたように、大きくは変化しないため、この考え方である程度の予測は可能となる。

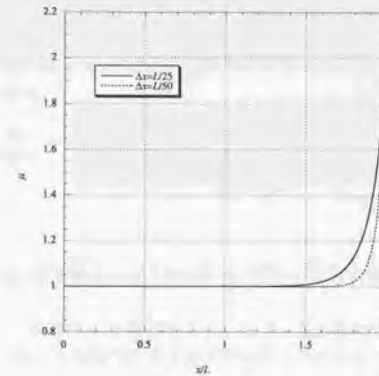


図 5.7: μ の Δx に関する変化 ($b = 0.5$)

5.2 任意の反射率を持つ構造物周辺の波浪場

5.2.1 計算条件

計算条件は、波高 1 cm, 周期 2 s, 水深 10 cm, $\Delta x(\Delta y) = L/25$, $\Delta t = T/500$ とする。 $b = 1.0$ である吸収帯を壁の前面に 1 波長設置した。この条件での反射率は 0.5 程度である。この時の全体図を図 5.8 に示す。

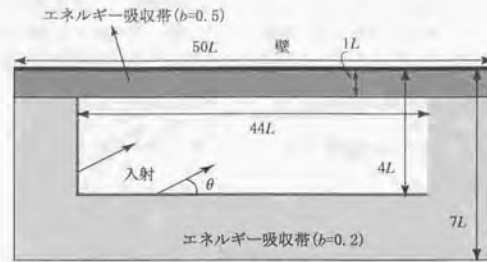


図 5.8: 計算領域 (反射率を持つ構造物)

5.2.2 結果および考察

入射角を 15 度と 45 度との結果を図 5.9 に示す。白い部分が水位の高い部分を示している。反射波の波長が短くなっていることがわかる。また、15 度のときに波峰線が伸びていることがわかる。

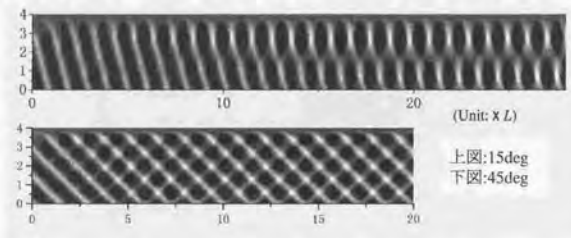


図 5.9: 入射角 15 度および 45 度の時の波形の等高線 (吸収帯あり)

また、吸収帯前面に沿った波高の違いを表したものが図 5.10 である。これを見ると、45 度の時は、位相がずれ、変動は小さくなるものの、解析解と同じように変動するが、15 度の時は、Mach 反射のような挙動を示すことがわかる。

これらより、消波効果のあるような壁沿いにおいても、Mach 反射のような現象がみられることがわかる。

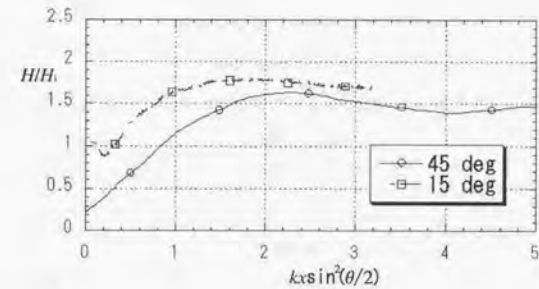


図 5.10: 壁沿いの波高の変化の違い (吸収帯あり)

Chapter 6. 碎波減衰項の提案

6.1 碎波減衰項の導出

流速を回転成分と非回転成分にわけ、

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + U_i \quad (6.1)$$

とし、 U_i を回転成分とする。

Mei(1985)によれば、力学的境界条件は法線方向、接線方向ともに、

$$\{-p\delta_{ij} + \tau_{ij}\}n_j = \{-p\delta_{ij} + \tau_{ij}\}_{air}n_j \quad (z = \eta) \quad (6.2)$$

となる。ここで、大気側の圧力や応力が0であることから、

$$\{-p\delta_{ij} + \tau_{ij}\}n_j = 0 \quad (6.3)$$

となる。 τ_{ij} は Navier-Stokes 方程式から、粘性および Reynolds 応力を考慮し、

$$\tau_{ij} = \mu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.4)$$

ここで、 μ_e は、

$$\mu_e = \mu + \mu_t \quad (6.5)$$

とし、 μ_t は渦動粘性係数とする。

これより、接線方向の応力

$$\mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.6)$$

とすると、表面の法線方向には、

$$-p + \tau_{33} = -p + 2\frac{\mu_e}{\rho} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.7)$$

となる。ここで圧力として、

$$p = -\rho g z + p_d = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \right)^2 \quad (6.8)$$

とする。ここで、 p_d は動圧となる。そうすると、表面の境界条件として、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \right)^2 + 2\frac{\mu_e}{\rho} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (z = \eta) \quad (6.9)$$

が得られる。連続式を用いると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \right)^2 - 2\frac{\mu_e}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6.10)$$

となる。ここで、回転成分を小さいとすると¹,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2}(\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\mu_s}{\rho} \nabla^2 \phi = 0 \quad (z = \eta) \quad (6.11)$$

となる。ここで、

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad (6.12)$$

となる。これにより、碎波減衰項が導出できたことになる。

6.2 拡散係数 ν_f のモデル化

6.2.1 エネルギー逸散と拡散係数

式(6.11)が力学的境界条件と等価であることを念頭において、流線方向を s とし、その s 方向に微分する。すると式(6.11)は、流線方向の速度を v_s として、

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} v_s^2 \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial M_d}{\partial s} = 0 \quad (6.13)$$

となる。ここで、

$$M_d = -\nu_f \nabla^2 \phi \quad (6.14)$$

$$\nu_f = 2 \frac{\nu_c}{\rho} \quad (6.15)$$

式(6.13)は、微小長さ ds 当たりに損失 dM_D がある場合の式に相当する。ところで、2次元定常の場合の碎波によるエネルギーの変化率は、

$$\frac{dEC_g}{dx} = - \left[\frac{dE}{dt} \Big|_{z=h} + \frac{dE}{dt} \Big|_{z=\eta} \right] \quad (6.16)$$

となる [Le Méhauté(1963)]。ここで、 E は波動エネルギー、 C_g は群速度である。これと、式(6.13)を比べることにより、減衰係数 ν_f とエネルギー逸散率の関係付けを行う。

まず、式(6.13)の非定常項を無視し、

$$E = \frac{1}{2} v_s^2 + g\eta \quad (6.17)$$

とすると、

$$\frac{dE}{ds} + \frac{dM_d}{ds} = 0 \quad (6.18)$$

となる。碎波点付近では浅海域であるために、 $C_g \approx C$ として、波速 C を乗すると、

$$C \frac{dE}{ds} + C \frac{dM_d}{ds} = 0 \quad (6.19)$$

となる。さらに、波速の変化はエネルギーの変化に比べて小さいと考えると、

$$\frac{dEC}{ds} + \frac{dCM_d}{ds} = 0 \quad (6.20)$$

が得られ、第2項目がエネルギーの逸散率と考えることができる。

¹この仮定については、将来的にはなくす予定である。

エネルギー逸散率を ϵ_c とすると、

$$\frac{dCM_d}{ds} = \epsilon_c \quad (6.21)$$

となる。これより、オーダーの評価から ν_f と ϵ_c とを関係づける。 M_d についている負の符号は、 ϕ の2階微分を含むためであるので、係数のオーダーには無関係であるので無視すると、

$$O \left(\frac{d}{ds} \left(C \nu_f \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial x^2} \right) \right) \sim O(\epsilon_c) \quad (6.22)$$

となる。ここで、 s 方向の代表長さに振幅 a 、 x 方向の代表長さに波長 L 、代表速度を C とすると、

$$O \left(\frac{d}{ds} \left(C \nu_f \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial x^2} \right) \right) \sim O \left(\nu_f \frac{C C}{a L} \right) \sim O \left(\nu_f \frac{C}{a T} \right) \quad (6.23)$$

となる。ここで、 T は周期である。碎波帯内では、 $C \sim \sqrt{gh}$ 、 $a \sim h$ であることを考えて、結局、 $\gamma \nu_f$ を係数として、

$$\nu_f = \gamma \nu_f \sqrt{\frac{h}{g}} T \epsilon_c \quad (6.24)$$

という関係を得ることができる。

6.2.2 逸散エネルギーの収支式

機械的エネルギーに熱エネルギーを加えた全エネルギーは保存される。碎波後、渦によってできる回転成分の流速の持つエネルギーを回転エネルギーと呼ぶことにすると、全エネルギーは波、回転、乱れ、熱エネルギーに分類することができる。そこで、波エネルギーの逸散率は回転エネルギー、乱れエネルギー、熱エネルギーの増加率の和で表され、

$$\epsilon_c = \frac{DE_w}{Dt} + \frac{DE_k}{Dt} + \epsilon \quad (at \ z = \eta) \quad (6.25)$$

となる (図 6.1)。ここで、 E_w は回転エネルギー、 E_k は乱れエネルギー、 ϵ は熱からのエネルギー逸散率である。

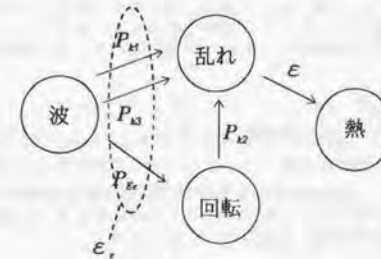


図 6.1: エネルギー収支の概念図

乱れエネルギーは、今回は 1 方程式モデルを用い、

$$\begin{aligned} \frac{DE_k}{Dt} &= \frac{\partial E_k}{\partial t} + \mathbf{u}^0 \cdot \text{grad} E_k \quad (at \ z = \eta) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_k \frac{\partial E_k}{\partial x} \right) + P_{k1} + P_{k2} + P_{k3} - \epsilon \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\epsilon = C^* \frac{E_k^3}{l_k} \quad (at \ z = \eta) \quad (6.27)$$

$$\nu_k = E_k^{\frac{1}{2}} l_k \quad (6.28)$$

とした。ここで、 l_k は乱れの代表長さ、 C^* および σ_k はパラメタ、 P_{k1} 、 P_{k2} および P_{k3} はそれぞれ、ポテンシャル流、回転流れ、および外的要因による乱れの生成項である。これらについては後述する。次に回転エネルギーは、乱れエネルギーの式を参考に

$$\frac{DE_w}{Dt} = P_{E_c} - P_{k2} \quad (at \ z = \eta) \quad (6.29)$$

とした。ここで、 P_{E_c} はポテンシャル流から回転流への変換率である。

6.2.3 生成項について

生成項は基本的には、乱れの方程式により導かれている、

$$P_k = \frac{1}{2} \nu_k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (for \ i, j = 1, 2) \quad (6.30)$$

を基本に用いる。ここで、 $x1 = x$ 、 $x2 = z$ である。これを参考に、ポテンシャル流による生成項 P_{k1} は、 γ_{k1} を係数として、

$$P_{k1} = \gamma_{k1} \nu_k \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)^2 \right] \quad (at \ z = \eta) \quad (6.31)$$

となる。また、回転流による生成項 P_{k2} は、回転エネルギー E_w および回転の代表長さ l_w を用いて、

$$P_{k2} = \gamma_{k2} \nu_k \frac{E_w}{l_w^2} \quad (at \ z = \eta) \quad (6.32)$$

とした。ここで、 γ_{k2} は係数である。

次に P_{k3} 、および P_{E_c} について述べる。碎波点より水粒子は波形から飛び出て、また波形の中に戻るという現象を繰り返すと考える。そこで、水粒子が持っているポテンシャルエネルギーおよび水平方向の運動エネルギーが、乱れや回転エネルギーに変化すると考え、次の様に定式化した。

$$P_{k3} = \gamma_{k3} \frac{n}{T} g (\eta_b - \eta) \quad (6.33)$$

$$P_{E_c} = \frac{1}{2} \frac{n}{T} (C_b - u^0)^2 + (1 - \gamma_{k3}) \frac{n}{T} g (\eta_{crest} - \eta) \quad (6.34)$$

$$(at \ z = \eta; x_b < x < x_{b+l_b})$$

ここで、 η_b 、 C_b 、および x_b は碎波点での水面変動、波速、および水平方向座標である。また、 γ_{k3} は係数であり、水粒子の持つポテンシャルエネルギーが各エネルギーに変換される割合を表す。 x_{b+l_b} は供給距離であり水粒子が微小時間に進む距離とした。よって、

$$x_{b+l_b} - x_b = u \Delta t \quad (6.35)$$

となる。また、格子で考える場合整数となるので、切り上げにした。 $\frac{n}{T}$ は碎波による渦の生成率であり、 n は 1 周期にいくつ渦ができるかということを表す。そして、渦が波速 C で大きさが H_b 程度であると考え、 γ_l を係数として、

$$\frac{n}{T} \approx \frac{C_b}{H_b} = \gamma_l \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (6.36)$$

とした。 γ_l は係数である。さらに、これら P_{k3} および P_{E_c} は碎波判定を満たす場合に供給することとする。

6.2.4 碎波判定条件

碎波判定条件は流速・波速比で行う。有川・磯部 (1997) によれば、流速・波速比が 1.0 を越える時に碎波すると考えると、実験との整合性が良いことが分かっているが、波速の求め方が、波峰の移動速度で求めており、いろいろな波の場を計算する場合に、扱いづらい。そこで、波速として、 \sqrt{gh} を用いた。 g は重力加速度、 h は静水深である。しかし、この場合、1.0 であるかどうかは定かでないもの、有川・磯部 (1997) によれば、判定条件を 0.8 ~ 1.0 にとれば大きな差がないことが示されているので、

$$\gamma_b = \frac{u_s}{\sqrt{gh}} \geq 0.9 \quad (6.37)$$

を判定条件にした。ここで、 u_s は水表面での流速とする。

6.2.5 各種パラメタ

パラメタは、 C^* 、 l_k 、 l_w 、 σ_k 、 γ_{k1} 、 γ_{k2} 、 γ_{k3} 、 γ_{k2} 、 γ_{k3} 、 γ_l である。 C^* および σ_k は乱流方程式で一般的に用いられている値、

$$C^* = 0.09 \quad (6.38)$$

$$\sigma_k = 1.0 \quad (6.39)$$

を用いた。

乱れの代表長さである l_k は、Cox et al. (1994) によれば、碎波帯外、transition region、inner region に波が移動するにつれて、 $0.01h \sim 0.45h$ まで変化することを実験により明らかにしている。そこで、乱れエネルギーが transition region から inner region にかけて大きくなることを念頭におき、次元解析を用いて、

$$l_k = \gamma_{l1} \left(1 + \frac{TE_k}{Ch} \right)^{\gamma_{l2}} \quad (6.40)$$

とした。ここで、 C は波速で \sqrt{gh} 、 E_k は乱れエネルギーである。これは、乱れエネルギーが transition region から inner region にかけて大きくなることを念頭においている。

回転場における代表長さ l_w については参考にすることがないために、

$$l_w = \gamma_{lw} h \quad (6.41)$$

とした。ここで、 γ_{lw} は係数である。

最終的に定めるべき係数として、

$$\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \gamma_{k3}, \gamma_{k2}, \gamma_{k3}, \gamma_{l1}, \gamma_{l2}, \gamma_{l1}, \gamma_{l2}, \gamma_{lw}$$

があるが、これらは、碎波形式によってことなることも考えられるので、実験ごとに波高の減衰が整合するように定めた。ただし、後述する 2 ケースについて計算した結果、 γ_{k1} 、 γ_{k2} 、 γ_{k3} 、 γ_{l1} 、および γ_{lw} のパラメタに関しては、表 6.1 の様に、等しい値をとった。

6.3 実験との比較

6.3.1 数値計算方法

基礎方程式として、速度ポテンシャルを、

$$\phi = \left(\frac{h+z}{h} \right)^{2\alpha-1} \quad (6.42)$$

表 6.1: 各パラメタ

γ_{k1}	γ_{k2}	γ_{ke}	γ_{l1}	γ_{lu}
0.5	2.0	0.5	0.1	0.2

としたものを用いる。比較する実験として、一様勾配斜面および、バー型地形を用いた。数値計算は有川・磯部(1997)と同様に線境界法を用い、実験領域より沖側に半波長、岸側に2波長、の消波用の領域を設けている。 Δx 、および Δt は両方の実験とも、 $L_i/50$ 、 $T/100$ を用いた。 L_i は入射波の波長である。

非線形緩勾配方程式に関しては、Crank-Nicholson法を用いたが、乱流方程式などは、陽解法を用いた。そのため、 Δt を小さくしている。

6.3.2 一様勾配斜面

6.3.2.1 諸条件

実験はNwogu(1996)を用いる。水深0.56(m)、斜面勾配1/25、波の周期、および波高は、2.0(s)、および0.09(m)の規則波である。なお、岸側には波を透過させるために、0.03(m)の一様水深を設けている。また、各パラメタは、表6.2のようにした。

表 6.2: パラメタ (Nwogu(1996) のケース)

γ_{w_f}	γ_l	γ_{l2}
0.3	0.1	1.0

6.3.2.2 実験値との比較

図6.2は波高および平均水深の比較である。これによると、波高の変化については、全体的に良い精度で計算できている。しかし、平均水深に関しては、wave set-up がほとんど起こっていないことが分かる。これに対する原因は定かではないが、境界の問題ではないかと考えている。

図6.3は時系列波形の比較である。a点、b点はそれぞれ図6.2の点に相当する。水深はa点が0.17(m)、b点が0.09(m)である。砕波点付近の波形の変化は、精度良く解析できていることがわかる。しかし、砕波後については、実験の波形に比べて尖り過ぎる傾向が見られる。

6.3.3 バー型地形

6.3.3.1 諸条件

実験はSchäffer et al.(1993)を用いる(図6.4)。波の周期、および波高は、1.6(s)、および0.12(m)の規則波である。パラメタに関しては表6.3のようにした。

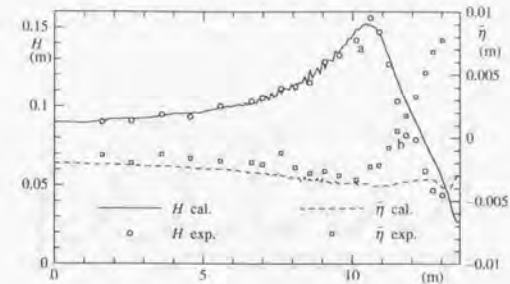


図 6.2: 波高および平均水深の変化

表 6.3: パラメタ (Schäffer(1993) のケース)

γ_{w_f}	γ_l	γ_{l2}
0.35	0.05	1.5

6.3.3.2 実験値との比較

図6.5は、波高および平均水深の比較である。これによると、波高の変化については、実験とよく一致している。しかし、平均水深については、一様勾配斜面の結果同様に、ほとんど、set-up も set-down も見られず、実験値の1/5程度の値となっている。

また、図6.6は、減衰係数 ν_f の1周期平均をとったものである。従来の、Dibajnia・渡邊(1987)による f_D の方法では、波の反射を防ぐために、係数を砕波点より徐々に大きくしていたが、そのようなことを用いることなしに、徐々に ν_f が大きくなっていることがわかる。また、波の再生領域においても、これまでのような経験則を用いることなしに、 ν_f が小さくなっている。

図6.7は、乱れの代表長さである式(6.40)の係数部分の1周期平均である。これは、Cox et al.(1994)が実験で得た値よりも大きな値となっているが、砕波点から変形していくにつれ、係数が大きくなるという特徴は良く表れていることがわかる。

図6.8は、流速・波速比 u_s/C の各点での1周期の間での最大値である。これを見ると、 ν_f がほぼ0になった14(m)付近では、流速・波速比は0.6程度の値となっている。磯部(1986)によると、再生条件に $u/C = 0.135$ を用いているが、非線形性を考慮した場合はこれより大きな値をとるべきであることがわかる。

最後に、時系列波形を、図6.4でのa、b、c、およびd点で比較する。それぞれ、水平座標が9.78(m)、11.78(m)、13.78(m)、16.28(m)である。砕波点付近のa点においては、一様勾配斜面の結果と同様に精度良く計算している。しかし、b点、c点では、計算の方が尖っている。また、d点では、実験値の方では、2次波峰が発生しているが、計算ではその発達が見られない。これに関しては、もう少しモデルの改良が必要であると考えている。

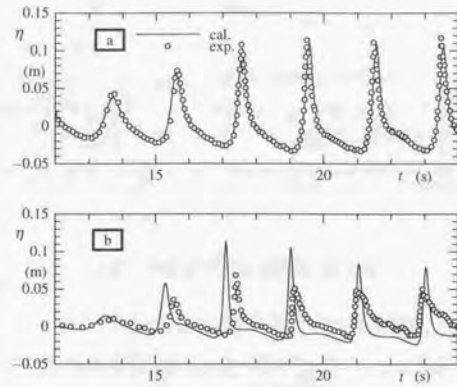


図 6.3: 波形の比較

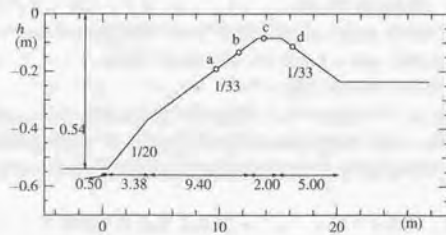


図 6.4: 実験条件

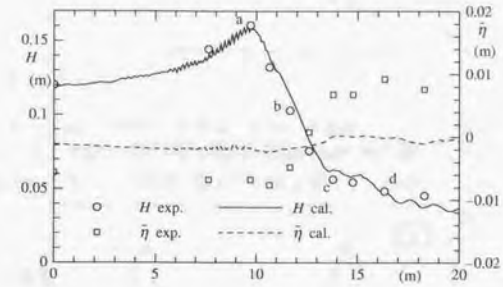


図 6.5: 波高および平均水深の比較

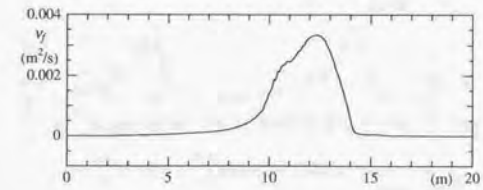


図 6.6: ν_f の 1 周期平均

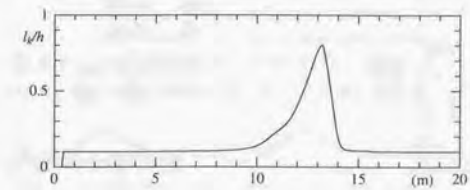


図 6.7: l_k/h の 1 周期平均

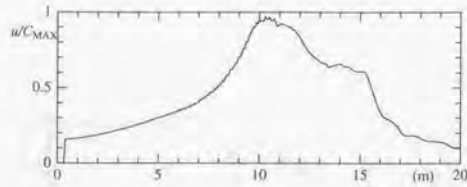


図 6.8: u_s/C の 1 周期での最大値

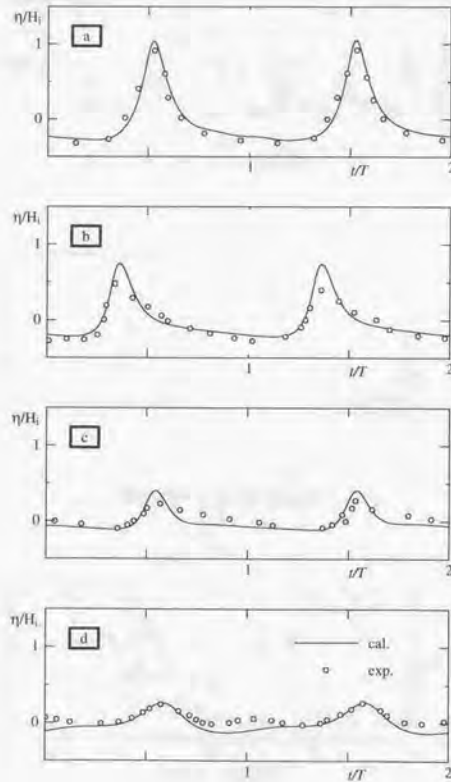


図 6.9: 波形の比較

Chapter 7. 断面汀線計算モデル

7.1 汀線境界の取り扱い

汀線部は、波が遡上、流下を繰り返す領域であり、本研究のように差分による数値計算を行う場合、格子間隔および格子数を増減させる必要があり、精度の良い取り扱いは困難となる。本章では、先端の水粒子は常に先端にあり、かつ水底に接していると考えて、理論的に先端条件を取り扱う方法を提案する。

7.1.1 鉛直分布関数

鉛直分布関数系としては、水底の連続式まで考慮した、

$$\phi \equiv Z_p \nabla h \cdot \nabla f_1 + Z_\alpha f_\alpha \equiv -(h+z) \nabla h \cdot \nabla f_1 + \left(\frac{h+z}{h+\eta}\right)^{2\alpha-2} f_\alpha \quad (7.1)$$

を用いる。底面の境界条件は、

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + w = 0 \quad (\text{at } z = -h) \quad (7.2)$$

であり、速度ポテンシャルを代入すると、

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + w = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{at } z = -h) \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial Z_p}{\partial h} \nabla h \cdot (\nabla h \cdot \nabla f_1) + Z_p \{ (\nabla h \cdot \nabla) \nabla f_1 + (\nabla f_1 \cdot \nabla) \nabla h \} \\ &\quad + \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} \nabla h f_\alpha + \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \nabla \eta f_\alpha + Z_\alpha \nabla f_\alpha \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$= -\nabla h \cdot (\nabla h \cdot \nabla f_1) + \nabla f_1 \quad (\text{at } z = -h) \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial Z_p}{\partial z} \nabla h \cdot \nabla f_1 + \frac{\partial Z_\alpha}{\partial z} f_\alpha \\ &= -\nabla h \cdot \nabla f_1 \end{aligned} \quad (\text{at } z = -h) \quad (7.6)$$

となる。結局、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = -(\nabla h \cdot \nabla h) \cdot (\nabla h \cdot \nabla f_1) \quad (7.7)$$

となり、底面の境界条件を $\mathcal{O}(|\nabla h|^3)$ で満足するようになる。

この鉛直分布関数を用いた時の基礎方程式は第 2 章で示す通りである。

7.1.2 先端における物理的な境界条件

7.1.2.1 水面変動の境界条件

先端粒子の 1 タイムステップ間の移動量 Δx_t は、

$$\Delta x_t = \int_t^{t+\Delta t} u \, dt \quad (7.8)$$

となる。そして、先端 $x = x_{tip}$ での水面変動の境界条件は、

$$h + \eta = 0 \quad (\text{at } x = x_{tip}) \quad (7.9)$$

となる。

7.1.2.2 速度ポテンシャルの境界条件

先端における速度ポテンシャルを求める。水面での力学的境界条件は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \Big|_{z=\eta} + g\eta = 0 \quad (\text{at } x = x_{tip}) \quad (7.10)$$

であるが、これを变形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\nabla \phi)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + g\eta &= 0 \\ \frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \left[(\nabla \phi)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - g\eta & \end{aligned} \quad (7.11)$$

となり、上式を差分することにより先端での次のタイムステップの ϕ が求められることになる。

7.1.3 数値計算における取り扱い

7.1.3.1 概要

数値計算を行う場合、先端と先端の一つ手前の格子の間隔を時々刻々変化させることにより、スムーズな汀線の変化が得られるようにする (図 7.1)。ここで、図中の Δx は通常の格子間隔、 Δx_s は先端における格子間隔、および Δx_t は先端の移動量を表す。よって、 $\Delta x_s + \Delta x_t$ が次ステップにおける先端の格子間隔となる。しかし、格子間隔がある程度以上になると、離散誤差が増大し、計算の精度が

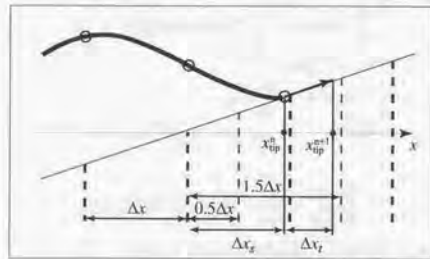


図 7.1: 先端部付近の格子の概念図

低下する。そこで、図 7.1 に示すように、

$$0.5\Delta x \leq \Delta x_s \leq 1.5\Delta x \quad (7.12)$$

とし、 $\Delta x_s \leq 0.5\Delta x$ となる場合は格子数を一つ減らし、 $\Delta x_s \geq 1.5\Delta x$ の場合には格子数を一つ増加する。また、1 タイムステップ内で格子数の増減は 1 より大きくならないように、 Δt を設定する。

7.1.3.2 先端の速度ポテンシャルの値の決定

鉛直方向流速は、速度ポテンシャルを式 (7.1) のように定義している場合、

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial \phi}{\partial z} &= -\nabla h \cdot \nabla f_1 + \frac{\partial Z_{\alpha'}}{\partial z} f_{\alpha'} \\ &= -\nabla h \cdot \nabla f_1 + (2\alpha' - 2) \frac{(h+z)^{2\alpha'-3}}{(h+\eta)^{2\alpha'-2}} f_{\alpha'} \quad (\alpha' = 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (7.13)$$

となる。先端の極近傍の水表面では、 $h + \eta = \delta$ とすると、

$$w = -\nabla h \cdot \nabla f_1 + (2\alpha' - 2) \frac{1}{\delta} f_{\alpha'} \quad (\alpha' = 2, 3, \dots, N) \quad (7.14)$$

となる。よって、 $\delta \rightarrow 0$ で発散が起らないためには、

$$f_{\alpha'}|_{x=x_{tip}} = 0 \quad (\alpha' = 2, 3, \dots, N) \quad (7.15)$$

が必要となることわかる。この時、先端では、 $h + \eta = 0$ であるために、先端での速度ポテンシャルは、

$$\phi|_{x_{tip}} = f_1 \quad (7.16)$$

となる。

7.1.3.3 移動量の算定

先端粒子の移動量は、収束計算を用いず、 n タイムステップを既知とすると、 $n+1$ タイムステップの移動量 Δx_t^{n+1} は、

$$\Delta x_t^{n+1} = u|_n \Delta t = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_n \Delta t \quad (7.17)$$

とした。つまり、前の時間ステップの値のみを用いて評価しているため、その移動量は既知数となる。先端部での差分に関しては次項で述べる。

7.1.3.4 差分方法

基礎方程式には、1 階微分から 3 階微分まで含まれ、図 7.2 のように、 $A \sim D$ までの 4 通りに場合分けをして記述する (表 7.1 ~ 表 7.4)。なお、 D においては 3 階微分を用いないため記述していない。



図 7.2: x 軸における格子の配置

また、表の中の γ_s や γ'_s は、

$$\Delta x_s = \gamma_s \Delta x \quad (7.18)$$

$$\gamma'_s = \gamma_s + 1 \quad (7.19)$$

とする。これらの表を用いると、たとえばある変数 f の i 点における離散式は、

$$d^{(n)} f_i = \frac{a_{i+2} f_{i+2} + a_{i+1} f_{i+1} + a_i f_i + a_{i-1} f_{i-1} + a_{i-2} f_{i-2}}{a_f} \quad (7.20)$$

となる。ここで、 $d^{(n)}$ は n 階の微分演算子であることを示している。

表 7.1: A における離散係数

A						
階数	a_{i+2}	a_{i+1}	a_i	a_{i-1}	a_{i-2}	a_f
1	0	1	0	-1	0	$2\Delta x$
2	0	1	-2	1	0	Δx^2
3	1	-2	0	2	-1	$2\Delta x^3$

表 7.2: B における離散係数

B						
階数	a_{i+2}	a_{i+1}	a_i	a_{i-1}	a_{i-2}	a_f
1	0	1	0	-1	0	$2\Delta x$
2	0	1	-2	1	0	Δx^2
3	$\frac{12}{(-1+\gamma'_s)\gamma'_s(1+\gamma'_s)(2+\gamma'_s)}$	$\frac{-3+\gamma'_s}{-1+\gamma'_s}$	$\frac{3(-2+\gamma'_s)}{\gamma'_s}$	$\frac{3(-1+\gamma'_s)}{1+\gamma'_s}$	$\frac{-\gamma'_s}{2+\gamma'_s}$	Δx^3

表 7.3: C における離散係数

C						
階数	a_{i+1}	a_i	a_{i-1}	a_{i-2}	a_{i-3}	a_f
1	$\frac{1}{\gamma_s(1+\gamma_s)}$	$\frac{-1+\gamma_s}{\gamma_s}$	$\frac{\gamma_s}{1+\gamma_s}$	0	0	Δx
2	$\frac{22}{\gamma_s(1+\gamma_s)(2+\gamma_s)(3+\gamma_s)}$	$\frac{-11+6\gamma_s}{3\gamma_s}$	$\frac{6-5\gamma_s}{1+\gamma_s}$	$\frac{-3+4\gamma_s}{2+\gamma_s}$	$\frac{2-3\gamma_s}{3(3+\gamma_s)}$	Δx^2
3	$\frac{36}{\gamma_s(1+\gamma_s)(2+\gamma_s)(3+\gamma_s)}$	$\frac{-6+\gamma_s}{\gamma_s}$	$\frac{3(-5+\gamma_s)}{1+\gamma_s}$	$\frac{3(-4+\gamma_s)}{2+\gamma_s}$	$\frac{3-\gamma_s}{3+\gamma_s}$	Δx^3

表 7.4: D における離散係数

D					
階数	a_i	a_{i-1}	a_{i-2}	a_{i-3}	a_f
1	$\frac{1+2\gamma_s}{\gamma_s(1+\gamma_s)}$	$\frac{-1-\gamma_s}{\gamma_s}$	$\frac{\gamma_s}{1+\gamma_s}$	0	Δx
2	$\frac{6}{\gamma_s(2+\gamma_s)}$	$\frac{-3-2\gamma_s}{\gamma_s}$	4	$\frac{-1-2\gamma_s}{2+\gamma_s}$	Δx^2

7.1.3.5 遡上境界の離散化

7.1.3.1 項で説明したとおり先端位置の収束計算は行わないため、先端の次ステップの水面変動の値 η_{tip}^{n+1} は、

$$\eta^{n+1} = -h|_{x=x_{\text{tip}}^{n+1}} \quad (7.21)$$

$$x_{\text{tip}}^{n+1} = x_{\text{tip}}^n + \Delta x_t \quad (7.22)$$

となる。

次に、重み係数は、式 (7.11), (7.15), および (7.16) を用いて、

$$\frac{D\phi}{Dt}\bigg|_{x_{\text{tip}}} = \frac{Df_1}{Dt} = \frac{1}{2} \left[(\nabla\phi)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right]^n - g\eta^n \quad (7.23)$$

となり、

$$f_1^{n+1} = f_1^n + \Delta t \left[\frac{1}{2} \left[(\nabla\phi)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right]^n - g\eta^n \right] \quad (7.24)$$

となる。よって、境界ではすべての変数を既知として与える Dirichlet 型になる。

7.1.3.6 格子が増加した場合の取り扱い

数値計算は Crank-Nicholson 法を用いるため、前ステップの値が必要となる。そのため、格子数が増加した場合、増加した格子での変数の値を内挿する。内挿方法は直線近似では非破波の境界条件よりもかなり小さな条件で、有意な振動を生じさせるため、放物近似を用いた。放物近似を用いた場合、

$$y(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 \quad (7.25)$$

となる。ここで、 $x_1 = x(\text{imax}) \equiv x_{\text{tip}}$, $x_2 = x(\text{imax}-1)$, および $x_3 = x(\text{imax}-2)$ とし、 x_2 を x 軸の原点とすると、

$$x_1 - x_2 = \gamma_s \Delta x, \quad x_2 - x_3 = \Delta x, \quad x_1 - x_3 = (1+\gamma_s)\Delta x \quad (7.26)$$

となり、これを代入すると、

$$y(x) = \frac{x(x+\Delta x)}{\gamma_s(1+\gamma_s)\Delta x^2}y_1 + \frac{(x-\gamma_s\Delta x)(x+\Delta x)}{-\gamma_s\Delta x^2}y_2 + \frac{(x-\gamma_s\Delta x)x}{(1+\gamma_s)\Delta x^2}y_3 \quad (7.27)$$

となる。ここで、あらためて、 $x' = x/\Delta x$ として式を整理し、' を省略すると、

$$y(x) = \frac{x(x+1)}{\gamma_s(1+\gamma_s)}y_1 + \frac{(x-\gamma_s)(x+1)}{-\gamma_s}y_2 + \frac{(x-\gamma_s)x}{(1+\gamma_s)}y_3 \quad (7.28)$$

となる。ここで、具体的には、 y として、 η^n や f_1^n が代入される。また、 $x=1$ を代入すると、増加した点での前ステップの値がわかる。

7.1.3.7 格子の増減による微分値の不連続に対する対策

格子が増減することの影響は、微分値に大きく反映する。これは、図 7.3 を見るとわかるが、微分に用いる格子の場所が異なるために、増減が起こったときに微分値の不連続が起こるのである (図 7.4)。そこで、不連続をなくすために、ある微分を df とすると、

$$df_1 \equiv df_1(x_{\text{imax}}, x_{\text{imax}-1}, x_{\text{imax}-2}) \quad (7.29)$$

$$df_2 \equiv df_2(x_{\text{imax}}, x_{\text{imax}-2}, x_{\text{imax}-3}) \quad (7.30)$$

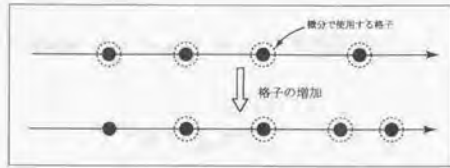


図 7.3: 格子の増減による微分に使用する格子の位置の違い

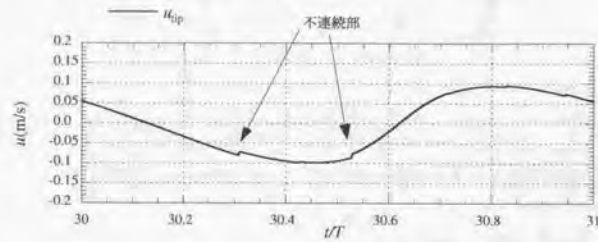


図 7.4: 格子の増減による先端流速 u の不連続

の二つを考え、

$$df \equiv (\gamma_s - 0.5) df_1 + (1.5 - \gamma_s) df_2 \quad (7.31)$$

とした。ここで、 γ_s は式 (7.18) で定義される。つまり、重みをかけているわけである。重み係数が式のようなになるのは、 $0.5 \leq \gamma_s \leq 1.5$ であるからである。この方法により同じ条件で計算をした結果が図 7.5 である。不連続部がなくなっていることがわかり、この方法が有効であることがわかる。

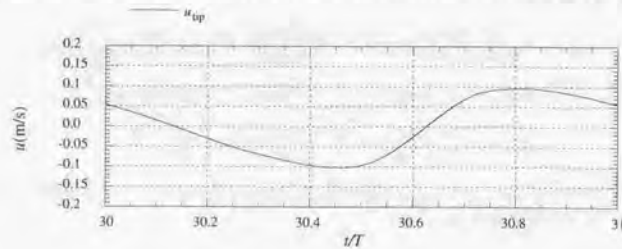


図 7.5: 改善した方法による先端流速 u

7.2 非砕波条件での解析解との比較

7.2.1 解析解

非砕波条件での週上の解析解は Carrier and Greenspan (1957) により、非線形長波方程式を用いて解かれている。ここでは、無次元解だけを示すが、角周波数 $\omega = 1$ の時に解は、

$$\psi = AJ_0(\sigma) \cos(\lambda) \quad (7.32)$$

となる。ここで、 J_0 はベッセル関数であり、 σ および λ は特性曲線に基づく座標を表す。また、 A は係数であり、この値が 1 を越えると、砕波することを意味する。この ψ を用いて、 η は、

$$\dot{\eta} = \frac{1}{4} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{1}{2} v^2 \quad (7.33)$$

$$v = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \quad (7.34)$$

となる。 η は無次元量の水面変動を示す。これを用いて水面変動が計算できることになる。

7.2.2 計算条件および結果の比較

解析解が $A = 1$ の時の計算を行った。沖側での入射条件を解析解から正確に知ることは難しい。そこで、うまくピークがあうように波高の値を調節した。このとき、周期は 3.14(s)、波高を 1.55×10^{-4} (m)、沖側の水深を 0.1(m) とした。その結果は図 7.6 である。具体的には、図 7.6 の $x = -0.2$ あたりのピークをあわせるように波高を調節した。

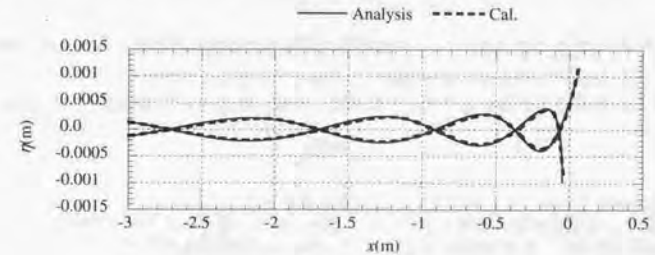


図 7.6: 非砕波条件での解析解との空間波形比較

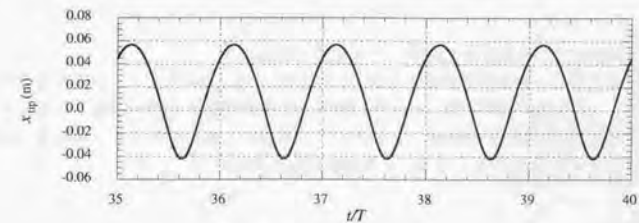


図 7.7: 汀線の x 方向変化

これを見ると、解析解と良く一致していることがわかる。ただし、Carrier and Greenspan (1957) では汀線の位置が0を中心に対称になっているが、図7.7をみるとわかるが、対称になっていない。この原因の大きな要因として、遡上境界がDirichlet型になっていることがある。しかし、本研究の方法でほぼ妥当な計算結果が得られることが確認できた。

7.3 砕波する条件での実験値との比較

7.3.1 計算条件

波浪条件は、6.3.2項で用いた一様勾配斜面での条件を用いる。砕波減衰係数として、6.2節で提案したエネルギー減衰率を用いたもので計算したところ、遡上部付近でうまく計算できなかったため、Dibajnia・渡辺(1987)が提案した f_D を用いて計算を行うことにした。さらに、砕波点を実験から読みとり位置を決定し、その位置を時間に関係なく固定点として与えた。

7.3.2 減衰係数 f_D のパラメタ

f_D は、

$$f_D = \alpha_D \tan \beta \sqrt{\frac{g}{D}} \sqrt{\frac{\bar{u} - u_r}{u_s - u_r}} \quad (7.35)$$

$$u_s = 0.4(0.57 + 5.3 \tan \beta) \sqrt{gD} \quad (7.36)$$

$$u_r = 0.4 \left(\frac{a}{h}\right)_b \sqrt{gD} \quad (7.37)$$

とした。ここで、 g は重力加速度、 D は平均水深、 $\tan \beta$ は斜面勾配、および \bar{u} は流速振幅を表している。また、 $(\frac{a}{h})_b$ は砕波位置での水面変動振幅と水深との比を表している。

ν_f は拡散型の減衰項の係数として用いる場合は、佐藤・鈴木(1990)が提案しているように、

$$\nu_f = \frac{gD}{\omega^2} f_D \quad (7.38)$$

となるため、そのようにする。ここで、 ω は角周波数である。

α_D は係数で、砕波点付近から0より2.5まで変化させる必要があるため、開始点より0から2.5まで正弦的に増加させた。その距離を lb とすると、開始点から砕波点までを lb_1 、砕波点から残りの距離を lb_2 と置いて、

$$lb = lb_1 + lb_2 \quad (7.39)$$

$$lb_1 = 0.4L_b \quad (7.40)$$

$$lb_2 = 1.0L_b \quad (7.41)$$

とした。 L_b は砕波点での線形理論より得られる波長とする。

f_D を計算するときに、周期的に評価する値(たとえば、 \bar{u} など)がある。この値を1周期ごとに変化させると、まだ、波浪場が定常に達していないとき、計算が発散する場合がある。そこで、そのような周期的に変化する値を評価する場合、どのステップにおいても、そのステップから1周期の量を用いて、 f_D を計算するようにすることで、計算を安定化させる。

7.3.3 計算結果

まず、汀線部での変化を表したものが、図7.8である。

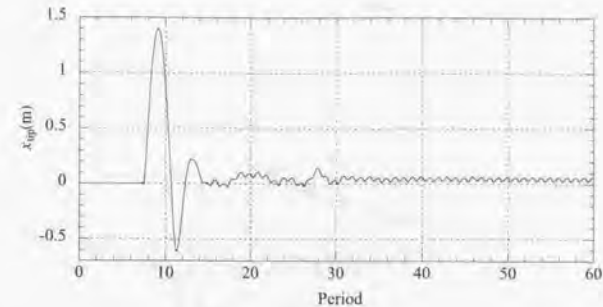


図 7.8: 汀線の時系列変化

0は静水汀線を表している。そこから沖方向に負をとる。これを見ると、ほぼ35周期目あたりから定常に達していることがわかる。次に、50周期目の波高と平均水位を実験値と比較したものを図7.9に示す。平均水位はset upが実験値と比較しても2割程度しかでていないことがわかる。この理由については第8章で述べる。

$h = 0.12(m)$ 、および $h = 0.09(m)$ 地点の時系列波形を図7.10、7.11にそれぞれ示す。これを見ると、波形そのものの尖りなどは、6章で提案した砕波減衰係数の方がよく尖っていることがわかる。つまり、 f_D の方法では前傾化がうまく表現できていないことになる。ただし、ある程度の再現性は確認できる。

最後に水位変動、流速、全水深で積分した流量の空間波形を図7.12に示す。きれいに減衰していることがわかる。

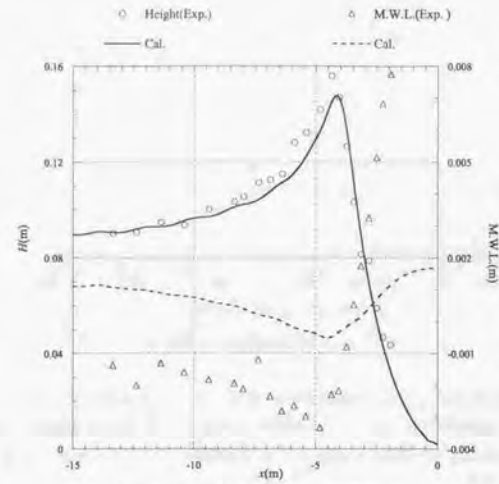


図 7.9: 波高および平均水位の比較

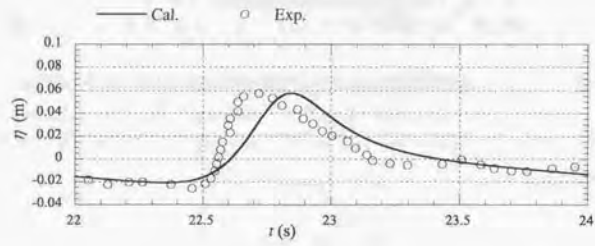


図 7.10: 時系列波形の比較 ($h = 0.12(\text{m})$)

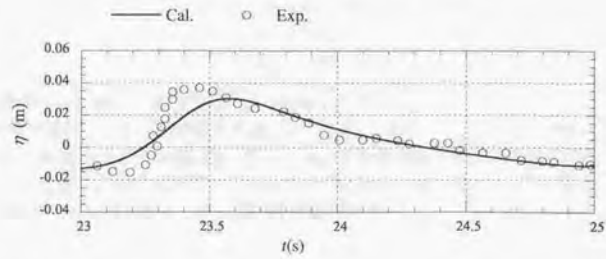
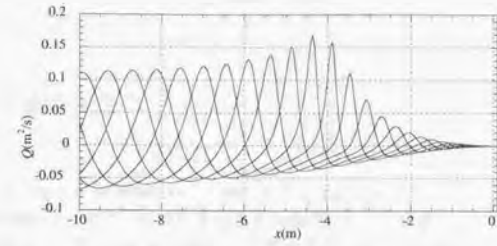
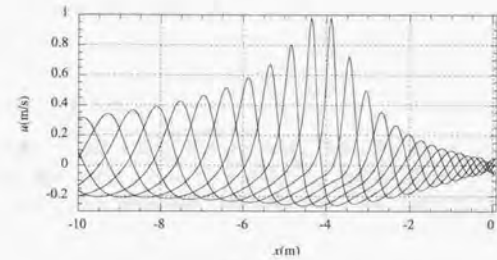


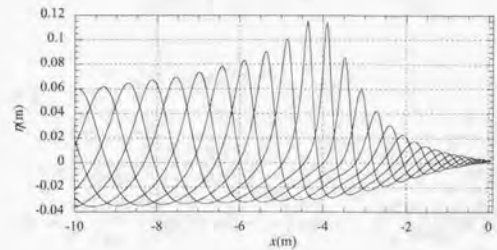
図 7.11: 時系列波形の比較 ($h = 0.09(\text{m})$)



(a) 流量



(b) 流速



(c) 水位

図 7.12: 各諸量の空間波形

Chapter 8. 平均水位問題の提示

8.1 概要および基礎方程式

8.1.1 概要

前章までの計算で波形はある程度精度良く求められることは示したが、set-up がでないという問題が残った。平均水位は波によっておこる流れを計算する場合においても重要である。また、中村(1999)やZheng(1999)の研究より、Boussinesq 方程式の変数を流量ではなく流速にして計算を行う場合、拡散型の減衰項を用いると、 f_D では set-up がおこらないことがわかっている。このようなことから、平均水位がうまく計算できない原因を明らかにする必要がある。

そこで、この章では非線形緩勾配方程式を用いて、 f_D モデルの問題点を明らかにし、解決方法を検討する。

8.1.2 基礎方程式および計算条件

速度ポテンシャルの仮定、基礎方程式、漕上の取り扱いとは第7章の様にする。また、ここでは、砕波減衰係数として f_D を用い、また、そのパラメタなどや、計算条件なども7章と同様にする。よって、波高や平均水位の変化、時系列の波形などの結果は7章と同じとなる。

8.2 保存量の検討

平均水位を調べる場合、エネルギーの保存および運動量の保存が重要である。そこでそれぞれを数値的に検討する。

8.2.1 エネルギー保存

8.2.1.1 エネルギーフラックス

x 方向のエネルギーフラックスは、

$$F_x = \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + gz \right\} u \, dz = - \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dz \quad (8.1)$$

であり、式(2.43)を代入すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = Z_p \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} f_\alpha + \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} f_\alpha + Z_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = Z_p \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right) + \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} f_\alpha + Z_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned}
F_x = - \left[\right. & U_{\rho\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} f_\alpha \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial t} + V_{\rho\alpha} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial t} \\
& + U_{\rho\alpha} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_\alpha + A_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} f_\alpha f_\beta \\
& + D_{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} f_\alpha f_\beta + F_{\beta\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} f_\beta \\
& + V_{\rho\alpha} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f_\beta}{\partial t} \\
& \left. + E_{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} f_\beta + C_{\alpha\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \frac{\partial f_\beta}{\partial t} + \theta \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \quad (8.4)
\end{aligned}$$

となる。

微小振幅波でエネルギー伝達率を計算すると、

$$W = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^0 \rho a u dz dt = \frac{\rho g H^2 \omega}{8 k^2} \left\{ 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right\} \equiv EC_g \quad (8.5)$$

となり、図 8.1 で比較するとオーダーはあっている。また、エネルギーフラックスの x 方向の変化はエネルギーの増減を示すことから、砕波帯内でエネルギーが減衰していることがわかる。減衰しているエネルギーは減衰項により生じていると考えられるが、

$$\begin{aligned}
F_d &= \int_{-h}^0 \nu_c \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz \\
&\equiv \int_{-h}^0 \nu_c Z_\alpha \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz \quad (8.6)
\end{aligned}$$

となり、

$$F_d = \nu_c \left[V_{\rho\alpha} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x^2} + F_{\beta\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x^2} f_\beta + E_{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x^2} f_\beta + C_{\alpha\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 f_\beta}{\partial x^2} \right] \quad (8.7)$$

となる。

8.2.1.2 エネルギー分布

エネルギーフラックスはうまく計算できていることがわかったので、次にエネルギー分布がどのようになっているかを調べる。波のエネルギー E_t は運動エネルギー E_k と位置エネルギー E_p に分けられるが、それぞれ、

$$E_t = E_k + E_p \quad (8.8)$$

$$E_k = \int_{-h}^0 \frac{1}{2} (u^2 + w^2) dz \quad (8.9)$$

$$E_p = \int_{-h}^0 g z dz - \int_{-h}^0 g z dz \quad (8.10)$$

となり、それぞれ計算を行うと、

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dz &= A_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + C_{\alpha\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \\
&+ 2U_{\rho\alpha} f_\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + 2V_{\rho\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \\
&+ 2D_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2E_{\alpha\beta} f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + 2F_{\alpha\beta} f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&+ \theta \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) + \theta \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \quad (8.11)
\end{aligned}$$

$$\int_{-h}^0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 dz = G_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta + 2Y_{\rho\alpha} f_\alpha \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \theta \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (8.12)$$

$$\int_{-h}^0 g z dz = \frac{1}{2} g (h^2 - h^2) \quad (8.13)$$

となり、よって、

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \\
&+ U_{\rho\alpha} f_\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + V_{\rho\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \\
&+ D_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + E_{\alpha\beta} f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + F_{\alpha\beta} f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&+ \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta + Y_{\rho\alpha} f_\alpha \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} \quad (8.14)
\end{aligned}$$

$$E_p = \frac{1}{2} g h^2 \quad (8.15)$$

である。エネルギーフラックスおよびエネルギーの比較を行ったものを図 8.1 である。これを見るとわかるようにエネルギーはよく保存されていることがわかり、エネルギー的には問題はないと考えられる。

8.2.2 運動量保存に関する基礎的知識

8.2.2.1 既往の研究

跳水現象は、エネルギー損失はあるが、運動量(正確には比力)は保存される。ただしこの場合、上流より下流の方が水位は高い。この現象に着目し、ポアと跳水とを関係づける研究が Madsen and Sevendsen(1983) によってなされている。

Mei(1985)によれば、積分された Navier-Stokes 方程式より、水平方向の運動量の保存式が導出できる。また、その際に現れる積分されたレイノルズ応力項は、時間の平均をとることにより、他の項に比べて無視できることも示している。このことは、積分された Navier-Stokes 方程式から導出される平均量の方程式では、運動量の保存は砕波減衰項が現れないことを示している。

また、Stive(1984)では、砕波による平均水位の上昇および、波高の減衰を求めるのに、エネルギー保存式、運動量保存式、および連続式をそれぞれ積分し時間平均を施した形で用いている。その際運動量保存式には、砕波減衰による項は現れていない。そうした結果、平均水位の上昇は比較的精度よく再現できている。

運動量は外力を受けなければ保存されることを考慮にいれると、これらの研究は論理的である。また、これらの結果から、砕波に伴う巻き込みがきっかけとなり跳水現象と同じ状況を作り出すことによって、平均水位を上昇させていることがわかる。

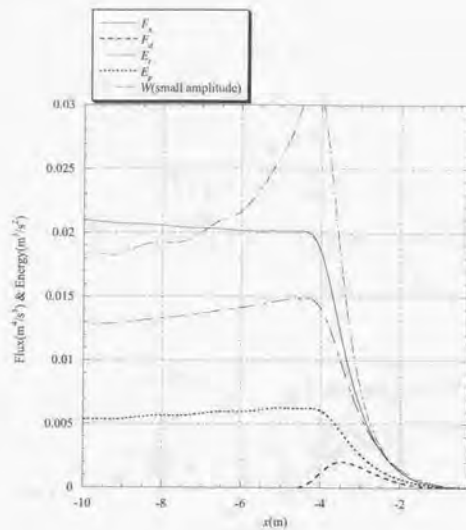


図 8.1: エネルギーフラックスおよびエネルギーの比較

8.2.2.2 平均された運動量方程式の導出

運動量保存はまさに Navier-Stokes 方程式そのものを考えればよい。しかし、今回は平均量を問題にしているため、Phillips(1969)に基づいた海浜流の方程式を対象にする。

まず、 x 方向および、 z 方向の Navier-Stokes 方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial ww}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (8.17)$$

となる。前述したように、減衰に関わる項は平均運動量の保存に影響を与えないために省略する。これを全水深で積分し表面および底面の境界条件を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \rho uu dz = p_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} -p dz \quad (8.18)$$

となり、式 (8.18) を周期平均すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \rho uu dz = \bar{p}_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} -p dz \quad (8.19)$$

となる海浜流の方程式を導くことができる。各項の役割を確認するために、流速を平均流成分 U と波動成分 u' とに分け、

$$u = U + u' \quad (8.20)$$

と定義する。ここで、平均流成分は鉛直方向にも時間的にも変化しないとする。そうすると、

$$\int_{-h}^{\eta} U dz = U \int_{-h}^{\eta} dz = U(\bar{\eta} + h) = M \quad (8.21)$$

$$\int_{-h}^{\eta} u' dz = M' \quad (8.22)$$

$$\int_{-h}^{\eta} u dz = \int_{-h}^{\eta} U + u' dz = \bar{M} = M + M' \quad (8.23)$$

となる。まず圧力 p は、 z 方向の運動量方程式を積分して、

$$\int_z^{\eta} \frac{\partial w}{\partial t} dz + \int_z^{\eta} \frac{\partial uw}{\partial x} dz + \int_z^{\eta} \frac{\partial ww}{\partial z} dz = -g \int_z^{\eta} dz - \frac{1}{\rho} \int_z^{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (8.24)$$

Leibnitz rule (D は微分演算子)、

$$\int_{x_1}^{x_2} DF dx = D \int_{x_1}^{x_2} F dx - F_{x_2} Dx_2 + F_{x_1} Dx_1 \quad (8.25)$$

表面の運動学的境界条件、および $p_{\eta} = 0$ 、を用いると、

$$\frac{1}{\rho} p_z = g(\eta - z) + \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\eta} w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} uw dz - w_z^2 \quad (8.26)$$

となる。さて、radiation stress の計算に必要なのは、圧力 p の全水深における積分であるので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \int_{-h}^{\eta} p dz &= \int_{-h}^{\eta} g(\eta - z) dz \\ &+ \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\eta} w dz \right] dz + \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} uw dz \right] dz - \int_{-h}^{\eta} w_z^2 dz \end{aligned} \quad (8.27)$$

となる。また、式 (8.19) の第 2 項の積分は、

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} uu dz &= \int_{-h}^{\eta} (U + u')(U + u') dz \\ &= \int_{-h}^{\eta} UU dz + 2 \int_{-h}^{\eta} Uu' dz + \int_{-h}^{\eta} u'u' dz \\ &= UU(h + \bar{\eta}) + 2U \int_{-h}^{\eta} u' dz + \int_{-h}^{\eta} u'u' dz \\ &= \frac{MM}{h + \bar{\eta}} + 2 \frac{MM'}{h + \bar{\eta}} + \int_{-h}^{\eta} u'u' dz \\ &= \frac{1}{h + \bar{\eta}} (M + M')^2 - \frac{M'M'}{h + \bar{\eta}} + \int_{-h}^{\eta} u'u' dz \\ &= \frac{\bar{M}\bar{M}}{h + \bar{\eta}} - \frac{M'M'}{h + \bar{\eta}} + \int_{-h}^{\eta} u'u' dz \\ &= \bar{U}\bar{M} - \frac{M'M'}{h + \bar{\eta}} + \int_{-h}^{\eta} u'u' dz \end{aligned} \quad (8.28)$$

であり、そすると、式 (8.19) は、

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{U}\bar{M} + \int_{-h}^{\eta} u'u' dz - \frac{M'M'}{h + \bar{\eta}} + \int_{-h}^{\eta} \frac{p}{\rho} dz \right\} = \frac{p_{-h}}{\rho} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (8.29)$$

となる。さらに、radiation stressは、過剰運動量束と呼ばれる様に、静水圧分だけ引くと、

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{U} \bar{M} + \int_{-h}^{\eta} \overline{u'u'} dz - \frac{M'M'}{h+\bar{\eta}} + \int_{-h}^{\eta} \frac{\bar{p}}{\rho} dz - g \frac{(h+\bar{\eta})^2}{2} \right\} + (h+\bar{\eta}) \frac{\partial (h+\bar{\eta})}{\partial x} = \frac{p-h}{\rho} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (8.30)$$

となる。 \bar{p}_z は式(8.26)で表されるが厳密には $z = \eta$ および $z = -h$ では、 η や h が x や t の関数であるために、成立しない。そこで、 \bar{p}_{-h} を求めるには、

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial uw}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial ww}{\partial z} dz = -g \int_{-h}^{\eta} dz - \frac{1}{\rho} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (8.31)$$

として、表面および底面の境界条件を用いて、Leibnitz rule を適用すると、

$$\frac{p-h}{\rho} = g(\eta+h) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} uw dz \quad (8.32)$$

となり、周期的な平均をとると、

$$\frac{\bar{p}-h}{\rho} = g(\bar{\eta}+h) + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\int_{-h}^{\eta} w dz} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\int_{-h}^{\eta} uw dz} \quad (8.33)$$

となる。これは厳密に正しい。これを式(8.30)に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{U} \bar{M} + \int_{-h}^{\eta} \overline{u'u'} dz - \frac{M'M'}{h+\bar{\eta}} + \int_{-h}^{\eta} \frac{\bar{p}}{\rho} dz - g \frac{(h+\bar{\eta})^2}{2} \right\} \\ + (h+\bar{\eta}) \frac{\partial (h+\bar{\eta})}{\partial x} \\ = g(\eta+h) \frac{\partial h}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} uw dz \right\} \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \quad (8.34)$$

となる。右辺第2項は2次のオーダーに水底勾配がかかったものである。他の項に比べて微小と考えられる。よって最終的に運動量の平均方程式は、

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} \bar{M}) + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} = -(h+\bar{\eta}) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \quad (8.35)$$

となり、ここで、 S_{xx} はradiation stressと呼ばれ、

$$S_{xx} = \int_{-h}^{\eta} \left(u'u' + \frac{p}{\rho} \right) dz - \frac{M'M'}{h+\bar{\eta}} - g \frac{(h+\bar{\eta})^2}{2} \quad (8.36)$$

である。これは、全水深における波の運動量と圧力から、静水圧分と波の平均の流れによってできる運動量を引いたものであることがわかる。

8.2.2.3 数値計算における取り扱い

数値的に計算を施す場合、流速 u 、 w は、

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = [\text{式(8.2)}] \quad (8.37)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial z} f_{\alpha} \quad (8.38)$$

となる。

まず任意の水深での圧力を表す(式8.26)の右辺の積分はそれぞれ、

$$\int_z^{\eta} w dz = \int_z^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial z} dz f_{\alpha} + \int_z^{\eta} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} \quad (8.39)$$

$$\begin{aligned} \int_z^{\eta} uw dz = & \int_z^{\eta} Z_{\alpha} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial z} dz \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_{\alpha} + \int_z^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz \frac{\partial \eta}{\partial x} f_{\alpha} f_{\beta} \\ & + \int_z^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial h} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz \frac{\partial h}{\partial x} f_{\alpha} f_{\beta} + \int_z^{\eta} Z_{\alpha} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} f_{\beta} \\ & + \int_z^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \int_z^{\eta} Z_{\alpha} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz f_{\alpha} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (8.40)$$

である。また、

$$w_z^2 = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} f_{\alpha} f_{\beta} + 2 \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} f_{\alpha} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (8.41)$$

である。これで、任意の水深の圧力が計算できることになる。ただし、これは減衰項の影響がないところである。

圧力 p の全水深における積分式((式8.27)のそれぞれの項は、

$$\int_{-h}^{\eta} g(\eta-z) dz = \frac{g}{2} (h+\eta)^2 \quad (8.42)$$

$$\int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\eta} w dz \right] dz = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-h}^{\eta} \int_z^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial z} dz dz f_{\alpha} + \int_{-h}^{\eta} \int_z^{\eta} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz dz \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} \right] \quad (8.43)$$

$$\int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} uw dz \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^{\eta} \int_z^{\eta} uw dz dz \right] - \frac{\partial h}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} uw dz \quad (8.44)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} \int_z^{\eta} uw dz dz \\ = \int_{-h}^{\eta} \int_z^{\eta} Z_{\beta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial z} dz dz \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_{\alpha} + \int_{-h}^{\eta} \int_z^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz dz \frac{\partial \eta}{\partial x} f_{\alpha} f_{\beta} \\ + \int_{-h}^{\eta} \int_z^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial h} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz dz \frac{\partial h}{\partial x} f_{\alpha} f_{\beta} + \int_{-h}^{\eta} \int_z^{\eta} Z_{\alpha} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz dz \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} f_{\beta} \\ + \int_{-h}^{\eta} \int_z^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz dz \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \int_{-h}^{\eta} \int_z^{\eta} Z_{\alpha} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz dz f_{\alpha} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{aligned} \quad (8.45)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} uw dz \\ = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz \frac{\partial \eta}{\partial x} f_{\alpha} f_{\beta} + \int_{-h}^{\eta} Z_{\alpha} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} dz \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} f_{\beta} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (8.46)$$

$$\int_{-h}^{\eta} w^2 dz = \text{式(8.12)} \quad (8.47)$$

となる。ここで、radiation stressは、式(8.36)で表される通りであるが、数値計算を行う上では、 u' と U を区別することはできないため、式(8.28)を用いて、

$$S_{xx} = \int_{-h}^{\eta} \left(uu + \frac{p}{\rho} \right) dz - \bar{U} \bar{M} - g \frac{(h+\bar{\eta})^2}{2} \quad (8.48)$$

とし、さらに、式(8.27)を代入すると、

$$\begin{aligned} S_{xx} = & \int_{-h}^{\eta} (uu - uw) dz + \frac{g}{2} (\eta - \bar{\eta})^2 - \bar{U} \bar{M} \\ & + \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\eta} w dz \right] dz + \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} uw dz \right] dz \end{aligned} \quad (8.49)$$

となる、右辺第2項は、

$$\begin{aligned} \frac{(h+\bar{\eta})^2}{2} - \frac{(h+\bar{\eta})^2}{2} &= \frac{\bar{\eta}^2}{2} - \frac{(\bar{\eta})^2}{2} \\ &= \frac{(\bar{\eta} - \bar{\eta})^2}{2} \end{aligned} \quad (8.50)$$

から導かれる。ただし、 $\bar{\eta}$ は t の関数ではないと考えた場合である。式(8.49)は、Stive and Wind(1982)や Kobayashi *et al.*(1989)では、右辺第4項以降を無視している。計算の煩雑さをさげるため、ここでも第4項以降はまず無視することにした。

流量平均は、

$$\bar{M} = M + M' = \int_{-h}^{\eta} u dz \quad (8.51)$$

であり、 u としては計算から得られる値を用い、

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} u dz &= \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz \\ &= \int_{-h}^{\eta} Z_{\eta} dz \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial \eta} dz \frac{\partial \eta}{\partial x} f_{\alpha} + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial h} dz \frac{\partial h}{\partial x} f_{\alpha} + \int_{-h}^{\eta} Z_{\alpha} dz \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} \end{aligned} \quad (8.52)$$

となる。

8.2.3 運動量に関する数値的な考察

最終的に運動量保存式としては、もう一度記述すると、

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} \bar{M}) + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} = -(h+\bar{\eta}) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \quad (8.53)$$

となり、ここで、 S_{xx} は

$$S_{xx} = \int_{-h}^{\eta} (uu - ww) dz + \frac{g}{2} (\eta - \bar{\eta})^2 - \bar{U} \bar{M} \quad (8.54)$$

とした。このようにした時、

$$Err = \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} \bar{M}) + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + (h+\bar{\eta}) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \quad (8.55)$$

のように、運動量保存式の残差を定義する。そうすると、図8.2のようになった。これから、砕波帯内では運動量の保存がなされていないことがわかる。これがどの寄与なのかを見るために、まず、式(8.53)の第一項をみると図8.3のようになり、あきらかに無関係であることがわかる。そこで、式(8.54)から得られる radiation stress と、浅海域ということでエネルギーを用いた簡単な近似式

$$\hat{S}_{xx} = \frac{3}{2} E_t \quad (8.56)$$

から得られる radiation stress を比較したものが図8.4である。これから、 S_{xx} は正確に求められていると考えられる。これらの結果から Err が負であるということは、正を加えなければならないということを示唆している。さらに、 S_{xx} が正確に求められていることから、運動量が保存していれば、平均水位はかなりあがるのが期待できる。

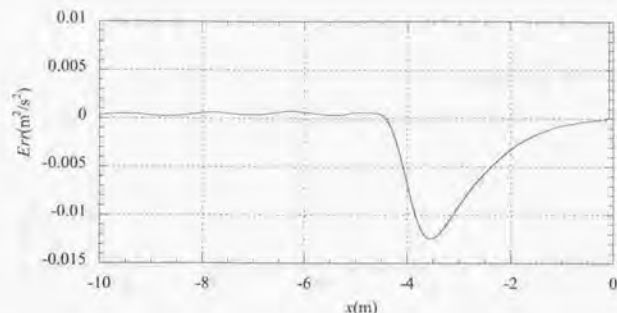


図 8.2: 運動量保存式の残差の大きさの空間変化

8.3 既知級数1項での検討

8.3.1 時々刻々の基礎方程式の満足度の検討

8.3.1.1 基礎方程式

速度ポテンシャルは偶次べき乗級数を用いて、

$$\phi = Z_{\alpha} f_{\alpha} \quad (8.57)$$

で表されるが、1項では、

$$\phi = f_1 \quad (8.58)$$

となる。そうすると基礎方程式は、

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 - \nu_e \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 0 \quad (8.59)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (h+\eta) \frac{\partial f_1}{\partial x} \right\} = 0 \quad (8.60)$$

となる。これを、代表長さ h_0 , l_0 , a_0 を用いて、次のように無次元化を行う。なお、'は無次元変数を表す。

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{x}{l_0}, & \hat{z} &= \frac{z}{h_0}, & \hat{t} &= \frac{\sqrt{gh_0}}{l_0} t, & \hat{\eta} &= \frac{\eta}{a_0} \\ \hat{h} &= \frac{h}{h_0}, & \hat{\phi} &= \frac{h_0}{a_0 l_0 \sqrt{gh_0}} \phi \end{aligned} \quad (8.61)$$

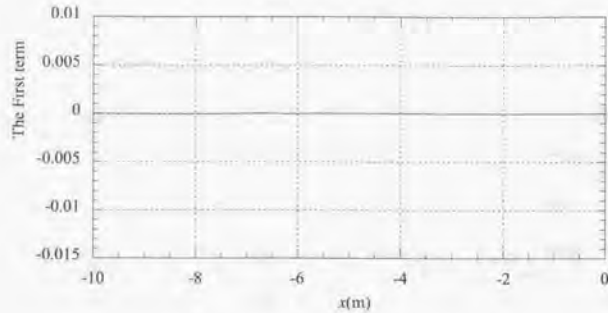


図 8.3: 式 (8.53) の第一項目の空間変化

そうすると、式 (8.59), (8.60) は、

$$a_0 g \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \eta + \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 - \nu_e \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad (8.62)$$

$$\frac{a_0 \sqrt{g h_0}}{l_0} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{h} + c\eta)}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + (\bar{h} + c\eta) \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad (8.63)$$

となる。ここで、 $\epsilon = \frac{a_0}{h_0}$ である。

そこで、式 (8.59) を x で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) - \left\{ \frac{\partial \nu_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \nu_e \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} \right\} = 0 \quad (8.64)$$

となり、無次元表示では、

$$\frac{a_0 g}{l_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \left\{ \frac{\partial \nu_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \nu_e \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} \right\} \right] = 0 \quad (8.65)$$

となる。また、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = u \quad (8.66)$$

を用いると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial \nu_e}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (8.67)$$

となる。これは、減衰項を除くと、先に述べた非線形長波方程式の運動量式と等しくなる。同様に無次元化を行うと、

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{a_0 \sqrt{g h_0}}{h_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{a_0 \sqrt{g h_0}}{h_0} \dot{u} \quad (8.68)$$

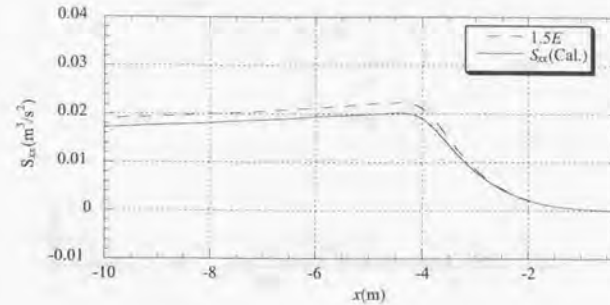


図 8.4: S_{xx} の比較

であるので、

$$\frac{a_0 g}{l_0} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial \nu_e}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \quad (8.69)$$

数値解析では、

$$a_0 = \frac{1}{2} H_i, \quad l_0 = L_i, \quad h_0 = h_i \quad (8.70)$$

と入射場所での諸量を用いる。

8.3.1.2 計算方法

計算方法としては 2 通り考えられる。1つはこれまで同様、水平床より波高を入射する方法 (方法 1) と、もう一つは、2 項で計算したときにえられた水面変動と、 f_1 を用いて計算する方法 (方法 2) である。しかし、図 8.5 を見ると明らかなように、後者の方法の方が精度が落ちることがわかった。これは、 f_2 の値が相対的に大きいはずなのに、はずしているため後者の方が逆に誤差が大きいと考えられる。前者の方法は、一様水深を 0.2m とし、入射波高を 0.1(m) とした。入射波高を実験から得られた波高にすることも考えたが、分裂が激しくなり結果的に砕波点付近でかなり大きな波高になることから、調節した。

図 8.6 は波高および平均水位の変化である。図 8.7 は級数項数による波形の比較である。1 項で行うとうまく入射ができなかったが、砕波後の遡上点付近では、2 項で行った結果とかわらないことがわかった。この様子から Inner Region 付近より岸側では、砕波変形は大きく変わっていないことがわかる。

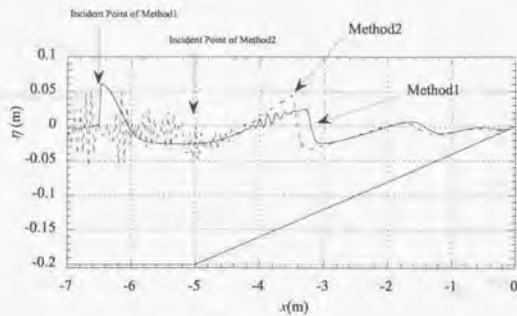


図 8.5: 2つの方法による比較

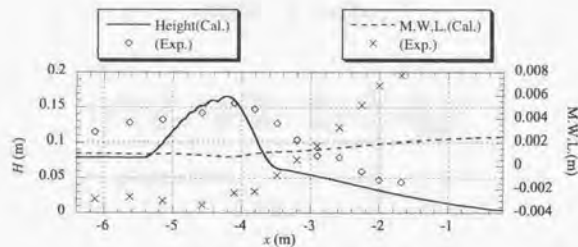


図 8.6: 波高および平均水位

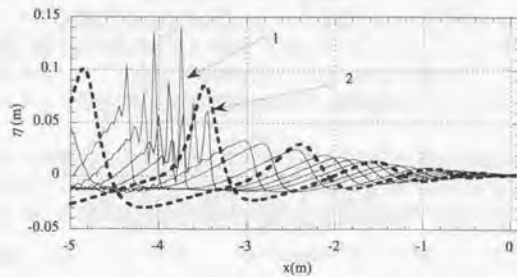


図 8.7: 級数の項数による比較

8.3.1.3 時々刻々の各項の大きさの比較

まず、基礎方程式 (8.62), (8.63), および (8.65) における時々刻々の満足度および各項の大きさを比較する。

図 8.8 は、式 (8.62) での各項の比較である。今後図の中の数字 1, 2, などは各式における項を示し、All は式そのものの誤差を示す。これを見るとある瞬間においては、式 (8.62) は非常に満足していることがわかる。

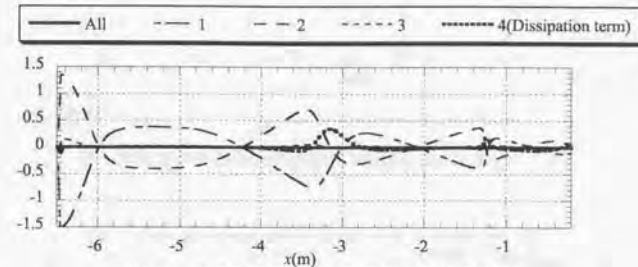


図 8.8: ある瞬間の式 (8.62) における項の比較

同様に、式 (8.63), (8.65) における比較を行ったものが、図 8.9 および 8.10 である。

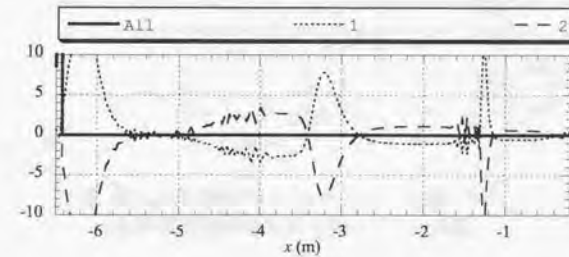


図 8.9: ある瞬間の式 (8.63) における項の比較

また、式 (8.65) に関して、時間的に誤差を示したのが図 8.11 である。これを見ると、 $t/T = 0.4$, および $t/T = 0.6$ のところで大きく 0 からずれている。そのうちわけを見るために $t/T = 0.6$ の瞬間での各項の比較を図 8.12 に示す。第 1 項目と第 2 項目はつりあっているように見え、第 3 項目が大きな原因であると考えられる (図 8.13)。

これは、単なる中央差分をしていることが原因による振動であると考えられ、いずれにしても式 (8.65) は、砕波の中では満たされていることがわかる。

念のため、式 (8.69) に関しての項の比較を行ったのが図 8.14 および 8.15 である。図 8.10 や図 8.11 と同じ傾向がでていることがわかり、かつ、砕波帯内では十分満たされていることがわかる。

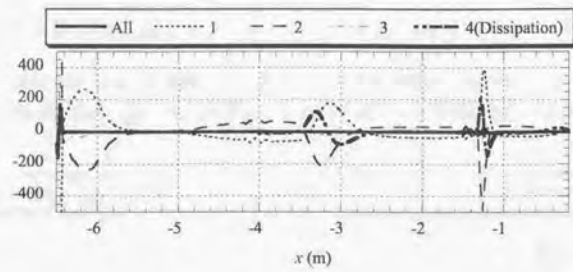


図 8.10: ある瞬間の式 (8.65) における項の比較

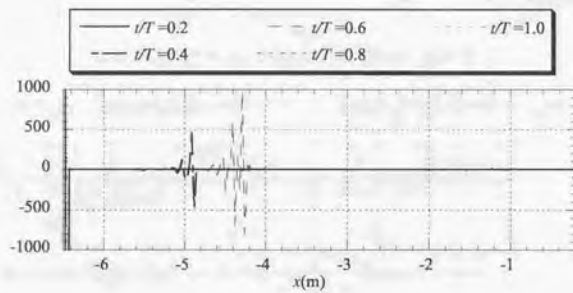


図 8.11: 式 (8.65) の誤差の時間的空間的变化

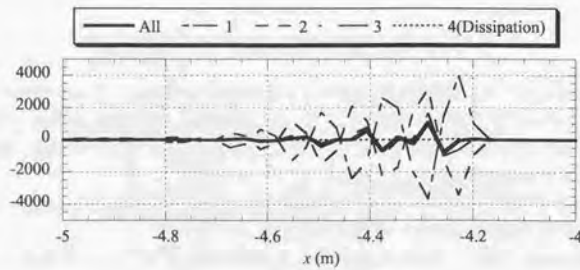


図 8.12: 式 (8.65) における $t/T = 0.6$ での各項の比較

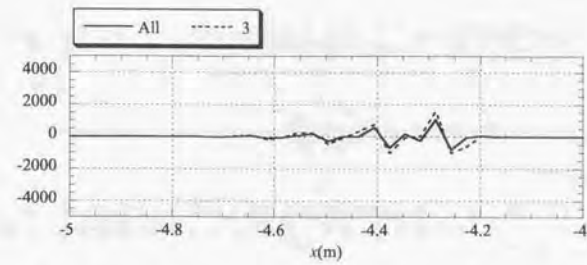


図 8.13: 式 (8.65) における $t/T = 0.6$ での第 3 項との比較

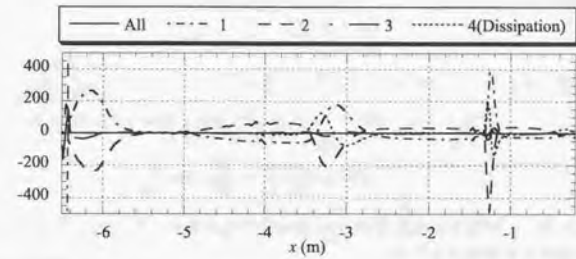


図 8.14: ある瞬間での式 (8.69) における項の比較

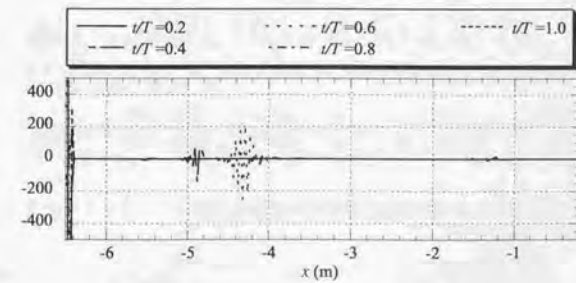


図 8.15: 式 (8.69) の誤差の時間的空間的变化

8.3.1.4 まとめ

この節では、基礎方程式の時々刻々の満足度を検討したところ、それぞれ、砕波帯内では十分満たされていることがわかった。

8.3.2 水深積分および時間平均における検討

8.3.2.1 基礎方程式

さきの議論により、時々刻々の式はそれぞれ満たされていることがわかった。次に、水深積分した形や時間平均をとった形での検討を行う。まず、式(8.65)を全水深で積分する。1項で行う場合、変数は鉛直方向に一様である。

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \{ (h + \eta) u \} \right] dz = 0 \quad (8.71)$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz + g \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial u}{\partial x} dz - \left(\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v_e}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} v_e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dz \right) = 0 \quad (8.72)$$

式(8.71)は、最終的に、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (h + \eta) u \} = 0 \quad (8.73)$$

となる。これを用いると、式(8.72)は、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (h + \eta) u}{\partial t} + \frac{\partial \{ (h + \eta) u \}}{\partial x} + g (h + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & - \left\{ (h + \eta) \frac{\partial v_e}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + (h + \eta) v_e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8.74)$$

となり、この式において時間平均をとると、式(8.53)に減衰項を加えた式と等価になるため、この式が平均水位を支配する重要な式となる。

ところで、式(8.71)は時々刻々満たされていることがわかっているため、式(8.74)は、

$$(h + \eta) \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial v_e}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v_e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right\} = 0 \quad (8.75)$$

で考えても同様の結果が得られるはずである。そこで、式(8.64)に $h + \eta$ をかけた式、

$$(h + \eta) \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) - \left\{ \frac{\partial v_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + v_e \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} \right\} \right] = 0 \quad (8.76)$$

で検討することとする。無次元表示では、

$$\frac{\alpha_0 h_0 g}{l_0} (h + \epsilon \eta) \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}} + \epsilon \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \hat{x}^2} - \left\{ \frac{\partial v_e}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \hat{x}^2} + v_e \frac{\partial^3 f_1}{\partial \hat{x}^3} \right\} \right] = 0 \quad (8.77)$$

となる。

図8.16は、ある瞬間の式(8.77)における各項の比較である。式(8.77)に時間平均を施すと、

$$\begin{aligned} & \overline{(h + \epsilon \eta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}} \right)} + \overline{(h + \epsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}}} + \overline{(h + \epsilon \eta) \epsilon \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \hat{x}^2}} \\ & - \left\{ \overline{(h + \epsilon \eta) \frac{\partial v_e}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \hat{x}^2}} + \overline{(h + \epsilon \eta) v_e \frac{\partial^3 f_1}{\partial \hat{x}^3}} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8.78)$$

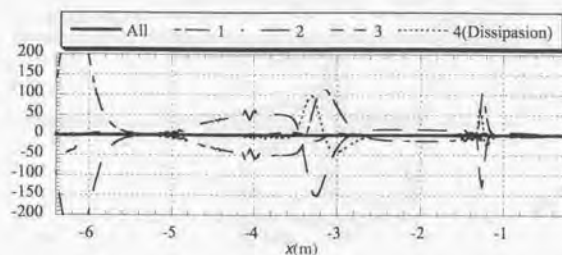


図 8.16: ある瞬間における式(8.77)の各項の比較

となり、ここで、 η を時間平均項とその変動にわけ、

$$\eta = \bar{\eta} + \eta' \quad (8.79)$$

とする。ただし、

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}, \quad \bar{\eta}' = 0 \quad (8.80)$$

である。すると、式(8.78)の左辺第2項に代入すると、

$$\begin{aligned} \overline{(h + \epsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}}} &= \overline{(h + \epsilon \bar{\eta} + \epsilon \eta') \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta')}{\partial \hat{x}}} \\ &= \overline{(h + \bar{\eta}) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \hat{x}}} + \overline{\epsilon \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \hat{x}}} \end{aligned} \quad (8.81)$$

となり、よって、式(8.78)は、

$$\begin{aligned} - (h + \bar{\eta}) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \hat{x}} &= \overline{\epsilon \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \hat{x}}} + \overline{(h + \epsilon \eta') \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}} \right)} + \overline{(h + \epsilon \eta') \epsilon \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \hat{x}^2}} \\ & - \left\{ \overline{(h + \epsilon \eta') \frac{\partial v_e}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \hat{x}^2}} + \overline{(h + \epsilon \eta') v_e \frac{\partial^3 f_1}{\partial \hat{x}^3}} \right\} \end{aligned} \quad (8.82)$$

となる。これは、海浜流方程式の p に、 $p = -\rho g z$ を代入したものと等しくなる。そこで、式(8.78)の各項を比較したものを図8.17に示す。それによると、減衰項の大きさが大きいことがわかる。

図8.18は、式(8.65)を単純に積分した

$$\frac{\alpha_0 g}{l_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}} \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}} + \epsilon \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \hat{x}^2} - \left\{ \frac{\partial v_e}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \hat{x}^2} + v_e \frac{\partial^3 f_1}{\partial \hat{x}^3} \right\} \right] = 0 \quad (8.83)$$

の各項をあらわしたものである。ここでは、減衰項の時間平均値は大きくないことになる。

8.3.2.2 まとめ

この節では、鉛直方向に積分をし、かつ時間平均をとった方程式がどのように満たされているかを検討した。それによると、鉛直方向に積分した方程式では減衰項の大きさが大きかったが、鉛直方向に積分しなかったものは減衰項の時間平均の大きさは大きくないことがわかる。

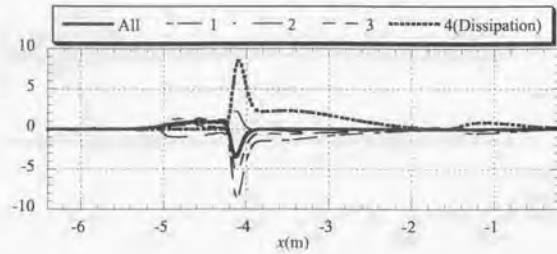


図 8.17: 式 (8.77) における時間による比較

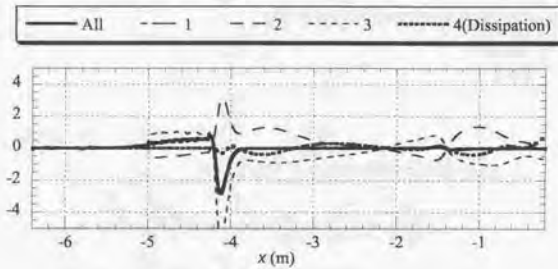


図 8.18: 式 (8.83) における時間による比較

8.3.3 平均水位の生じない理由

これらより、減衰項の係数が x 方向に一様であり、また時間的にも変動しないような場合、 $h + \eta$ の積分区間では、波峰部が通るとき、波谷部が通るときに差がおきるため、積分値が 0 にならないということになる。これを表すのが図 8.19 である。図中の Dissipation Term というのは、式 (8.65) における減衰項の全体である。図より、多少ずれてはいるものの、波峰部および、波谷部が通るときに減衰項が大きく変化していることがわかる。また、図 8.20 は、微分前の形での比較である。

よって、流量のような始めに積分したもので方程式をたてると、そのような減衰係数を掛けても時間平均値が 0 になるためにうまくセットアップがおきることになる。これにより、なぜ、流量ではセットアップが起こるのに、流速ではセットアップが起きないのかという理由が解明したことになる。さらに、言及すると、Zheng(1999) は、流速では、拡散型ではなく、抵抗型、つまり変数比例型にすると、セットアップが起きると示しているが、それは、この理由から明らかで、比例型にした場合、積分するとほぼ流量に等しくなるために、時間平均をとるとほぼ 0 になる。そのために拡散型よりよいセットアップ量があるのである。しかし、佐藤・鈴木(1990) が示すように、抵抗型では、波形が精度よく得られないことになる。

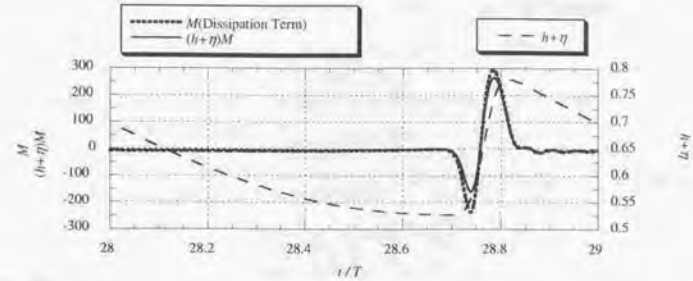


図 8.19: 減衰項と $(\hat{h} + \hat{\eta})$ の時系列

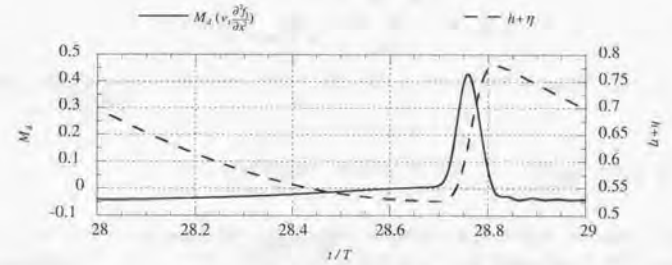


図 8.20: 減衰項 (2階微分; 原型) と $(\hat{h} + \hat{\eta})$ の時系列

8.4 摩擦項を加えることによる修正

8.4.1 摩擦項の導入

ここでは、Ohyama and Nadaoka(1991) にならい摩擦項の導入方法について述べる。散逸を考えないオイラー方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{\text{grad } p}{\rho} - \mathbf{g} \quad (8.84)$$

であり、

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 = \mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \quad (8.85)$$

を用いると、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + \frac{\text{grad } p}{\rho} + \mathbf{g} = -\mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{v} \quad (8.86)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = -\mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{v} \quad (8.87)$$

となる。ここで、摩擦型の減衰項を加えると、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = -\mathbf{v} \times \text{curl} \mathbf{v} - \nu_b \mathbf{v} \quad (8.88)$$

ここで、流速 \mathbf{v} は、ポテンシャル成分と回転成分に分けることができ [日野ら (1985)],

$$\mathbf{v} = \text{grad} \phi + \mathbf{v}_e \quad (8.89)$$

とすることができる。これを式 (8.88) に代入すると、

$$\begin{aligned} \text{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) \\ = -\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nu_b \text{grad} \phi - \nu_b \mathbf{v}_e \\ = -\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \{ \text{grad}(\nu_b \phi) - \phi \text{grad} \nu_b \} - \nu_b \mathbf{v}_e \end{aligned} \quad (8.90)$$

となり、よって、

$$\begin{aligned} \text{grad} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz + \nu_b \phi \right\} \\ = -\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \phi \text{grad} \nu_b - \nu_b \mathbf{v}_e \end{aligned} \quad (8.91)$$

となる。ここで、問題になるのが、右辺の取り扱いである。式 (8.88) の curl をとることにより、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \boldsymbol{\omega} \\ = (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} - \text{curl}(\nu_b \mathbf{v}) \\ = (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} - \nu_b \boldsymbol{\omega} - (\text{grad} \nu_b) \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (8.92)$$

が得られる。Ohyama and Nadaoka (1991) は一定値 ν_b のみが存在し鉛直 2 次元で考えた時の式 (8.92) における \mathbf{v}_e の解の大きさはポテンシャル成分の大きさに比べて十分小さいことを解析的に明らかにしている。

砕波帯内で十分に大きい渦度が与えられ、また ν_b が存在した時に同じ議論が成り立つことは考えにくい。ここではまず第一段階として \mathbf{v}_e はポテンシャル成分に比べて十分小さいと仮定する。そうすると、式 (8.91) は簡単になり、

$$\text{grad} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad} \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz + \nu_b \phi \right\} = \phi \text{grad} \nu_b \quad (8.93)$$

となる。ここである方向 s に関して積分をとることを考える。まず、 s と式 (8.93) との内積をとると、

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad} \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz + \nu_b \phi \right\} = \phi \frac{\partial \nu_b}{\partial s} \quad (8.94)$$

となる。断面 2 次元での水表面境界上で考えると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad} \phi)^2 + g\eta + \nu_b \phi - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_b \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \int_{z_0}^z \left\{ \phi \frac{\partial \nu_b}{\partial x} \right\} dx \quad (8.95)$$

となる。これにより力学的境界条件が導かれたことになり、非線形緩勾配方程式における η の変分が力学的境界条件と等価であることを念頭におくと、式 (8.95) と置き換えることにより摩擦による減衰が表せることになる。

8.4.2 各減衰項の係数

Chapalain *et al.* (1992) によれば、

$$\nu_b = \frac{4f_w}{3\pi(h+\eta)} \bar{U}_{\max} \quad (8.96)$$

とすれば、うまく実験室の減衰が表現できるとしている。ここで、 $\bar{U}_{\max} = a\sigma$ で a は、入射波高の半分としている。これは底面摩擦を考えて提案されたものではないが、本研究と同様、力学的境界条件に加えられたものであったので採用した。また、 $f_w = 0.1$ でもっとも良くあうということであったので、本研究でもそのようにする。また拡散型の係数は、Dibajnia・渡辺 (1987) により提案された

$$f_D = \alpha_D \tan \beta \sqrt{\frac{g}{D}} \sqrt{\frac{\bar{u} - u_r}{u_* - u_r}} \quad (8.97)$$

を用いる。ここで、

$$u_* = 0.4(0.57 + 5.3 \tan \beta) \sqrt{gD} \quad (8.98)$$

$$u_r = 0.4 \left(\frac{a}{h} \right)_b \sqrt{gD} \quad (8.99)$$

であり、 $\alpha_D = 2.5$ 、 $\left(\frac{a}{h} \right)_b$ は砕波点における振幅と水深の比、 \bar{u} は流速振幅とする。と ν_f は拡散型につける場合、

$$\nu_f = \frac{gD}{\sigma^2} f_D \quad (8.100)$$

となる。

また、 α_D は、開始点より 0 から 2.5 まで線形に増加させた。開始点から砕波点までを lb_1 、砕波点から残りの距離を lb_2 とし

$$lb_1 = 0.3L_b \quad (8.101)$$

$$lb_2 = 1.7L_b \quad (8.102)$$

とした。 L_b は砕波点での線形波長とする。

8.4.3 計算結果

これまで述べた条件での数値計算の結果を示す。計算条件は Nwogu (1996) のもので、周期 2s、入射波高 0.09m、斜面勾配 1/25 である。

まず、波高と平均水位についてのそれぞれ図 8.21, 8.22 に示す。波高はある程度あっているものの、平均水位の砕波点付近での急な上昇がみられていない。

次に、 ν_b の摩擦係数 f_w を 0.5 にした場合の波高および平均水位を図 8.23, 8.24 に示す。これより、 $f_w = 0.1$ より急な勾配で平均水位は上昇している。しかし、set-down はうまくできていない。波高については大きな変化はみられない。

これらより、平均水位の上昇や下降には摩擦項の影響がおおきく効いているものと考えられる。また、波高の変化は流速に当然依存するものの、流速に比べるとそれほど大きな変動はないことがわかる。これは、波形の変形は流速のいわば積分値であるので、その結果は理解することができる。

次に波形の比較を行う (図 8.25~8.28)。これは $f_w = 0.1$ での波形の比較である。 $h = 0.20(\text{m})$ のところでの上下の差がほかと比較して大きいのが気になるものの、 $h = 0.09(\text{m})$ のところでは、著者ら (1998) のように波形がとがりすぎていないことは大きな特徴である。 $h = 0.12(\text{m})$ のところも同様のことが言える。

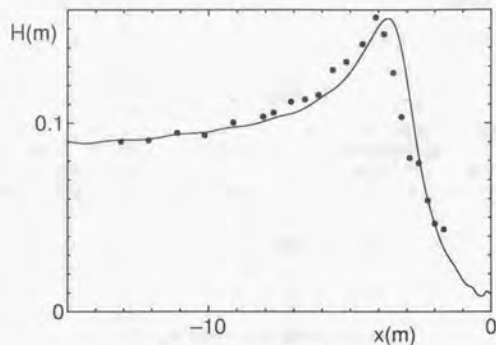


図 8.21: 波高の変化

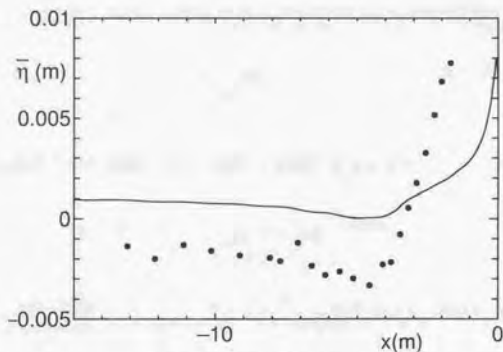


図 8.22: 平均水位の変化

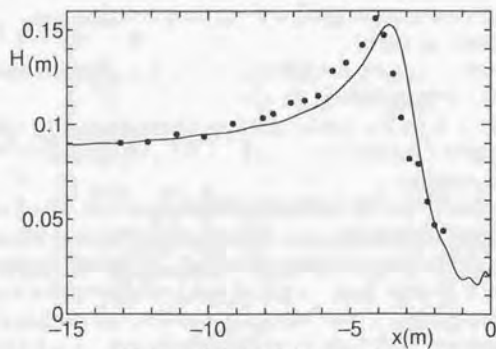


図 8.23: 波高の変化 ($f_w = 0.5$)

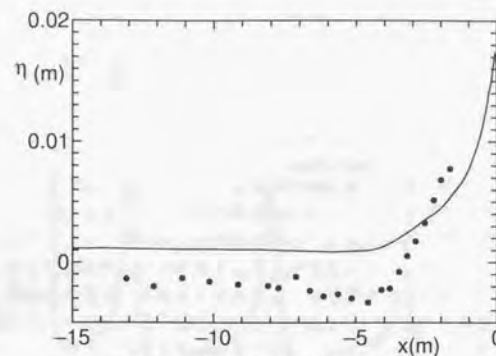


図 8.24: 平均水位の変化 ($f_w = 0.5$)

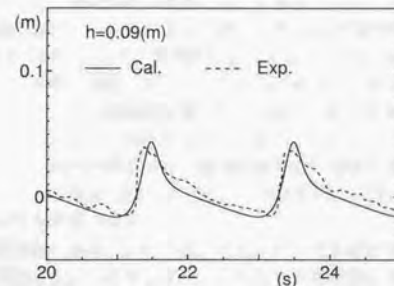


図 8.25: $h = 0.09\text{m}$ での時系列波形の比較

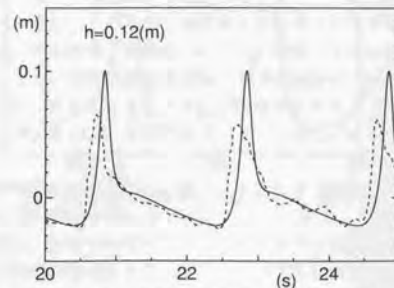
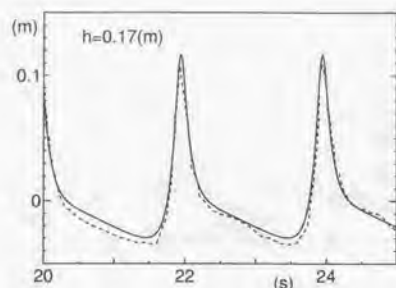
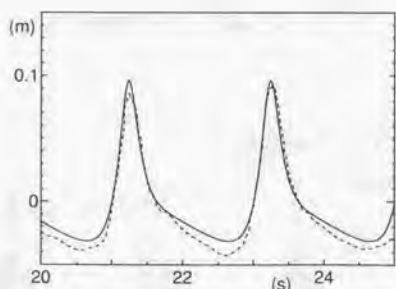


図 8.26: $h = 0.12\text{m}$ での時系列波形の比較

図 8.27: $h = 0.17\text{m}$ での時系列波形の比較図 8.28: $h = 0.20\text{m}$ での時系列波形の比較

Chapter 9. 結論

本研究では、強非線形・強分散波動方程式である非線形緩勾配方程式を用いた数値計算手法の開発を行い、その計算手法の妥当性を検討した。その結果得られたことを章ごとにまとめる。

第2章では、速度ポテンシャルを鉛直分布関数を用いて近似する本方程式は、鉛直分布関数の関数系にその計算精度、および適用性などが影響することが考えられる。そこで、さまざまな場で計算が可能となるように、関数系を変え、そのそれぞれにおいて基礎方程式を導出した。

第3章では、平面における数値計算手法についての開発を行い、かつその妥当性を実験値などを用いることにより検討した。断面における数値計算では、Crank-Nicholson および Newton 法を用いた半陰解法を採用していたが、平面においては、その解法では不安定であることがわかっているため、2段階の陽解法を用いた。それにより計算効率および精度をあげることを行った。まず、非線形性および分散性を調べるためとして、矩形水路における実験と比較したところ、良い精度で波形が予測できることがわかった。さらに、波の斜め入射を行い、計算がうまく行えることを確認した。

第4章では、構造物前面における入・反射波共存場における波浪場解析を行った。特に非線形問題の特徴である、Stem 波による検討をした。周期的な波による Stem 波の計算はあまりなく、また、一方では、構造物前面において波高が振動せず、かつ波高は入射角が小さくなるにつれ、小さくなると記述されている。しかし、他方では、構造物前面において波高はゆるやかではあるが振動をし、かつ、波高が最大をとる入射角の値が前者よりも小さいところをとっている。このような相違があるために、これについて検討したところ、構造物前面では、波高は緩やかに振動するものの、波高が最大となる入射角は前者のようになることを確認した。さらに、この計算では、広い領域と長い計算時間が必要であり、本計算手法の安定性も確認できた。

第5章では、現実的に構造物の前面においては、消波ブロックを置かれることが多いことから、任意の反射率を持つ境界を提案した。具体的には、エネルギーを数値的に吸収するとき生じる反射波を制御することによって、境界を作り出した。また、このときに、Stem 波のような現象が生じるかどうかを検討したところ、入射角が小さいときには、完全反射と同様の現象を確認した。

第6章では、砕波帯内における波浪変形予測に着目した。波は砕波することによって、エネルギーを失うために、波動方程式においても減衰する項が必要となる。そこで、非線形緩勾配方程式に適した、砕波減衰項を導出した。また、そのときの減衰率を、乱流方程式を用いて算出するモデルを構築し、実際に実験と比較した。その結果、波形については、実験より少し尖りすぎ、また、平均水位については set-up が生じないという問題はあるものの、波高の減衰については、良い精度で求めることが可能であることがわかった。さらに、これまでは、波が再生するような場では、経験的な定数を用いて減衰項を制御していたが、そのような定数を用いることなく、再生のような場を再現することができた。

第7章では、遡上計算が可能となるように、遡上点での境界の取り扱いについての提案をした。砕波しないような波について解析解と比較したところ、よく一致し、このモデルの妥当性を確認した。砕波するような波については、前章でのモデルでは、遡上部で不安定になるために、これまでの経験的な減衰係数を用いて遡上計算を行ったところ、set-up が生じないという問題が残った。

第8章では、set-up がなぜ生じないのかという問題について検討をした。set-up が生じない現象は、本方程式だけでなく、これまでも流速を用いた Boussinesq 方程式において、拡散型の砕波減衰項を用

いた場合にも生じないことがいわれていた。そこで、鉛直分布関数の項数を1項にとり、その原因を究明した。その結果、減衰項の係数が ϵ 方向に一様であり、また時間的にも変動しないような場合、 $h+\eta$ の積分区間では、波峰部が通るとき、波谷部が通るときに差が大きくなるため、本来、平均的に0であるべき項が0にならないために、平均水位が生じないことがわかった。

今後は、平面における砕波計算が可能となるよう、遡上境界や砕波モデルのさらなる検討が必要であると考えられる。

Reference

- [1] Abohadima, S.・余 錫平・磯部雅彦 (1998): 非線形波理論の最適分散特性について, 海岸工学論文集第45巻(1), pp.6-10.
- [2] 有川太郎・Mohammad Dibajnia・磯部雅彦 (1995): 非線形波の砕波変形シミュレーション, 第50回年次学術講演会講演概要集, 第2部(B), pp.786-787.
- [3] 有川太郎・磯部雅彦 (1997): 非線形緩勾配方程式を用いた砕波判定法の適用性, 海岸工学論文集, 第44巻(1), pp.91-95.
- [4] 石井敏雅・磯部雅彦・渡辺 晃 (1993): 非定常緩勾配不規則波動方程式における境界条件の改良と実用化の試み, 海岸工学論文集, 第40巻(1), pp.31-35.
- [5] 磯部雅彦 (1981): 保存波および浅水波変形に関する研究, 東京大学学位論文, 200p.
- [6] 磯部雅彦 (1986): 放物型方程式を用いた不規則波の屈折・回折・砕波変形の計算法, 第33回海岸工学講演会論文集, pp.134-138.
- [7] 磯部雅彦 (1985): 有限振幅波の諸理論と適用範囲, 水工学に関する夏期研修会講義集, 第21回, pp.(B-1-1)-(B-1-25).
- [8] 磯部雅彦 (1994a): 波浪変形解析のための波動方程式の比較研究, 土木学会論文集, No.491/II-2, pp.1-14.
- [9] 磯部雅彦 (1994b): 非線形緩勾配方程式の提案, 海岸工学論文集, 第41巻(1), pp.1-5.
- [10] 岩田好一郎・富田孝史・石井弘行 (1990): 砕波後の波の位置と運動エネルギーの低減過程, 海岸工学論文集, 第37巻, pp.46-50.
- [11] 大山 巧・喜岡 渉・多田彰秀 (1993): 非線形分散波動場に対する数値モデルの適用性について, 海岸工学論文集, 第40巻(1), pp.11-15.
- [12] 柿沼太郎・渡辺 晃・磯部雅彦 (1997): 三角形潜堤周辺の砕波を伴う波・流れ場の非線形数値計算, 海岸工学論文集, 第44巻(1), pp.111-115.
- [13] 片山裕之・佐藤慎司 (1993): Boussinesq 方程式を用いた不規則波の浅水・砕波変形の計算法, 海岸工学論文集, 第40巻(1), pp.16-20.
- [14] 木村雅臣 (1998): 海岸構造物を用いた波浪制御に関する非線形数値解析, 東京大学修士論文, 76p.
- [15] 近藤 修 (1996): 非線形緩勾配方程式を用いた波浪場計算, 東京大学修士論文, 118p.
- [16] 喜岡 渉 (1999): 平面構造物と波動場, 水工学に関する夏期研修会, 第35回, pp.(B-7-1)-(B-7-20).

- [17] Craggs, J. W. (後藤憲一訳)(1975): 変分法, 共立出版, 105p.
- [18] 合田良実 (1970): 砕波指標の整理について, 土木学会論文報告集, 第180号, pp.39-49.
- [19] 佐々木幹夫・佐伯 浩 (1974): 砕波後の変形に関する研究 (2), 第21回海岸工学講演会論文集, pp.39-44.
- [20] 佐藤慎司・鈴木秀典 (1990): 砕波帯における底面流速変動波形の評価法, 海岸工学論文集, 第37巻, pp.51-55.
- [21] 蒔 勤・高橋重雄・磯部雅彦 (1999): 防波堤の波力算定への数値波動水路の適用性について, 海岸工学論文集, 第46巻 (1), pp.41-45.
- [22] 鄭 培喜・余 錫平・磯部雅彦 (1999): 遡上波の高精度数値計算方法の提案, 海岸工学論文集第46巻 (1), pp.181-185.
- [23] Dibajnia, M.・渡邊 晃 (1987): 波浪場と海浜横断地形変化の数値計算モデル, 第34回海岸工学講演会論文集, pp.291-296.
- [24] 中村裕史 (1999): 遡上域を含めた沿岸漂差量岸沖分布に関する研究, 東京大学修士論文, 91p.
- [25] 灘岡和夫 (1999): 波動方程式-理論と数値シミュレーション-, 水工学に関する夏期研修会講義集, 第35回, pp.(B-2-1)-(B-2-19).
- [26] 灘岡和夫・中川康之 (1993): 新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動解析の試み, 海岸工学論文集, 第40巻, pp.6-10.
- [27] 灘岡和夫・Sendar Beji・大野修史 (1994): 新たな波動モデルによる強分散性非線形場の解析法の確率と室内実験による検証, 海岸工学論文集, 第41巻 (1), pp.11-15.
- [28] 灘岡和夫・大野修史 (1997): 水深積分型乱流エネルギー輸送方程式を連結させた砕波帯内波動場モデルの提案, 海岸工学論文集, 第44巻 (1), pp.106-110.
- [29] 灘岡和夫・田村 仁・清川哲志 (1999): 多方向平面波浪場における非線形分散性波動の砕波モデルに関する研究, 海岸工学論文集, 第46巻 (1), pp.171-176.
- [30] 田島芳満・磯部雅彦・渡邊 晃・横木裕宗 (1996): 非線形緩勾配方程式を用いた砕波限界に関する数値的研究, 海岸工学論文集, 第43巻 (1), pp.66-70.
- [31] 安田孝志・原 正典・榊原幸雄 (1990): 水深変化による砕波の支配パラメータと砕波形式について, 海岸工学論文集, 第37巻, pp.61-65.
- [32] 安田孝志・榊原幸雄・北村 茂 (1991): 水深変化による孤立波の変形と砕波に及ぼす斜面の影響, 海岸工学論文集, 第38巻 (1), pp.41-45.
- [33] 安田孝志・陸田秀美・水谷夏樹 (1994): ジェット放出過程の孤立波の水粒子速度場と砕波形式の関係, 海岸工学論文集, 第41巻 (1), pp.166-170.
- [34] 山下隆男・James R. Tallent・土屋義人 (1988): 砕波水平渦の生成機構と移動特性, 第35回海岸工学講演会論文集, pp.54-58.

- [35] Berkhoff, J. W., N. Booij and A. C. Radder (1982): Verification of a parabolic equation for propagation models for simple harmonic linear water waves, *Coastal Eng.*, 6, pp.255-280.
- [36] Carrier, G. F. and H. P. Greenspan (1957): Water waves of finite amplitude on a sloping beach, *J. Fluid Mech.*, Vol. 4, pp.97-109.
- [37] Chapalin, G., R. Cointe and A. Temperville (1992): Observed and modeled resonantly interacting progressive water-waves, *Coastal Eng.*, 16, pp.267-300.
- [38] Cox, D. T., N. Kobayashi and A. Okayasu (1994): Vertical variation of fluid velocities and shear stress in surf zone, *Proc. 24th Coastal Eng. Conf.*, pp.98-112.
- [39] Dong, L. (1995): Study on wave transformation over submerged triangular breakwaters, Doctoral Dissertation, Univ. of Tokyo, 143p.
- [40] Galvin, C. J. Jr. (1968): Breaker Type classification on three laboratory beaches, *J. Geophysical Res.*, Vol. 73(12), pp.3651-3659.
- [41] Gaughan K. M. and P. D. Komar (1975): The theory of wave propagation in wave of gradually varying depth and prediction of breaker type and height, *J. Geophysical Res.*, Vol. 80(21), pp.2991-2996.
- [42] Hirt, C. W. and B. D. Nichols (1981): Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries, *J. Comp. Phys.*, Vol. 39, pp.201-205.
- [43] Kobayashi, N., G. S. Desilva, K. D. Watson (1989): Wave transformation and swash oscillation on gentle and steep slopes, *J. Geophysical Res.*, Vol.94(C1), pp.951-966.
- [44] Longuet-Higgins, M. S. and E. D. Cokelet (1976): The deformation of steep surface waves on water I. A numerical method of computation, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 350, pp.1-26.
- [45] Luke, J. C. (1966): A Variational Principle For A Fluid With A Free Surface, *J. Fluid Mech.*, Vol. 27 part2, pp.395-397.
- [46] Madsen, P. A. and I. A. Svendsen (1983): Turbulent bores and hydraulic jumps, *J. Fluid Mech.*, Vol.129, pp.1-25.
- [47] Méhauté, B. L. (1963): On non-saturated breakers and the wave run-up, *Proc. 8th Coastal Eng. Conf.*, pp.77-92.
- [48] Mei, C. C. (1985): The applied dynamics of ocean surface waves, World Scientific, pp.384-386.
- [49] Miles, J. W. (1977): Resonantly interacting solitary waves, *J. Fluid Mech.*, Vol.79, pp.171-179.
- [50] Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, Vol.119, pp.618-638.
- [51] Nwogu, O. (1996): Numerical prediction of breaking waves and currents with boussinesq model, *Proc. 25th Coastal Eng. Conf.*, pp.4807-4820.
- [52] Ohyama, T. and K. Nadaoka (1991): Development of numerical wave tank for analyses of non-linear and irregular wave field. *Fluid Dynamics Res.*, vol.8, pp.231-251.

- [53] Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, pp.815-827.
- [54] Phillips, O. M. (1969): The dynamics of the upper ocean, Cambridge at the university press, pp.1-55.
- [55] Schäffer, H. A., R. Deigaard and P. A. Madsen (1992): A two-dimensional surf zone model based on the boussinesq equations, *Proc. 24th Coastal Eng. Conf.*, pp.576-589.
- [56] Schäffer, H. A., P. A. Madsen and R. Deigaard (1993): A Boussinesq model for waves breaking in shallow water, *Coastal Eng.*, 20, pp.185-202.
- [57] Stive, M. J. F. (1984): Energy dissipation in waves breaking on gentle slopes, *Coastal Eng.*, 8, pp.99-127.
- [58] Stive, M. J. F. and H. G. Wind (1982): A study of radiation stress and set-up in nearshore region, *Coastal Eng.*, 6, pp.1-26.
- [59] Svendsen, I. A., P. A. Madsen and J. B. Hansen (1978): Wave characteristics in the surf zone, *Proc. 16th Coastal Eng. Conf.*, pp.520-539.
- [60] Svendsen, I. A. (1984): Wave heights and set-up in a surf zone, *Coastal Eng.*, 8, pp.308-329.
- [61] Tanaka, M. (1993): Mach reflection of a large-amplitude solitary wave, *J. Fluid Mech.*, Vol. 248, pp.637-661.
- [62] Yamada, H. and T. Shiotani (1968): On the highest water of permanent type, *Bull. Disaster Prevention Res. Inst., Kyoto Univ.*, 18, pp.1-22.
- [63] Yoon, S. B. and P. L.-F. Liu (1989): Stem waves along breakwater, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, Vol. 115, pp.635-648.
- [64] Yne, D. K. and C. C. Mei (1980): Forward diffraction of Stokes waves by a thin wedge, *J. Fluid Mech.*, Vol.99, pp.33-52.
- [65] Zheng, P. (1999): A high-order numerical model for waves and currents based on boussinesq equations, Doctoral Dissertation, Univ. of Tokyo, 170p.

付録A 非線形緩勾配方程式の導出課程

ここでは、本文よりさらに詳細に非線形緩勾配方程式の導出課程について述べる。

A.1 式(2.39)について

式(2.39)に式(2.38)を代入する。まず、式(2.39)の左辺を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} f_{\alpha} \bar{Z}_{\alpha} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \bar{Z}_{\alpha} \right] &= \frac{\partial \eta}{\partial t} f_{\alpha} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial^2 Z_{\alpha}}{\partial \eta^2} dz + \frac{\partial Z_{\alpha}^{\eta}}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial \eta} dz + Z_{\alpha}^{\eta} \right] \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} f_{\alpha} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial^2 Z_{\alpha}}{\partial \eta^2} dz + \frac{\partial Z_{\alpha}^{\eta}}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \left[Z_{\alpha} + Z_{\alpha}^{\eta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial h}{\partial t} f_{\alpha} \bar{Z}_{\alpha} \right] = \frac{\partial h}{\partial t} f_{\alpha} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial^2 Z_{\alpha}}{\partial \eta \partial h} dz + \frac{\partial Z_{\alpha}^{\eta}}{\partial h} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{2} E_{\alpha\beta} f_{\alpha} f_{\beta} (\nabla \eta)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial \eta} \right) dz + \frac{\partial Z_{\alpha}^{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_{\beta}^{\eta}}{\partial \eta} \right] f_{\alpha} f_{\beta} (\nabla \eta)^2 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{2} D_{\alpha\beta} f_{\alpha} f_{\beta} (\nabla h)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial h} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial h} \right) dz + \frac{\partial Z_{\alpha}^{\eta}}{\partial h} \frac{\partial Z_{\beta}^{\eta}}{\partial h} \right] f_{\alpha} f_{\beta} (\nabla h)^2 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \nabla f_{\alpha} \nabla f_{\beta} \right] = \frac{1}{2} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (Z_{\alpha} Z_{\beta}) dz + Z_{\alpha}^{\eta} Z_{\beta}^{\eta} \right] \nabla f_{\alpha} \nabla f_{\beta} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [G_{\alpha\beta} f_{\alpha} f_{\beta} \nabla \eta \nabla h] = \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial h} \right) dz + \frac{\partial Z_{\alpha}^{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_{\beta}^{\eta}}{\partial h} \right] f_{\alpha} f_{\beta} \nabla \eta \nabla h \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [C_{\alpha\beta} f_{\alpha} \nabla f_{\beta} \nabla h] = \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial h} Z_{\beta} \right) dz + \frac{\partial Z_{\alpha}^{\eta}}{\partial h} Z_{\beta}^{\eta} \right] f_{\alpha} \nabla f_{\beta} \nabla h \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [F_{\alpha\beta} \nabla f_{\alpha} f_{\beta} \nabla \eta] = \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Z_{\alpha} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial \eta} \right) dz + Z_{\alpha}^{\eta} \frac{\partial Z_{\beta}^{\eta}}{\partial \eta} \right] \nabla f_{\alpha} f_{\beta} \nabla \eta \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{2} B_{\alpha\beta} f_{\alpha} f_{\beta} \right] = \frac{1}{2} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial Z_{\beta}}{\partial z} \right) dz + \frac{\partial Z_{\alpha}^{\eta}}{\partial z} \frac{\partial Z_{\beta}^{\eta}}{\partial z} \right] f_{\alpha} f_{\beta} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{2} g (\eta^2 - h^2) \right] = g \eta \quad (\text{A.10})$$

次に、式 (2.39) の右辺を第 1 項を計算する.

$$\frac{\partial \xi}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} = f_\alpha \dot{Z}_\alpha \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \right] &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \dot{Z}_\alpha + f_\alpha \frac{\partial \dot{Z}_\alpha}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \dot{Z}_\alpha + f_\alpha \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial \eta^2} dz + \frac{\partial Z_\alpha^\eta}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &\quad + f_\alpha \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial^2 Z_\alpha}{\partial \eta \partial h} dz + \frac{\partial Z_\alpha^{-h}}{\partial h} \right] \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

第 2 項は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial (\nabla \eta)} &= E_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla \eta + G_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla h + F_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha f_\beta \quad (\text{A.13}) \\ \nabla \left[\frac{\partial \xi}{\partial (\nabla \eta)} \right] &= \nabla (E_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla \eta) + \nabla (G_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla h) + \nabla (F_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha f_\beta) \\ &= \nabla E_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla \eta + 2E_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha f_\beta \nabla \eta + E_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla^2 \eta \\ &\quad + \nabla G_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla h + (G_{\alpha\beta} + G_{\beta\alpha}) \nabla f_\alpha f_\beta \nabla h + G_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla^2 h \\ &\quad + \nabla F_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha f_\beta + F_{\alpha\beta} \nabla^2 f_\alpha f_\beta + F_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha \nabla f_\beta \\ &= \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} \right) dz + \left(\frac{\partial Z_\alpha^\eta}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta^\eta}{\partial \eta} \right) \right] f_\alpha f_\beta (\nabla \eta)^2 \\ &\quad + \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} \right) dz + \left(\frac{\partial Z_\alpha^{-h}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta^{-h}}{\partial \eta} \right) \right] f_\alpha f_\beta \nabla \eta \nabla h \\ &\quad + 2E_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha f_\beta \nabla \eta + E_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla^2 \eta \\ &\quad + \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta}{\partial h} \right) dz + \left(\frac{\partial Z_\alpha^\eta}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta^\eta}{\partial h} \right) \right] f_\alpha f_\beta \nabla \eta \nabla h \\ &\quad + \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta}{\partial h} \right) dz + \left(\frac{\partial Z_\alpha^{-h}}{\partial \eta} \frac{\partial Z_\beta^{-h}}{\partial h} \right) \right] f_\alpha f_\beta (\nabla h)^2 \\ &\quad + (G_{\alpha\beta} + G_{\beta\alpha}) \nabla f_\alpha f_\beta \nabla h + G_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \nabla^2 h \\ &\quad + \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Z_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} \right) dz + \left(Z_\alpha^\eta \frac{\partial Z_\beta^\eta}{\partial \eta} \right) \right] \nabla f_\alpha f_\beta \nabla \eta \\ &\quad + \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial h} \left(Z_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} \right) dz + \left(Z_\alpha^{-h} \frac{\partial Z_\beta^{-h}}{\partial \eta} \right) \right] \nabla f_\alpha f_\beta \nabla h \\ &\quad + F_{\alpha\beta} \nabla^2 f_\alpha f_\beta + F_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha \nabla f_\beta \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

となる.

A.2 式 (2.40) について

式 (2.40) の左辺を計算する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial f_\alpha} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \dot{Z}_\alpha + \frac{\partial h}{\partial t} \dot{Z}_\alpha \\ &\quad + E_{\alpha\beta} f_\beta (\nabla \eta)^2 + D_{\alpha\beta} f_\beta (\nabla h)^2 \\ &\quad + (G_{\alpha\beta} + G_{\beta\alpha}) f_\beta \nabla \eta \nabla h + C_{\alpha\beta} \nabla f_\beta \nabla h + F_{\beta\alpha} \nabla f_\beta \nabla \eta + B_{\alpha\beta} f_\beta \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

式 (2.40) の右辺の第 1 項は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)} \right] &= \frac{\partial \dot{Z}_\alpha}{\partial t} \\ &= \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \eta} dz \frac{\partial \eta}{\partial t} + Z_\alpha^\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} dz \frac{\partial h}{\partial t} + Z_\alpha^{-h} \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= \dot{Z}_\alpha \frac{\partial \eta}{\partial t} + Z_\alpha^\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} + \dot{Z}_\alpha \frac{\partial h}{\partial t} + Z_\alpha^{-h} \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

となり、第 2 項は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial (\nabla f_\alpha)} &= A_{\alpha\beta} \nabla f_\beta + C_{\beta\alpha} f_\beta \nabla h + F_{\alpha\beta} f_\beta \nabla \eta \quad (\text{A.17}) \\ \nabla \left[\frac{\partial \xi}{\partial (\nabla f_\alpha)} \right] &= \nabla (A_{\alpha\beta} \nabla f_\beta) + \nabla (C_{\beta\alpha} f_\beta \nabla h) + \nabla (F_{\alpha\beta} f_\beta \nabla \eta) \\ &= \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (Z_\alpha Z_\beta) dz + \left(Z_\alpha^\eta Z_\beta^\eta \right) \right] \nabla f_\beta \nabla \eta \\ &\quad + \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial h} (Z_\alpha Z_\beta) dz + \left(Z_\alpha^{-h} Z_\beta^{-h} \right) \right] \nabla f_\beta \nabla h \\ &\quad + A_{\alpha\beta} \nabla^2 f_\beta \\ &\quad + \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Z_\beta}{\partial h} Z_\alpha \right) dz + \left(\frac{\partial Z_\beta^\eta}{\partial h} Z_\alpha^\eta \right) \right] f_\beta \nabla \eta \nabla h \\ &\quad + \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial Z_\beta}{\partial h} Z_\alpha \right) dz + \left(\frac{\partial Z_\beta^{-h}}{\partial h} Z_\alpha^{-h} \right) \right] f_\beta (\nabla h)^2 \\ &\quad + C_{\beta\alpha} \nabla f_\beta \nabla h + C_{\beta\alpha} f_\beta \nabla^2 h \\ &\quad + \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Z_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} \right) dz + \left(Z_\alpha^\eta \frac{\partial Z_\beta^\eta}{\partial \eta} \right) \right] f_\beta (\nabla \eta)^2 \\ &\quad + \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial h} \left(Z_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \eta} \right) dz + \left(Z_\alpha^{-h} \frac{\partial Z_\beta^{-h}}{\partial \eta} \right) \right] f_\beta \nabla \eta \nabla h \\ &\quad + F_{\alpha\beta} \nabla f_\beta \nabla \eta + F_{\alpha\beta} f_\beta \nabla^2 \eta \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

となる.

これらをまとめると基礎方程式が得られる.

あとがき

指導教官である磯部雅彦教授の博士論文(1981)の緒論の出だしは、

著者の専攻する海岸工学は、比較的新しい工学の一分野であり、日本に紹介されて4半世紀余りが経過したにすぎない。

となっています。この当時はまだ手書きの論文であり、大変な苦勞があったであろうことは容易に想像できます。現在は2000年であり、ちょうど20年が過ぎようとし、海岸工学の分野も大きく変化しています。第一回の海岸工学講演会が神戸で開かれたのが1954年であるので、この20年の変化というものはそれまでの20年の変化に比べても相当なものであることがわかります。その原因のひとつにComputerの進歩が含まれていることは間違いないと思われます。研究室には、6年間お世話になったが、その間にComputerの世界は劇的に進歩をとけています。それにもかかわらず、自分の研究速度が遅々として進まなかったことに対しては、非常に悔しいとともに、さらなる精進をせねばと気持ちを新たにさせられます。

しかし、ここまで研究を辛抱強く進めてこれたことに対しては本当に多くの方々へ感謝をしなければなりません。

研究室というものは閉鎖的で、また、閉鎖的であるがために、研究の進み具合によって、かなり気分が左右されます。著者の研究は数値計算が主であったために、本当に3年間、Computerの前に座っていたと言っても過言ではないくらいです。そのような状態であるために、研究室の先輩や後輩のほんのささいで、小さな心遣いが非常に励みになったと感じています。昼食や夕食でする会話、つらいときに遊んでくれたことが非常にうれしかったです。

技官の朝比奈良幸さんには、なにかにつけて相談ののってもらい、また、研究室の環境の改善に全力を注いだいただいたおかげで、快適に研究ができたと感じています。研究においては文献は重要であるが、探し方もままならなかったが、図書の方々に必死で探していただいたおかげで、とても貴重な資料を集めることができました。また、常日頃単位の心配をしていたいただいた事務の方々にも、ご迷惑をおかけしました。本当にありがとうございました。

この研究を良い方向に進めることができたのは、先生方のご助力なくしてはありえません。磯部雅彦教授には、まず基礎的なところで、「日本語がわからない、わからない」と言われ続け、最後まで、「日本語が」と言われました。また、方向性についても、違うところに向かおうとするとさりげなく、修正していただきました。6年間も指導していただいて言葉では言えない気持ちの方が多いため、できれば、何年か後にわかる日本語で先生に反論できる日がくればいいと思います。

渡辺見教授は、常に非常に優しく見守ってくださりました。さらに、鋭い質問を多くしていただけたおかげで、誤りを見つけることも多く、いつもゼミでめがねの奥からの鋭い視線にびくびくしていました。ありがとうございました。

佐藤順司助教授には、論文だけでなく、Computerに関してもいろいろ教わりました。論文内容に関して非常に細かくみていただき、さらに、多くの質問をしていただいたおかげで自分としても整理することができました。ありがとうございました。

佐々木浄助教授には、助手であるところから、ずっと、なにかにつけて相談をしましたし、また、非常に小生意気な後輩であったと思います。それにもかかわらず、失敗してもなにも言わずに尻拭いをしていただいたりして、感謝の気持ちでいっぱいです。

現在上海交通大学の余錫平先生や、名古屋工業大学助教授のMohammad Dibajnia先生には何かにつけて研究の質問をされ、非常にうれしく思いました。また、日本語を母国語としないにもかかわらず、日本語の指導をしていただきなんともいえない気持ちで、がんばろうと思いました。

また、たくさんの先生や友人、先輩、後輩にお礼を言いたいです。ありがとうございました。6年間も援助してくれた両親に感謝します。

最後に、好きに研究をさせてくれた妻にありがとうと言う気持ちを込めて、この論文を閉じたいと思います。

