

## 解 説

### 表現定理とグリーン関数 (3)

—全無限グリーン関数の2階微分を用いた  
点震源が引き起こす歪み・応力・密度摂動場の表現—

東京大学地震研究所\* 木村将也・亀伸樹

### Representation Theorem and Green's Function (3)

—Strain, Stress, and Density Perturbation Fields due to a Point Source Using 2nd  
Derivative of Green's Function in an Unbounded Homogeneous Isotropic Elastic Medium—

Masaya KIMURA and Nobuki KAME

Earthquake Research Institute, the University of Tokyo,  
1-1-1 Yayoi, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0032, Japan  
E-mail: mkimura@eri.u-tokyo.ac.jp

(Received March 14, 2018; Accepted October 24, 2018; published online on December 13, 2018)

#### §1. はじめに

表現定理とグリーン関数は震源に起因する媒質中の変位場を記述する強力な数学的手法である [日下部・亀(2015), 日下部・他(2016)]. 体積  $V$ , 外側表面  $S$  を持つ領域内部の変位場は, グリーン関数  $G_{ni}$  を用いて,  $V$  内の体積力  $f_i$  と  $S$  上のトラクション  $T_i$  と変位  $u_i$  の観点から

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V f_i(\xi, \tau) G_{ni}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) dV(\xi) \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S T_i(\mathbf{u}(\xi, \tau), \mathbf{n}) G_{ni}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) dS(\xi) \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S u_i(\xi, \tau) n_j(\xi) c_{ijpq}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) dS(\xi) \end{aligned} \quad (1)$$

のように表される [Aki and Richards (2002), 安芸・リチャーズ (2004)]. ここで,  $\mathbf{x}, t, \xi, \tau$  は受信点の位置と時刻, 震源の位置と時刻,  $n_j$  は  $S$  の法線ベクトル,  $c_{ijpq}$  は弾性定数である. 下添え字は, ここでは3次元 ( $i, j, \dots = 1, 2, 3$ ) を考え, アインシュタインの和の規約を用いる.

地震発生に伴う物理現象の数理モデルにおいて, グ

リーン関数の空間2階微分の評価がしばしば必要となる. なぜなら, 弾性変形場の歪み・応力・密度摂動との相互作用を考える問題においては, 変位場の空間勾配の評価が必要となり, その際に eq. (1) の右辺第3項に  $\partial^2 G_{np} / \partial \xi_q \partial x_m$  が現れるからである. 断層面上で応力と滑り速度の間に成り立つ境界積分方程式を用いた動的破壊問題の定式化はその典型である [例えば, Tada (2009), Kame and Kusakabe (2012), Kusakabe and Kame (2017)]. 近年, 地震の即時検知の高度化の可能性として, 地震発生に伴い光速で伝わる重力場・電磁場摂動の検出が提案されている. 弾性波速度で広がっていく応力や密度の摂動は, ピエゾ電気・磁気や重力変化を引き起こす [例えば, Ogawa and Utada (2000), Harms *et al.* (2015), Yamazaki (2016)]. このようなモデルにおいてもグリーン関数の2階微分の評価が必要になる.

上に挙げたモデリング研究において,  $\partial^2 G_{np} / \partial \xi_q \partial x_m$  ( $=: G_{np, qm}$ ) の評価には全無限グリーン関数  $G_{np}^{\infty}$  (全無限均質等方弾性媒質中における動弾性グリーン関数の解析解) が用いられてきた. これらの研究では, 震源をダブルカップル点震源とし, 関連する物理量 (電磁場摂動研究の場合は応力, 重力場摂動研究の場合は密度摂動) に対して  $G_{np, qm}^{\infty}$  を含む表現を導出している.  $G_{np}^{\infty}$  に対して

\* 〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1

その2階微分の導出は、特段の難しさはないものの高次テンソルのため大変煩雑である。任意の力源に対して関連する物理量が全て統一的に記された公式を利用できれば、各自の研究テーマに専念でき便利であろう。

そこで本稿では、 $G_{np,am}^{\infty}$ 、およびこれを用いたモーメントテンソルで記述される点震源が引き起こす歪み・応力・密度摂動場の表現を導き公式として記す。この過程で得られるシングルフォース震源に対する表現式も同時に記す。次に、近年注目を集める地震の即時重力変化検出の研究について紹介し、弾性体中のダブルカップル震源が引き起こす重力摂動の理論モデル波形が、本稿の公式により簡便に、任意の震源に拡張されることを示す。また、公式の応用例として、地震により4象限型に動的に再分配される質量をマグニチュードの関数として導き概算を示す。

## §2. 歪み・応力・密度摂動の表現：モーメントテンソル震源の場合

全無限均質等方弾性媒質中においてデカルト座標をとり、原点に位置する点震源を考える。震源のメカニズムと時間関数がモーメントテンソル関数  $M_{pq}(t)$  で表される場合、これにより生じる変位場は、

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}, t) &= M_{pq}^* \frac{\partial G_{np}^{\infty}}{\partial \xi_q} \\ &= \left( \frac{15\gamma_n\gamma_p\gamma_q - 3\gamma_n\delta_{pq} - 3\gamma_p\delta_{qn} - 3\gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho_0} \right) \\ &\quad \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_{pq}(t-\tau) d\tau \\ &\quad + \left( \frac{6\gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_n\delta_{pq} - \gamma_p\delta_{qn} - \gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho_0\alpha^2} \right) \frac{1}{r^2} M_{pq}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_5 &= -105\gamma_n\gamma_p\gamma_q\gamma_m + 15(\delta_{mn}\gamma_p\gamma_q + \delta_{mp}\gamma_q\gamma_n + \delta_{mq}\gamma_n\gamma_p + \delta_{pq}\gamma_n\gamma_m + \delta_{qn}\gamma_p\gamma_m + \delta_{np}\gamma_q\gamma_m) \\ &\quad - 3(\delta_{pq}\delta_{nm} + \delta_{qn}\delta_{pm} + \delta_{np}\delta_{qm}), \\ R_3^\alpha &= -45\gamma_n\gamma_p\gamma_q\gamma_m + 6(\delta_{mn}\gamma_p\gamma_q + \delta_{mp}\gamma_q\gamma_n + \delta_{mq}\gamma_n\gamma_p + \delta_{pq}\gamma_n\gamma_m + \delta_{qn}\gamma_p\gamma_m + \delta_{np}\gamma_q\gamma_m) \\ &\quad - (\delta_{pq}\delta_{nm} + \delta_{qn}\delta_{pm} + \delta_{np}\delta_{qm}), \\ R_2^\alpha &= -10\gamma_n\gamma_p\gamma_q\gamma_m + (\delta_{mn}\gamma_p\gamma_q + \delta_{mp}\gamma_q\gamma_n + \delta_{mq}\gamma_n\gamma_p + \delta_{pq}\gamma_n\gamma_m + \delta_{qn}\gamma_p\gamma_m + \delta_{np}\gamma_q\gamma_m), \\ R_1^\alpha &= -\gamma_n\gamma_p\gamma_q\gamma_m, \\ R_3^\beta &= -R_3^\alpha - 3\delta_{np}\gamma_q\gamma_m + \delta_{np}\delta_{qm}, \\ R_2^\beta &= -R_2^\alpha - 3\delta_{np}\gamma_q\gamma_m + \delta_{np}\delta_{qm}, \\ R_1^\beta &= -R_1^\alpha - \delta_{np}\gamma_q\gamma_m \end{aligned} \quad (5)$$

である。

これを用いると、歪み場  $e_{nm}(\mathbf{x}, t)$  は、

$$e_{nm}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right)$$

$$\begin{aligned} &- \left( \frac{6\gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_n\delta_{pq} - \gamma_p\delta_{qn} - 2\gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho_0\beta^2} \right) \frac{1}{r^2} M_{pq}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\ &+ \left( \frac{\gamma_n\gamma_p\gamma_q}{4\pi\rho_0\alpha^3} \right) \frac{1}{r} \dot{M}_{pq}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \\ &- \left( \frac{\gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho_0\beta^3} \right) \frac{1}{r} \dot{M}_{pq}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

と表される [Aki and Richards (2002), 安芸・リチャーズ (2004)]. ここで  $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$  は震源・受信点間の距離,  $\gamma_i = (x_i - \xi_i)/r$  は方向余弦,  $\rho_0$  は媒質の密度,  $\alpha$  は媒質のP波速度,  $\beta$  はS波速度,  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタ,  $*$  は時間での畳み込みである。距離減衰の違いから、右辺の第1項は近地項、第2・3項は中間地項、第4・5項は遠地項と呼ばれる。

この後の関連する物理量の導出を想定し、eq. (2) の右辺においてグリーン関数の受信点座標に関する微分  $\partial^2 G_{np}^{\infty} / \partial \xi_q \partial x_m (= G_{np,am}^{\infty})$  を考える。

$$\gamma_i = \frac{x_i - \xi_i}{r} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{\partial r}{\partial \xi_i} \quad (3)$$

を用いて微分を実行すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} &= M_{pq}^* \frac{\partial^2 G_{np}^{\infty}}{\partial \xi_q \partial x_m} \\ &= \frac{1}{4\pi\rho_0} \left[ R_5 \frac{1}{r^5} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_{pq}(t-\tau) d\tau \right. \\ &\quad + R_3^\alpha \frac{1}{\alpha^2 r^3} M_{pq}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + R_3^\beta \frac{1}{\beta^2 r^3} M_{pq}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\ &\quad + R_2^\alpha \frac{1}{\alpha^3 r^2} \dot{M}_{pq}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + R_2^\beta \frac{1}{\beta^3 r^2} \dot{M}_{pq}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\ &\quad \left. + R_1^\alpha \frac{1}{\alpha^4 r} \ddot{M}_{pq}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + R_1^\beta \frac{1}{\beta^4 r} \ddot{M}_{pq}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで各係数は

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8\pi\rho_0} \left[ S_5 \frac{1}{r^5} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_{pq}(t-\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + S_3^\alpha \frac{1}{\alpha^2 r^3} M_{pq}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + S_3^\beta \frac{1}{\beta^2 r^3} M_{pq}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + S_2^\alpha \frac{1}{\alpha^3 r^2} \dot{M}_{pq}(t - \frac{r}{\alpha}) + S_2^\beta \frac{1}{\beta^3 r^2} \dot{M}_{pq}(t - \frac{r}{\beta}) \\
 & + S_1^\alpha \frac{1}{\alpha^4 r} \ddot{M}_{pq}(t - \frac{r}{\alpha}) + S_1^\beta \frac{1}{\beta^4 r} \ddot{M}_{pq}(t - \frac{r}{\beta}) \Big]
 \end{aligned} \tag{6}$$

となる. ここで各係数は

$$\begin{aligned}
 S_5 &= -210\gamma_n\gamma_p\gamma_q\gamma_m + 30(\delta_{mn}\gamma_p\gamma_q + \delta_{mp}\gamma_q\gamma_n + \delta_{mq}\gamma_n\gamma_p + \delta_{pq}\gamma_n\gamma_m + \delta_{qn}\gamma_p\gamma_m + \delta_{np}\gamma_q\gamma_m) \\
 & \quad - 6(\delta_{pq}\delta_{nm} + \delta_{qn}\delta_{pm} + \delta_{np}\delta_{qm}), \\
 S_3^\alpha &= -90\gamma_n\gamma_p\gamma_q\gamma_m + 12(\delta_{mn}\gamma_p\gamma_q + \delta_{mp}\gamma_q\gamma_n + \delta_{mq}\gamma_n\gamma_p + \delta_{pq}\gamma_n\gamma_m + \delta_{qn}\gamma_p\gamma_m + \delta_{np}\gamma_q\gamma_m) \\
 & \quad - 2(\delta_{pq}\delta_{nm} + \delta_{qn}\delta_{pm} + \delta_{np}\delta_{qm}), \\
 S_2^\alpha &= -20\gamma_n\gamma_p\gamma_q\gamma_m + 2(\delta_{mn}\gamma_p\gamma_q + \delta_{mp}\gamma_q\gamma_n + \delta_{mq}\gamma_n\gamma_p + \delta_{pq}\gamma_n\gamma_m + \delta_{qn}\gamma_p\gamma_m + \delta_{np}\gamma_q\gamma_m), \\
 S_1^\alpha &= -2\gamma_n\gamma_p\gamma_q\gamma_m, \\
 S_3^\beta &= -S_3^\alpha - 3\delta_{mp}\gamma_q\gamma_n - 3\delta_{np}\gamma_q\gamma_m + \delta_{qn}\delta_{pm} + \delta_{np}\delta_{qm}, \\
 S_2^\beta &= -S_2^\alpha - 3\delta_{mp}\gamma_q\gamma_n - 3\delta_{np}\gamma_q\gamma_m + \delta_{qn}\delta_{pm} + \delta_{np}\delta_{qm}, \\
 S_1^\beta &= -S_1^\alpha - \delta_{mp}\gamma_q\gamma_n - \delta_{np}\gamma_q\gamma_m
 \end{aligned} \tag{7}$$

である.

応力場  $\tau_{nm}(\mathbf{x}, t)$  と密度摂動場  $\delta\rho(\mathbf{x}, t)$  はそれぞれ,

$$\begin{aligned}
 \tau_{nm}(\mathbf{x}, t) &= \lambda\delta_{nm}e_{kk} + 2\mu e_{nm} \\
 &= \lambda\delta_{nm} \left[ \left( \frac{-3\gamma_p\gamma_q + \delta_{pq}}{4\pi\rho_0\alpha^2} \right) \frac{1}{r^3} M_{pq}(t - \frac{r}{\alpha}) \right. \\
 & \quad + \left( \frac{-3\gamma_p\gamma_q + \delta_{pq}}{4\pi\rho_0\alpha^3} \right) \frac{1}{r^2} \dot{M}_{pq}(t - \frac{r}{\alpha}) \\
 & \quad \left. + \left( \frac{-\gamma_p\gamma_q}{4\pi\rho_0\alpha^4} \right) \frac{1}{r} \ddot{M}_{pq}(t - \frac{r}{\alpha}) \right] + 2\mu e_{nm}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\rho(\mathbf{x}, t) &= -\rho_0\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\
 &= -\delta(\mathbf{x}) \frac{M_{kk}(t)}{3\alpha^2} + \left( \frac{3\gamma_p\gamma_q - \delta_{pq}}{4\pi\alpha^2} \right) \frac{1}{r^3} M_{pq}(t - \frac{r}{\alpha}) \\
 & \quad + \left( \frac{3\gamma_p\gamma_q - \delta_{pq}}{4\pi\alpha^3} \right) \frac{1}{r^2} \dot{M}_{pq}(t - \frac{r}{\alpha}) \\
 & \quad + \left( \frac{\gamma_p\gamma_q}{4\pi\alpha^4} \right) \frac{1}{r} \ddot{M}_{pq}(t - \frac{r}{\alpha}) \tag{9}
 \end{aligned}$$

となる. 公式 eq. (9) の右辺第 1 項のデルタ関数とその係数に注目すると, 体積変化を伴う震源の場合, ある時刻のモーメントテンソルのトレース  $M_{kk}(t)$  (収縮  $M_{kk} < 0$  と膨張  $M_{kk} > 0$ ) の 1 価関数として, 原点に質量  $|M_{kk}(t)/3\alpha^2|$  相当分の「湧き出し」または「吸い込み」が現れることがわかる. 一方, 体積震源で生じる体積変化はモーメントテンソルのトレースと一意に対応しない [例えば, Kumagai *et al.* (2015), Mizuno *et al.* (2015), Ichihara *et al.* (2016), 日下部・他 (2016)]. このように, モーメントテンソルのトレースに対する質量と体積の関係は異なることが見て取れる.

この原点の質量変化は, 媒質全体での質量保存からその時刻に震源外側に引き起こされている質量再分配とちょうど打ち消し合うと考えられる. そこで, この原点の質量変化の符号を逆にしたものを, ここで新たに「体

積震源モーメントテンソルによる質量再分配  $\delta m^{\text{VMM}}$  (Volumetric Moment tensor Mass redistribution)」と名付ける. これは  $M_{kk}(t)$  の 1 価関数として

$$\delta m^{\text{VMM}}(M_{kk}(t)) = M_{kk}(t)/(3\alpha^2) \tag{10}$$

となる.

### § 3. 歪み・応力・密度摂動の表現：シングルフォース震源の場合

原点に作用するシングルフォース  $F_p(t)$  震源が引き起こす変位場は,

$$\begin{aligned}
 u_n(\mathbf{x}, t) &= F_p^* G_{np}^\infty \\
 &= \left( \frac{3\gamma_n\gamma_p - \delta_{np}}{4\pi\rho_0} \right) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau F_p(t - \tau) d\tau \\
 & \quad + \left( \frac{\gamma_n\gamma_p}{4\pi\rho_0\alpha^2} \right) \frac{1}{r} F_p(t - \frac{r}{\alpha}) \\
 & \quad - \left( \frac{\gamma_n\gamma_p - \delta_{np}}{4\pi\rho_0\beta^2} \right) \frac{1}{r} F_p(t - \frac{r}{\beta}) \tag{11}
 \end{aligned}$$

となる [Aki and Richards (2002), 安芸・リチャーズ (2004)]. これを更に震源座標  $\xi_q$  で微分して,  $pq$  成分のカップルフォース震源としたものが eq. (2) であることを考えれば, eq. (11) の受信点座標  $x_q$  に関する微分は eq. (2) の符号を反転させて  $M_{pq}$  を  $F_p$  で置き換えたものと等しくなる. すなわち,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_n}{\partial x_q} &= F_p^* \frac{\partial G_{np}^\infty}{\partial x_q} = -F_p^* \frac{\partial G_{np}^\infty}{\partial \xi_q} \\
 &= - \left( \frac{15\gamma_n\gamma_p\gamma_q - 3\gamma_n\delta_{pq} - 3\gamma_p\delta_{qn} - 3\gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho_0} \right) \\
 & \quad - \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau F_p(t - \tau) d\tau \\
 & \quad - \left( \frac{6\gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_n\delta_{pq} - \gamma_p\delta_{qn} - \gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho_0\alpha^2} \right) \frac{1}{r^2} F_p(t - \frac{r}{\alpha})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{6\gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_n\delta_{pq} - \gamma_p\delta_{qn} - 2\gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho_0\beta^2} \right) \frac{1}{r^2} F_p \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \\
& - \left( \frac{\gamma_n\gamma_p\gamma_q}{4\pi\rho_0\alpha^3} \right) \frac{1}{r} \dot{F}_p \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \\
& + \left( \frac{\gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho_0\beta^3} \right) \frac{1}{r} \dot{F}_p \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \quad (12)
\end{aligned}$$

となる。歪み場  $e_{nm}(\mathbf{x}, t)$  は,

$$\begin{aligned}
e_{nm}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right) \\
&= \left( \frac{-30\gamma_n\gamma_p\gamma_m + 6\gamma_n\delta_{pm} + 6\gamma_p\delta_{mn} + 6\gamma_m\delta_{np}}{8\pi\rho_0} \right) \\
&\quad \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau F_p(t-\tau) d\tau \\
&+ \left( \frac{-12\gamma_n\gamma_p\gamma_m + 2\gamma_n\delta_{pm} + 2\gamma_p\delta_{mn} + 2\gamma_m\delta_{np}}{8\pi\rho_0\alpha^2} \right) \\
&\quad \frac{1}{r^2} F_p \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \\
&+ \left( \frac{12\gamma_n\gamma_p\gamma_m - 3\gamma_n\delta_{pm} - 2\gamma_p\delta_{mn} - 3\gamma_m\delta_{np}}{8\pi\rho_0\beta^2} \right) \\
&\quad \frac{1}{r^2} F_p \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \\
&+ \left( \frac{-2\gamma_n\gamma_p\gamma_m}{8\pi\rho_0\alpha^3} \right) \frac{1}{r} \dot{F}_p \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \\
&+ \left( \frac{2\gamma_n\gamma_p\gamma_m - \gamma_n\delta_{pm} - \gamma_m\delta_{np}}{8\pi\rho_0\beta^3} \right) \frac{1}{r} \dot{F}_p \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \quad (13)
\end{aligned}$$

となる。応力場  $\tau_{nm}(\mathbf{x}, t)$  と密度摂動場  $\delta\rho(\mathbf{x}, t)$  はそれぞれ,

$$\begin{aligned}
\tau_{nm}(\mathbf{x}, t) &= \lambda\delta_{nm}e_{kk} + 2\mu e_{nm} \\
&= \lambda\delta_{nm} \left[ \left( \frac{-\gamma_p}{4\pi\rho_0\alpha^2} \right) \frac{1}{r^2} F_p \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{-\gamma_p}{4\pi\rho_0\alpha^3} \right) \frac{1}{r} \dot{F}_p \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \right] + 2\mu e_{nm}, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\rho(\mathbf{x}, t) &= -\rho_0\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\
&= \left( \frac{\gamma_p}{4\pi\alpha^2} \right) \frac{1}{r^2} F_p \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) + \left( \frac{\gamma_p}{4\pi\alpha^3} \right) \frac{1}{r} \dot{F}_p \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \quad (15)
\end{aligned}$$

となる。

#### §4. 地震即時重力摂動の理論モデルの紹介

Harms *et al.* (2015) はダブルカップル点震源から放射される地震波に伴う密度摂動がニュートン万有引力の法則に従い引き起こす重力摂動の理論波形を導いた。注目すべきは破壊開始時刻 ( $t=0$ ) 後直ちに観測点に現れ、P波到達時刻 ( $t=r/\alpha$ ) に先行する「即時重力摂動  $\delta g_i(\mathbf{x}, t)$ 」の表現である。Harms *et al.* (2015) の導いた重力摂動ポテンシャルと弾性体変位場のスカラーポテンシャルの等

価性の関係を用いれば、全無限均質等方弾性媒質において即時重力摂動が

$$\delta g_i(\mathbf{x}, t) = 4\pi G\rho_0 u_i^a(\mathbf{x}, t) \quad (0 < t < r/\alpha) \quad (16)$$

となることが示される [Kimura (2018)]. ここで  $G$  は万有引力定数であり、 $u_i^a(\mathbf{x}, t)$  は変位場のスカラーポテンシャル寄与分である (ヘルムホルツポテンシャルの観点から、変位場をスカラーポテンシャル  $\phi$  の勾配とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の回転の和として  $u_i = (\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A})_i =: (\mathbf{u}^a + \mathbf{u}^b)_i$  と構成できる). Eq. (2) において、 $u_i^a$  は P 波速度  $\alpha$ ,  $u_i^b$  は S 波速度  $\beta$  を含む項がそれぞれ対応する。 $u_i^a$  の各項を見ると、中間地項と遠地項は P 波速度で遅延する一方、近地項は  $\int_{r/\alpha}^{r/\beta} = -\int_0^{r/\alpha} + \int_0^{r/\beta}$  と分解され、それぞれは  $t=0$  から立ち上がり始めることがわかる。即時重力摂動の時間依存性は

$$\begin{aligned}
\int_0^{r/\alpha} \tau M_{pq}(t-\tau) d\tau &= \int_0^t dt' \int_0^{t'} M_{pq}(t'') dt'' \\
&=: I_2[M_{pq}](t) \quad (17)
\end{aligned}$$

となり、モーメント関数の 2 階時間積分関数  $I_2[M_{pq}](t)$  となる (距離依存性は  $1/r^4$ ) [Harms *et al.* (2015)]. すなわち、破壊の開始後、彼らの理論即時重力波形は長周期成分に富み緩やかな立ち上がりを示す。

Harms *et al.* (2015) は、同時に、重力波検出装置を用いた地震検知に必要となる重力空間勾配の理論波形も示した。これは歪み加速度の次元 [ $1/s^2$ ] を持つテンソル量であり、

$$\ddot{h}_{ij} := \frac{\partial\delta g_i}{\partial x_j} \quad (18)$$

であるが、これは eq. (16) の表現を用いれば

$$\frac{\partial\delta g_i}{\partial x_j} = 4\pi G\rho_0 u_{i,j}^a \quad (19)$$

となる。Harms *et al.* (2015) では  $\partial\delta g_i/\partial x_j$  をテンソル積の斜行基底を用いた表現として示した。一方、eq. (19) の右辺はデカルト座標系の直交基底で表されていることに注意する。Eq. (19) の  $u_{i,j}^a$  をダブルカップルとした eq. (4) を用いて代入したものは、Harms *et al.* (2015) の表現と完全に等価であるが、実際の数値計算においては本稿の表現がより簡便な道具となる。重力摂動と同様の議論により、重力摂動勾配の即時項の時間関数は  $I_2[M_{pq}](t)$ 、距離依存性は  $1/r^5$  となることがわかる [Harms *et al.* (2015)].

このモデルを 2011 年東北地方太平洋沖地震 ( $M_w=9.0$ , 以下、東北地震) に適用すると、期待される即時重力摂動の鉛直成分の最大値は日本各地で  $10^{-8} \text{ m/s}^2$  程度となり、これは P 波到着前に観測点サイトが静止しているならば加速度センサーにより十分測定可能な大きさで



ある [Kimura (2018)]. 最近, 東北地震の即時重力摂動の信号検出が報告されているが, そこで見いだされた加速度振幅はこのモデル予測値の 1/10 以下である [Montagner *et al.* (2016), Vallée *et al.* (2017), Kimura (2018), Kimura *et al.* (2018)]. これは即時重力が現れると, センサー重錘が加速度運動するだけでなく観測点サイトも同様に加速度運動し, その結果, 重力摂動に対する感度が低下することが原因と考えられる [Heaton (2017), Vallée *et al.* (2017), Kimura (2018), Kame and Kimura (2018)]. このことは, 加速度計測が地震の即時検出に最適でないことを示唆する.

一方, 重力勾配は潮汐力であり, 原理的には観測点の加速度運動に依存しない測定量である. 東北地震で期待される即時重力摂動勾配テンソルの各成分の大きさは,  $r < 100$  km で  $10^{-13}/s^2$  程度となる. 現時点で, 地震の 1~100 秒の帯域でこれを検知可能な測定装置はないが, 初期宇宙起源の重力波検出を目指す宇宙望遠鏡 TOBA (Torsion Bar Antenna) はこの帯域で  $10^{-8}/s^2$  の感度に達しており [Ando *et al.* (2010), Shoda *et al.* (2014)], 将来, TOBA の高感度化による地震速報の実現を目指している [安東 (2016)]. 現在, M9 級の超巨大地震に対して, 衛星重力観測から地震発生前後の重力変化の空間分布が検出可能になっている [例えば, 田中・日置 (2017)] が, このような高感度歪み計の開発により地震の発生直後から地震後の静的値に至る過渡的な重力の時間変化をすべて計測できる可能性がある.

Eq. (16) と eq. (19) は任意の弾性波動場に対して成り立つことに注意する. 弾性変形場の粗密成分が万有引力に従い引き起こす重力摂動の定量化であり, 震源メカニズムにも観測時間にも制限がない. すなわち, これらの式と本稿の公式とを組み合わせれば, モーメントテンソルあるいはシングルフォースで表される任意の震源に対して, 重力摂動 (ベクトル) とその勾配 (テンソル) の全成分の理論波形が, 始まりから終わりまで全ての時間にわたり簡便に計算できる [Kimura (2018)]. 例えば, 重力摂動勾配の場合, 震源のメカニズムと時間関数に応じて  $M_{pq}(t)$  (もしくは  $F_p(t)$ ) を設定し, eq. (4) (もしくは eq. (12)) を用いて  $u_j^i$  を計算し, eq. (19) に代入すれば良い. Kimura (2018) は, eq. (16) および eq. (19) を用いて, 球状空隙の爆発に対応する等方震源 ( $M_{pq}|_{(p,q)=(1,1),(2,2),(3,3)}$ ), および火山噴火を模したシングルフォース震源 ( $F_p|_{p=3}$ ) に対して, 設定された震源時間関数に対して理論記象を合成した. ただし, これらの震源には実際に質量移動が伴うことが普通であり, 合成された理論記象にはこの実際の質量移動が引き起こす重力摂動は含まれていないことに注意する.このような理論波形は, 将来, 超高感度で

計測された歪みデータにおけるイベント信号の同定, およびノイズ震源の解釈に資するであろう.

## § 5. 公式の応用例: 地震の 4 象限型動的質量再分配

### $\delta m^{\text{DQM}}$

密度摂動場の公式 eq. (9) を用いて, ダブルカップル点震源 (断層滑り) の場合に, 地震波伝播に伴う過渡的な密度摂動の総量がどの程度の質量変化となるかマグニチュードの関数として見積もってみよう.

$x_1-x_2$  平面上で  $x_1$  方向に断層が滑る場合を考える ( $M_{13} = M_{31} = M_0(t)$ , 他は 0). このとき, eq. (9) の密度摂動場は

$$\delta\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\sin 2\theta \cos\phi}{4\pi\alpha^2} \left[ \frac{3}{r^3} M_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{3}{\alpha r^2} \dot{M}_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha^2 r} \ddot{M}_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \right] \quad (20)$$

となり, Harms *et al.* (2015) の結果と一致する. ここで  $\theta, \phi$  はそれぞれ球座標系における余緯度と経度である. 放射パターンは P 波放射と同じ 4 象限型であり, 第 1 象限と第 3 象限に正, 第 2 象限と第 4 象限に負の密度摂動が生まれる (Fig. 1). 全方位にわたる密度摂動の空間積分は常に 0 となり, 確かに質量保存していることがわかる.

モーメント関数  $M_0(t)$  の継続時間が  $T$ , 最終モーメントが  $M_0, M_0(0)=0, \dot{M}_0(0)=\dot{M}_0(T)=0$  の場合に, eq. (20) の右辺の各項について見てみよう. ある震源距離  $r$  の地点において, 第 1 項は地震波が通り過ぎる  $r/\alpha < t < r/\alpha + T$  の間変化し, その後ゼロでない永久変化が残るので, これを静的項と呼ぶことにする. 静的項の永久変化は P 波通過後に残る断層滑りによる密度摂動を担い, 地震前後の静的重力変化と関係づけられる [Okubo (1991)]. この密度摂動の静的項を各象限内で積分すると原点での発散を伴うが, これは静的質量変化の評価には有限断層モデルを考える必要があることを意味する. 一方, 第 2 項と第 3 項は同じく  $r/\alpha < t < r/\alpha + T$  でのみ変化するものの, 地震波が通り過ぎると元のゼロ値に戻るため, これを動的項と呼ぶことにする. ある瞬間のスナップショットを考えると, 動的項は震源時間内であれば P 波球面の内側  $r < at$  に, 震源時間後は 2 つの P 波球面の間  $a(t-T) < r < at$  の領域にのみ存在し (Fig. 2), 時間とともに P 波速度で震源から遠ざかる.

以下では, この P 波によって運ばれる密度摂動の動的部分によって 4 象限内の各象限に再分配される質量  $\delta m^{\text{DQM}}$  (Dynamically induced Quadratic earthquake Mass redis-

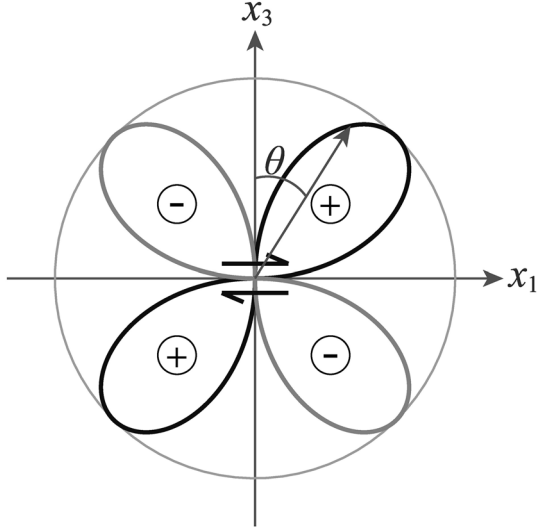


Fig. 1. Diagrams for the radiation pattern of the density perturbation due to a double couple, i.e.,  $\sin 2\theta \cos \phi$ . The diagram is for the plane  $\phi=0, \pi$ , and the pair of arrows at the center denotes the shear dislocation. Solid and gray lines denote the positive and negative signs of perturbation, respectively.

tribution) を求める。問題の対称性から各象限の質量変化の絶対値は等しく、第 1 象限 ( $x_1 > 0, x_3 > 0$ ) の正の質量変化を計算すれば十分である。震源過程に伴うこの質量再分配の時間変化を  $\delta m^{\text{DQM}}(t)$  とすると、

$$\begin{aligned} \delta m^{\text{DQM}}(t) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\max(0, \alpha(t-T))}^{\alpha t} dr r^2 \sin \theta \cdot \\ &\quad \frac{\sin 2\theta \cos \phi}{4\pi\alpha^2} \left[ \frac{3}{\alpha r^2} \dot{M}_0 \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha^2 r} \ddot{M}_0 \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \right] \\ &= \frac{4}{3\pi\alpha^2} M_0(t) \end{aligned} \quad (21)$$

とモーメント関数の単純な定数倍となり、 $t > T$  で最終値  $\delta m^{\text{DQM}} = 4M_0/(3\pi\alpha^2)$  となる。この結果を時空間的に捉えてみよう (Fig. 2)。  $0 < t < T$  では震源による密度摂動の生成が継続中であり  $\delta m^{\text{DQM}}(t)$  は時間とともに増加する。  $t > T$  で密度摂動の分布は遠ざかり領域が広がるが、密度摂動が幾何減衰し、質量は保存し最終値を保つ。なお、静的項は  $1/r^3$  で減衰するので、eq. (21) の被積分関数に含めても、震源から十分離ればこの動的再分配に寄与しない。

震源過程完了までに動的に再分配される質量  $4M_0/(3\pi\alpha^2)$  は、地震モーメント  $M_0$  を介して地震のモーメントマグニチュード  $M_w = (2/3)(\log_{10} M_0 - 9.1)$  と以下の式で関係づけられる。

$$\delta m^{\text{DQM}}(M_w) \approx 10^{1.5M_w+1} \text{ kg}. \quad (22)$$

ここで  $\alpha = 7 \text{ km/s}$  とした。  $M_w = 9.0$  の場合、4 象限型動

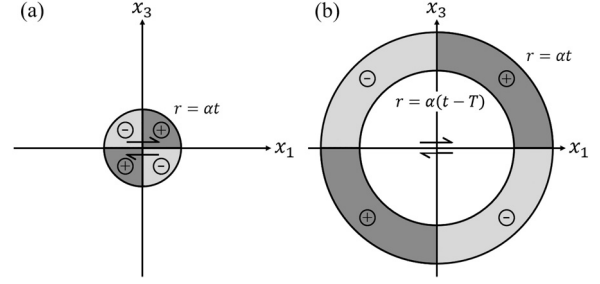


Fig. 2. Schematic illustrations of transient density perturbation distributions. Each spherical front expands with the P-wave velocity  $\alpha$ . (a) Case with  $0 < t < T$ , where  $T$  is the source duration. Density perturbation exists only inside the spherical front with radius  $r = \alpha t$ . (b) Case with  $t > T$ . Density perturbation exists between the outer spherical front with radius  $r = \alpha t$  and the inner front with radius  $r = \alpha(t - T)$ . Black and gray regions denote the positive and negative signs of perturbation, respectively.

Table 1. The relationship between  $M_w$  and  $\delta m^{\text{DQM}}(M_w)$ .

$M_w$	$\delta m^{\text{DQM}}(M_w) = 10^{1.5M_w+1} \text{ [kg]}$
1.0	$10^{2.5} \sim 3 \times 10^2$
2.0	$10^{4.0} \sim 1 \times 10^4$
3.0	$10^{5.5} \sim 3 \times 10^5$
4.0	$10^{7.0} \sim 1 \times 10^7$
5.0	$10^{8.5} \sim 3 \times 10^8$
6.0	$10^{10.0} \sim 1 \times 10^{10}$
7.0	$10^{11.5} \sim 3 \times 10^{11}$
8.0	$10^{13.0} \sim 1 \times 10^{13}$
9.0	$10^{14.5} \sim 3 \times 10^{14}$

的質量再分配は  $3 \times 10^{14} \text{ kg}$  となる。Table 1 にマグニチュード  $M_w$  と動的質量再分配の対応表を記す。

Eq. (21) と eq. (22) に理論的に記した動的質量再分配量は、現時点では、その評価自体に意義がないように思えるかもしれない。しかしながら、前節で触れたように、現在、TOBA [安東 (2016)] や Dual Torsion-Beam Gravimeter [MacManus *et al.* (2018)] といった地震発生の即時検知を目指す超高感度重力歪み計の開発が進められている。このような計測装置により地震の始まりから終わりまでの過渡的な重力の時間変化をすべて計測できた場合に、その重力変化源としての質量変化量の概算を与えるものとなる。今後の高感度重力歪み計の開発に期待する。

余談ではあるが、2017年地震研究所一般公開にて「地震の発生を重力変化でとらえる。10億分の1を探せ!」と題する研究展示を行った。Harms *et al.* (2015) のモデルから期待される東北地震による即時重力摂動の大きさは  $10^{-8} \text{ m/s}^2$  であり [Kimura (2018)], 重力加速度  $9.8 \text{ m/s}^2$  に比して  $10^{-9}$  であるからである。その際、交代で説明係を担当していただいた同僚の一言が忘れられない: 「地球の質量に対する地震の動的質量再分配も同じ比率になるのではないか?」。早速, eq. (22) を用いて計算してみると, 地球の質量  $M_{\oplus} = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$  [理科年表 (2017)] に対して, M9 地震による動的質量再分配は約  $10^{-10} M_{\oplus}$  であった。地震の動的質量再分配は地球の質量と全く分布が異なるが, 結果だけみれば彼の予想はおよそ当たっていたのである。科学者の直感はあなどれない。

## §6. ま と め

本稿では, 全無限均質等方媒質中の動弾性グリーン関数の空間2階微分関数を導いた。これを含む形でモーメントテンソルとシングルフォースの点震源の場合に対する歪み・応力・密度摂動場を表現し, 公式として記した。ここで導いた密度摂動の表現から新たに体積変化を伴う震源による質量再分配  $\delta m^{\text{VMM}} = M_{kk}(t)/(3\alpha^2)$  (Volumetric Moment tensor Mass redistribution) が示される ( $M_{kk}(t)$  は震源時間  $t$  におけるモーメントテンソルのトレース)。次に, 近年注目を集める地震の即時重力変化検出の研究について紹介し, そこで提案された重力摂動理論モデルが, 本稿の公式を用いて任意の震源に簡便に拡張されることを示した。また, 公式の応用例として, 地震の4象限型動的質量再分配量  $\delta m^{\text{DQM}} = 4M_0/(3\pi\alpha^2)$  (Dynamically induced Quadratic earthquake Mass redistribution) の表現を導き ( $M_0$  は地震モーメント), マグニチュード毎に動的質量再分配を概算した。ここに示した公式が, 様々な研究の一助となれば幸いである。

## 謝 辞

本稿の改訂にあたり, 2名の査読者および編集委員の高橋努氏のコメントは非常に有意義でした。記して感謝いたします。本研究は文部科学省による「博士課程教育リーディングプログラム」(MK), 「災害の軽減に貢献するための地震火山観測研究計画」(NK), およびJSPS科研費JP16K05532 (NK), JP18J21734 (MK) の助成を受けました。

## 文 献

Aki, K. and P. G. Richards, 2002, Quantitative Seismology, 2nd ed., University Science Books, Sausalito, 700 pp.

安芸敬一・P.G. リチャーズ, 2004, 地震学 定量的アプローチ, 上西幸司・亀 伸樹・青地秀雄 訳, 古今書院, 909 pp.

安東正樹, 2016, 重力波望遠鏡を用いた地震速報, 日本物理学会誌, **71**, 636-639.

Ando, M., K. Ishidoshiro, K. Yamamoto, K. Yagi, W. Koku-yama, K. Tsubono, and A. Takamori, 2010, Torsion-bar antenna for low-frequency gravitational-wave observations, Phys. Rev. Lett., **105**, 161101, doi:10.1103/PhysRevLett.105.161101.

Harms, J., J.-P. Ampuero, M. Barsuglia, E. Chassande-Mottin, J.-P. Montagner, S.N. Somala, and B.F. Whiting, 2015, Transient gravity perturbations induced by earthquake rupture, Geophys. J. Int., **201**, 1416-1425, doi:10.1093/gji/ggv090.

Heaton, T. H., 2017, Correspondence: Response of a gravimeter to an instantaneous step in gravity, Nature Comm., **8**, 66, doi:10.1038/s41467-017-01348-z.

Ichihara, M., T. Kusakabe, N. Kame, and H. Kumagai, 2016, On volume-source representations based on the representation theorem, Earth Planets Space, **68**, 14, doi:10.1186/s40623-016-0387-3.

Kame, N. and M. Kimura, 2018, Fundamental nature of transient elastic response to prompt gravity perturbations, Geophys. J. Int., revised.

Kame, N. and T. Kusakabe, 2012, Proposal of extended boundary integral equation method for rupture dynamics interacting with medium interfaces, J. Appl. Mech., **79** (3), 031017-031017-8, doi:10.1115/1.4005899.

Kimura, M., 2018, No identification of predicted earthquake-induced prompt gravity signals in data recorded by gravimeters, seismometers, and tiltmeters and its interpretation based on the principle of gravimetry, Master thesis, the University of Tokyo.

Kimura, M., N. Kame, S. Watada, M. Ohtani, A. Araya, Y. Imanishi, M. Ando, and T. Kunugi, 2018, Earthquake-induced prompt gravity signals identified in data recorded by dense observation networks, Earth Planets Space, revised.

国立天文台編, 2017, 理科年表 平成30年, 丸善出版.

Kumagai, H., Y. Maeda, M. Ichihara, N. Kame, and T. Kusakabe, 2014, Seismic moment and volume change of a spherical source, Earth Planets Space, **66**, 7, doi:10.1186/1880-5981-66-7.

日下部哲也・亀 伸樹, 2015, 表現定理とグリーン関数—全無限グリーン関数による有限領域の弾性変形場の表現—, 地震2, **68** (4), 83-89, doi:10.4294/zisin.68.83.

日下部哲也・亀 伸樹・市原美恵・熊谷博之, 2016, 表現定理とグリーン関数 (2) 一体積震源のモーメントテンソル表現—, 地震2, **68** (6), 169-176, doi:10.4294/zisin.68.169.

Kusakabe, T. and N. Kame, 2017, Derivation of 2-D XBIEM kernels and their application to a rupture crossing a bimaterial interface, Geophys. J. Int., **210** (3), 1374-1387, doi:10.1093/gji/ggx240.

McManus, D.J., P.W.F. Forsyth, N.A. Holland, R.L. Ward, D.A. Shaddock, D.E. McClelland, and B.J.J. Slagmolen,

- 2018, Early Earthquake Detection with a Dual Torsion-Beam Gravimeter, physics.ins-det, Sep 13, 2018, arXiv:1809.04787.
- Mizuno, N., M. Ichihara, and N. Kame, 2015, Moment tensors associated with the expansion and movement of fluid in ellipsoidal cavities, *J. Geophys. Res. Solid Earth*, **120**, 6058–6070, doi:10.1002/2015JB012084.
- Montagner, J-P., K. Juhel, M. Barsuglia, J-P. Ampuero, E. Chassande-Mottin, J. Harms, B. Whiting, P. Bernard, E. Clévéde, and P. Lognonné, 2016, Prompt gravity signal induced by the 2011 Tohoku-Oki earthquake, *Nature Comm.*, **7**, 13349, doi:10.1038/ncomms13349.
- Ogawa, T. and H. Utada, 2000, Coseismic piezoelectric effects due to a dislocation: I. An analytic far and early-time field solution in a homogeneous whole space, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **121**, 273–288, doi:10.1016/S0031-9201(00)00177-1.
- Okubo, S., 1991, Potential and gravity changes raised by point dislocations, *Geophys. J. Int.*, **105** (3), 573–586, doi:10.1111/j.1365-246X.1991.tb00797.x.
- Shoda, A., M. Ando, K. Ishidoshiro, K. Okada, W. Kuyama, Y. Aso, and K. Tsubono, 2014, Search for a stochastic gravitational-wave background using a pair of torsion-bar antennas, *Phys. Rev. D*, **89**, doi:10.1103/PhysRevD.89.027101.
- Tada, T., 2009, Boundary Integral Equation Methods for Earthquake Rupture Dynamics, in “Fault-Zone Properties and Earthquake Rupture Dynamics”, ed. by E. Fukuyama, Academic Press, Burlington, 217–267.
- 田中優作・日置幸介, 2017, GRACE 地震学—衛星重力観測による地震研究のこれまでとこれから—, *地震*, **69**, 69–85, doi:10.4294/zisin.69.69.
- Vallée, M., J. P. Ampuero, K. Juhel, P. Bernard, J-P. Montagner, and M. Barsuglia, 2017, Observations and modeling of the elastogravity signals preceding direct seismic waves, *Science*, **358**, 1164–1168, doi:10.1126/science.aao0746.
- Yamazaki, K., 2016, Temporal variations in magnetic signals generated by the piezomagnetic effect for dislocation sources in a uniform medium, *Geophys. J. Int.*, **206**, 130–141, doi:10.1093/gji/ggw125.