地　震　　第 2 輯
第 68 巻（2016）169-176 頁

DOI: 10.4294/zisin.68.169

解　説

表現定理とグリーン関数（2）
――体積震源のモーメントテンソル表現――

東京大学地震研究所*　日下部哲也・亀　伸樹・市原美恵
名古屋大学大学院環境学研究科**　熊谷博之

Representation Theorem and Green's Function (2)
—Moment Tensor Representation of Volume Sources—

Tetsuya KUSAKABE, Nobuki KAME and Mie ICHIHARA
Earthquake Research Institute, the University of Tokyo,
1-1-1 Yayoi, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0032, Japan
E-mail: kusaka@eri.u-tokyo.ac.jp

Hiroyuki KUMAGAI
Graduate School of Environmental Sciences, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601, Japan

(Received September 14, 2015; Accepted February 8, 2016; published online on March 2, 2016)

§1.　はじめに

モーメントテンソルの等方成分を震源の体積変化と結びつける際に 2 つの異なる体積変化が現れる［例えば，Aki and Richards (1980, 2002, 2004)］．ΔV^T(T: transformational）と ΔV^C(C: confined)である．ΔV^C は実際の体積変化であり，ΔV^T は震源のモーメントテンソル表現にて非弾性的に導入される応力ゼロ歪み (stress-free strain) による体積変化である．

両者は Eshelby (1957) の変形 (transformation) 埋め込み操作で関係づけられる．そこでは，はじめに，震源の物理的実体に必ずしも対応しない応力ゼロ歪みが非弾性的に導入され，そしてそれが弾性体媒質において実際の震源の変形と等価な体積力を与えることが自明のものとして理論が展開される．この幾分天下り的な体積震源の定式化には戸惑うことが多く理解が難しい．実際，地震学の教科書の初版と第二版において異なる説明が試みられているように，これまで両者の区別には相当の注意が払われてきたが [Aki and Richards (1980, 2002, 2004)]，21 世紀においてもなおモーメントテンソルに現れるこれら 2 つの体積変化の混同が見受けられる状況［例えば，Kumagai *et al.* (2014)］は，この理論の分かり難さの証であろう．

本稿では，体積震源のモーメントテンソル表現について，教科書で一般的である非弾性変形を含む Eshelby の埋め込みからではなく，震源における実際の変位と応力の状態からはじめて，弾性変形のみの観点から解説を試みる．すなわち，弾性体力学の基本定理である表現定理において線形弾性論に基づく仮想的埋め込み操作［例えば，Altiero and Gavazza (1980); 小林 (2000)］を適用し，そこで生じる新たな項を仮想的な変位 u_i^I (I: imaginary) と解釈することで変位過剰 (displacement glut) 型の震源 [Ichihara *et al.* (2016)] としてモーメントテンソルに至ることを示す．この変位過剰表現では ΔV^T と ΔV^C が u_i^I により結びつく．この u_i^I の物理的起源を考えればモーメントテンソルに現れる実効的体積変化 ΔV^T のイメージが湧くようになる．最大の利点は，変位過剰表現により ΔV^T が体積震源の等価体積力を与える数学的構造が明快に示されることである．これにより，体積震源の

* 〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1
** 〒464-8601 名古屋市千種区不老町

モーメントテンソル表現に現れる ΔV^T と ΔV^C の関係が包括的に理解できるようになる．

変位過剰型の震源表現から，震源体積変化を推定する際の正しい物の見方が示唆される．従来，データ解析から決定されたモーメントテンソルの対角成分を震源での体積変化と結びつける関係式が，単純な等方震源の場合でさえ複数提案され，どの式を体積変化推定に用いるべきか混乱があった [Kumagai *et al*. (2014)]．表現定理に基づく変位過剰表現により，ΔV^T と ΔV^C の関係は体積震源容器の形状に依存し複数の対応関係があり得るのが当然であること，従って体積変化の推定には震源モデルの想定が必須であること，に得心がいく．

変位過剰表現はまた，火道・マグマだまり連結系のような現実的な複雑系に対して u_i^I を評価する具体的手順を与え，これを用いて体積震源のモーメントテンソルを常に表現できるようになる．Eshelby (1957) の理論を用いても原理的には同様に可能であるが，応力過剰の震源表現から始めて数学的発散をとり内部歪みに変換する手順が必要となり（2.3.2 節），実際の適用は単純な震源形状に限られてきた．これに鑑みれば，変位過剰表現の持つこの実際的な有用性は火山地震学研究における大きな前進であろう．火山震源の物理モデリングとモーメントテンソル逆解析による火山震源過程研究との間の橋渡しにこの変位過剰表現が広く活用できる．

§2.　表現定理と地震モーメントテンソル

2.1　体積震源への表現定理の適用

弾性体媒質中に置かれた表面 $S(=S^{out})$ で囲まれた体積 $V(=V^{out})$ の体積震源容器 (Fig. 1) を考える．S 上の境界条件（変位 u_i，もしくはトラクション $T_i=\tau_{ij}n_j$）が与えられ，V 中で体積力が作用しない場合，弾性体領域内側（＝体積震源容器の外側）の変位場 $u_n(\boldsymbol{x},t)$ は表現定理に全無限グリーン関数 $G_{ij}^{\infty}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ を適用して Eq. (1) により表される［日下部・亀 (2015)］．

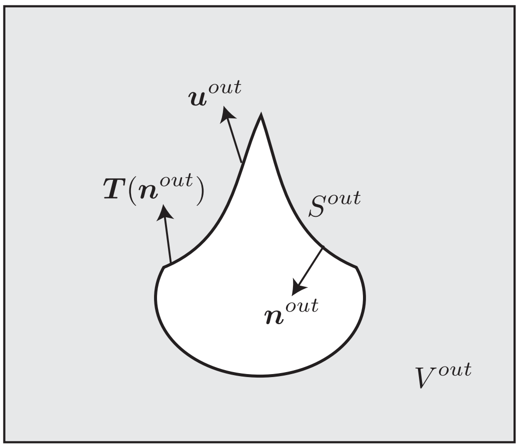

Fig. 1.　A volume source cavity surrounded by an external surface S^{out} (its normal vector $\boldsymbol{n}^{out}$) embedded in an elastic medium with volume V^{out}. $\boldsymbol{u}^{out}$ and $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}^{out})$ represent the displacement and traction vectors on S^{out}, respectively.

$$u_n(\boldsymbol{x},t)= -\int_0^{\infty}d\tau\int_S u_i(\boldsymbol{\xi},\tau)n_j(\boldsymbol{\xi})c_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial\xi_l}G_{nk}^{\infty}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi},0)dS(\boldsymbol{\xi}) +\int_0^{\infty}d\tau\int_S T_i(\boldsymbol{\xi},\tau)G_{ni}^{\infty}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi},0)dS(\boldsymbol{\xi}). \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\xi},\tau$ は受信点の位置と時刻，震源の位置と時刻，$n_j(=n_j^{out})$ は弾性体領域外側を向く S の法線ベクトル，c_{ijkl} は弾性常数である．u_i と G_{nk} は $t<0$ で静的過去を満たすものとし，下添え字は特に明記しない限り 3 次元 ($i,j,\cdots=1,2,3$) を考え，アインシュタインの和の規約を用いる．媒質は不均質非等方であっても良く，G_{ij}^{∞} はグリーン関数の空間の相反性がなりたつための無限遠での条件を満たすものとする［日下部・亀 (2015)］．静的過去を満たす場合，Eq. (1) の時間の畳込み積分に新たに $*$ 記号を用いると，Eq. (2) により表される．

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=-\int_S u_i(\boldsymbol{\xi})n_j(\boldsymbol{\xi})c_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})*\frac{\partial}{\partial\xi_l}G_{nk}^{\infty}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi}) +\int_S \tau_{ij}(\boldsymbol{\xi})n_j(\boldsymbol{\xi})*G_{ni}^{\infty}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi}). \tag{2}$$

ここで，関数 $f(t)$ と $g(t)$ が $t<0$ で 0 となる場合，$f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ であることを用いた．

以下で，我々は，震源容器の表面において u_i と T_i の両方が弾性体の運動方程式に従い決定されたある状態を考える（例えば，マグマの圧力増分 $\Delta P>0$ によりトラクション $T_i(=\tau_{ij}n_j=(-\Delta P\delta_{ij})n_j)$，変位 u_i が生じている状態．δ_{ij} はクロネッカーのデルタ）．この時，変位場 (Eq. (2)) は，震源容器表面上の変位とグリーン関数の空間微分を畳込み積分した第 1 項（変位積分項）とトラクションをグリーン関数と畳込み積分した第 2 項（トラクション積分項）の積分値で評価される．我々の目的は，体積震源によるこの変位場が，どのようにモーメントテンソルを用いて表現されていくのか解説することである．なお，震源容器の表面において u_i と T_i の値を指定して始める以下の議論において，マグマなど震源容器内側媒質の弾性常数は全く関係しないことに注意する．

2.2　地震学における変位の食い違い型震源

一般的な体積震源のモーメントテンソル表現の導出に先立ち，断層面上の食い違い型震源の場合のモーメントテンソル表現を教科書「Quantitative Seismology」[Aki and Richards (1980, 2002, 2004)] に従い概観する．震源

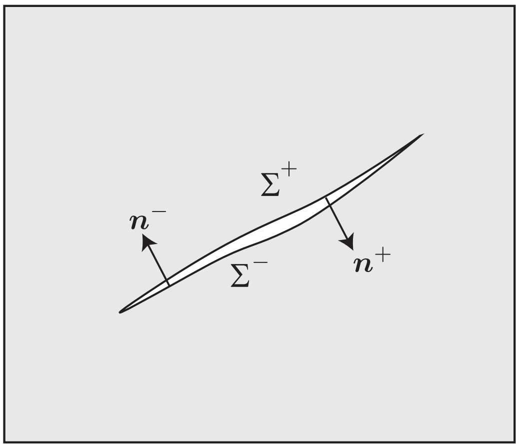

Fig. 2. Dislocation source on a fault consisting of two adjacent surfaces Σ^+ and Σ^- for which the normal vectors satisfy $\boldsymbol{n}^+(\xi)=-\boldsymbol{n}^-(\xi)$.

容器の表面が，断層面の表と裏（互いに隣り合い法線ベクトルを共有する２面）である場合 ($S=\Sigma^++\Sigma^-$，$n_i^-=-n_i^+$) を考える (Fig. 2). 断層面を Σ，法線ベクトルを n_i $(=n_i^-=-n_i^+)$ とすると，Eq. (2) は，

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=\int_\Sigma [u_i(\xi)]n_j(\xi)c_{ijkl}(\xi)*\frac{\partial}{\partial\xi_l}G^\infty_{nk}(\boldsymbol{x};\xi)d\Sigma(\xi)-\int_\Sigma[\tau_{ij}(\xi)]n_j(\xi)*G^\infty_{ni}(\boldsymbol{x};\xi)d\Sigma(\xi), \tag{3}$$

となる．ここで $[u_i]=u_i^+-u_i^-$，$[\tau_{ij}]=\tau_{ij}^+-\tau_{ij}^-$ であり Σ 上での変位と応力の食い違いを表す．物理的に変位の食い違いが生じる震源の場合に強調すべきは，Σ では応力が連続であり第２項は常に０になることである．第１項のみ残る場合，モーメントテンソル表現は以下のように容易に導くことができる．

変位の食い違い量の分布からモーメント密度テンソル $\boldsymbol{m}$（単位面積あたり）の成分を

$$m_{kl}(\xi)=[u_i(\xi)]n_j(\xi)c_{ijkl}(\xi), \tag{4}$$

と定義し，さらに，断層面 Σ が実効的に点震源と見なせる場合に，変位の食い違い量の分布からモーメントテンソル $\boldsymbol{M}$ の成分を

$$M_{kl}=\int_\Sigma m_{kl}d\Sigma=\int_\Sigma [u_i]n_jc_{ijkl}d\Sigma, \tag{5}$$

とすると，モーメントテンソル $\boldsymbol{M}$ を用いて変位場は，

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=M_{kl}*\frac{\partial}{\partial\xi_l}G^\infty_{nk}, \tag{6}$$

と表現される．

体積震源の文脈では，開口亀裂の場合が食い違い型震源に該当する．この場合にモーメントテンソル成分と体積変化の関係を見てみよう．均質等方媒質の場合，弾性常数テンソルはラメ定数 λ と μ を用いて

$$c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}), \tag{7}$$

と表される．このとき，Eq. (4) は

$$m_{kl}=\lambda[u_i]n_i\delta_{kl}+\mu([u_l]n_k+[u_k]n_l), \tag{8}$$

となる．

x_1x_2 平面上にある亀裂（面積 Σ，法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$) が食い違い量 $[u_3]$ で開口する場合を考える．これを点震源としてモーメントテンソルで表すと，

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda+2\mu\end{pmatrix}[u_3]\Sigma, \tag{9}$$

となり，モーメントテンソルの成分は真の体積変化 $\Delta V^C=[u_3]\Sigma$ と関係づけられる．開口変位 $[u]$ を持つ互いに直交する三つの亀裂を考えると等方震源を構成することができ，モーメントテンソルは，

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\lambda+\frac{2}{3}\mu & 0 & 0\\ 0 & \lambda+\frac{2}{3}\mu & 0\\ 0 & 0 & \lambda+\frac{2}{3}\mu\end{pmatrix}(3[u]\Sigma), \tag{10}$$

となる．同様にモーメントテンソルの成分は真の体積変化 $\Delta V^C=3[u]\Sigma$ と関係づけられる．

以上に示したように，食い違い型震源の場合にはモーメントテンソルと ΔV^C が直接結びつく．次節では，一般的な体積震源の場合，トラクション積分項は常にはゼロにならず，この項からの寄与がモーメントテンソル表現の ΔV^T の中に現れることを見ていく．

2.3 体積震源の統一的説明: 線形弾性論に基づく仮想的埋め込み

ここでは線形弾性論に基づく仮想的埋め込み操作［例えば，Altiero and Gavazza (1980); 小林 (2000)］を Eq. (2) に適用した際に新たに現れる項を，モーメントテンソル表現の観点から解釈した Ichihara *et al.* (2016) の考え方を紹介する．この埋め込みは，元々，弾性体境界値問題の積分方程式解法において直接法と間接法を関係づける数学的操作である．

鍵となる考え方は，震源容器外側の変位場を全く変化させないように，震源容器内側に以下に示す弾性体を仮想的に埋め込むことにより，体積震源を Eq. (3) のように震源容器表面 S 上の変位食い違い型震源もしくは応力食い違い型震源として表現することである．埋め込む弾性体は，全無限グリーン関数を考えた全無限媒質の媒質から震源容器内側の占める体積領域 V^{in}（表面 S^{in}）を取り出したものを選ぶ．上添え字 in は埋め込んだ内側媒質を表し，法線ベクトル $n_j=n_j^{in}$ は V^{in} の外側を向い

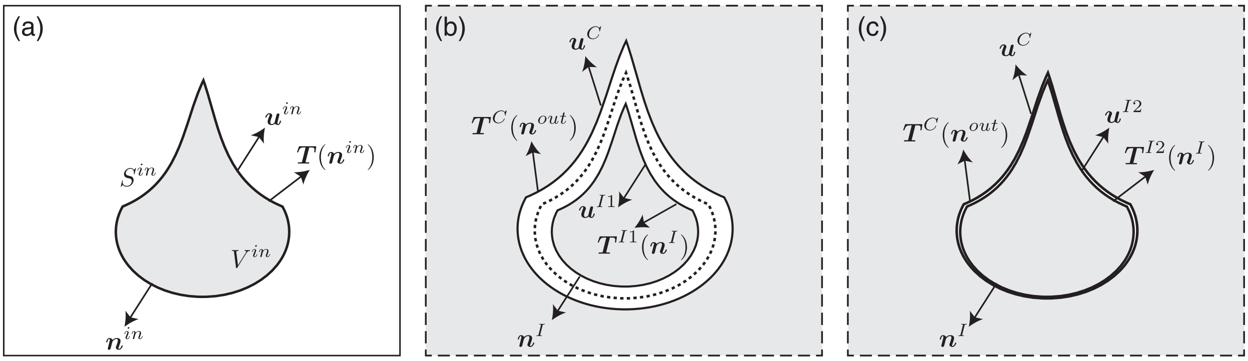

Fig. 3.　(a) A finite elastic body with volume V^{in} and a surface S^{in} for which normal vector $\boldsymbol{n}^{in}$ is taken to be outwards. S^{in} is chosen the same as S^{out}, so that V^{in} can be embedded in the volume source cavity in Fig. 1. $\boldsymbol{u}^{in}$ and $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}^{in})$ represent the displacement and traction vectors on S^{in}, respectively. (b) Surface variables on the volume source cavity considered for volume source representation of a 'displacement glut' type. $\boldsymbol{u}^{C}$ and $\boldsymbol{T}^{C}(\boldsymbol{n}^{out})$ are actual displacement and traction vectors on S^{out}, respectively. On S^{in}, imaginary displacement $\boldsymbol{u}^{I1}$ is determined by a stress boundary condition given by $\boldsymbol{T}^{I1}(\boldsymbol{n}^{I})=-\boldsymbol{T}^{C}(\boldsymbol{n}^{out})$, where $\boldsymbol{n}^{I}=\boldsymbol{n}^{in}$. (c) Surface variables on the volume source cavity considered for volume source representation of 'stress glut' type. On S^{in}, imaginary stress (traction) $\boldsymbol{T}^{I2}(\boldsymbol{n}^{I})$ is determined by a displacement boundary condition given by $\boldsymbol{u}^{I2}=\boldsymbol{u}^{C}$.

ている (Fig. 3a). 全無限グリーン関数を用いた表現定理は，グリーン関数 G^{∞}_{ni} が定義される領域 $V^{out}+V^{in}$ 内であれば任意の領域で成り立つ［日下部・亀 (2015)］ので，この V^{in} の領域にも表現定理を適用できる．観測点位置 $\boldsymbol{x}$ が V^{in} の外側にある場合，

$$0=-\int_{S^{in}} u_i(\boldsymbol{\xi})n_j(\boldsymbol{\xi})c_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})*\frac{\partial}{\partial\xi_l}G^{\infty}_{nk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi})$$
$$+\int_{S^{in}} T_i(\boldsymbol{\xi})*G^{\infty}_{ni}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi}), \tag{11}$$

となる［日下部・亀 (2015)］.

全無限グリーン関数 G^{∞}_{ni} は領域 V^{out} と領域 V^{in} で共通であることを用いて，領域 V^{out} に対する表現定理 (Eq. (2)) に，領域 V^{in} に対する表現定理 (Eq. (11)) を加える（埋め込む）と $\boldsymbol{x}\in V^{out}$ に対して，

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=$$
$$-\int_{S^{out}+S^{in}} u_i(\boldsymbol{\xi})n_j(\boldsymbol{\xi})c_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})*\frac{\partial}{\partial\xi_l}G^{\infty}_{nk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi})$$
$$+\int_{S^{out}+S^{in}} T_i(\boldsymbol{\xi})*G^{\infty}_{ni}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi}), \tag{12}$$

を得る．

ここで，Eq. (12) を再解釈する．全無限グリーン関数 G^{∞}_{ni} は領域 $V^{out}+V^{in}$ で有効であるので，表面 $S^{out}+S^{in}$ を内部表面と見なすことができる．震源容器表面 $S(=S^{out})$ 上の法線ベクトルを V^{in} から V^{out} を向く向きに取りなおし改めてこれを $n^I_j(=-n^{out}_j=n^{in}_j)$ とすると，食い違い型震源（2.2 節）と同じ議論により，震源容器表面 S 上における変位と応力の食い違いの観点から変位場を表現することができる．

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=$$
$$\int_S [u_i(\boldsymbol{\xi})]n^I_j(\boldsymbol{\xi})c_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})*\frac{\partial}{\partial\xi_l}G^{\infty}_{nk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi})$$
$$-\int_S [\tau_{ij}(\boldsymbol{\xi})]n^I_j(\boldsymbol{\xi})*G^{\infty}_{ni}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi}). \tag{13}$$

ここで，$[u_i]=u^C_i-u^I_i$, $[\tau_{ij}]=\tau^C_{ij}-\tau^I_{ij}$ であり，u^I_i と τ^I_{ij} は S^{in} 上の仮想的な変位と応力である (*I*: imaginary). 仮想的な変位と応力は V 内の変位場に影響を与えない (Eq. (11)) ので，今後の数学変形がうまく行くように値を代入すれば良い．Ichihara *et al.* (2016) では，体積震源のモーメントテンソル表現に至る以下に示す変位過剰型と応力過剰型の２つの仮想的変形を考えた．

2.3.1　埋め込み領域の応力載荷：体積震源の変位食い違い（変位過剰型）表現

断層面の場合と同様に $[\tau_{ij}]=0$ となる変形を考える．これは仮想応力を実際の応力と等しく取り $\tau^{I1}_{ij}=\tau^C_{ij}$ とすることで実現できる．この S^{in} 上の載荷により生じる内部媒質の仮想変位は，弾性体の運動方程式を解くことにより得られる量であり，ここでは u^{I1}_i と記す．載荷をトラクションで表せば，$[\tau_{ij}]n^I_j=[T_i]=T^C_i(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{n}^I)-T^{I1}_i(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{n}^I)=-T^C_i(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{n}^{out})-T^{I1}_i(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{n}^{in})=0$ より，内部表面上で互いに逆向きのトラクション $T^C_i(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{n}^{out})=-T^{I1}_i(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{n}^{in})$ が働き，内力ゼロとなるように載荷することを意味する (Fig. 3b). この場合，Eq. (13) の第２項は０になり，

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=\int_S [u_i(\xi)] n_j^I(\xi) c_{ijkl}(\xi) * \frac{\partial}{\partial \xi_l} G_{nk}^{\infty}(\boldsymbol{x};\xi) dS(\xi), \quad (14)$$

となる．体積震源のモーメントテンソルは，2.2 節と同様の手順により

$$M_{kl}=\int_S [u_i] n_j^I c_{ijkl} dS=\int_S (u_i^C-u_i^{I1}) n_j^I c_{ijkl} dS, \quad (15)$$

と変位の食い違い $[u_i]$ により直接的に表現される．$[u_i]$ は実際の震源容器表面の変位 u_i^C と埋め込み弾性体の仮想的な変位 u_i^{I1} との差であり，これを表面変位と考えた時に生じる体積変化がモーメントテンソルに現れる ΔV^T の正体である．Ichihara *et al.* (2016) は，従来の体積震源の応力過剰型の表現（2.3.2 節）と対比させ $[u_i]$ による表現を変位過剰 (displacement glut) 型と呼んでいる．

膨張震源で震源容器表面の応力が $\tau_{ij}^C|_{i=j}<0$（圧縮）である場合を考えてみよう．埋め込み媒質を τ_{ij}^C で載荷すると V^{in} は収縮することに注意する (Fig. 3b)．変位の法線成分で較べると $u_i^C n_i^I>0$ に対して，仮想変位は $u_i^{I1} n_i^I<0$ となる．すなわち，体積震源のモーメントテンソルに現れる見かけの体積は真の体積変化より大きくなっている（断層の開口食い違いの場合は仮想変位が $\sum^+$ 面と $\sum^-$ 面に現れ，互いに打ち消し合うことに注意する）．

2.3.2　埋め込み領域の変位載荷: 体積震源の応力食い違い（応力過剰型）表現

地震学において馴染み深い変位食い違い型の震源表現を経由してモーメントテンソル表現を得た 2.3.1 節に対して，Eq. (13) において変位の食い違い項を消去することにより，応力過剰 (stress glut) 型の震源表現 [Backus and Mulcahy (1976)] を経て，その数学的発散をとることによりモーメントテンソル表現を得ることもできる．

応力過剰型震源表現に持ち込むために，V^{in} の仮想変位 u_i^{I2} を震源容器表面の変位 u_i^C と同じになるように載荷する (Fig. 3c)．この時，$[u_i]=0$ となり変位積分項は 0 になり目的は達成される．この変位境界条件を満たす弾性体の運動方程式の解として S^{in} に生じる仮想応力 τ_{ij}^{I2} が得られ，これを用いて変位場は

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=-\int_S [\tau_{ij}(\xi)] n_j^I(\xi) * G_{ni}^{\infty}(\boldsymbol{x};\xi) dS(\xi), \quad (16)$$

と表される．これは，応力過剰 $-[\tau_{ij}(\xi)]$ による震源表現である [Backus and Mulcahy (1976)]．膨張震源により法線方向の変位 $u_i^C n_i^I (>0)$ が生じて応力が $\tau_{ij}^C|_{i=j}<0$（圧縮）である場合，埋め込み媒質を $u_i^{I2}=u_i^C$ で変位載荷すると V^{in} は膨張し仮想的応力は $\tau_{ij}^{I2}|_{i=j}>0$（引張）となることに注意する．このことはトラクションで書くとわかりやすい．

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=\int_S \{T_i^C(\xi,\boldsymbol{n}^{out})+T_i^{I2}(\xi,\boldsymbol{n}^{in})\} * G_{ni}^{\infty}(\boldsymbol{x};\xi) dS(\xi), \quad (17)$$

のように，内側変形が引張応力となることで $T_i^C(\xi,\boldsymbol{n}^{out})$ と $T_i^{I2}(\xi,\boldsymbol{n}^{in})$ は同符号となりトラクションが過剰になっている．

等価な震源の表現としてはこれで十分であるが，データ解析の観点からは地震波形解析のモーメントテンソル応答関数（グリーン関数の微分）が利用できる表現に変換しておくと便利である．発散定理を適用すれば，Eq. (16) は，

$$\begin{aligned} u_n(\boldsymbol{x},t)&=-\int_S [\tau_{ij}(\xi)] n_j^I(\xi) * G_{ni}^{\infty}(\boldsymbol{x};\xi) dS(\xi) \\ &=-\int_{V^{in}} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\{[\tau_{ij}(\xi)] * G_{ni}^{\infty}(\boldsymbol{x};\xi)\} dV(\xi) \\ &=-\int_{V^{in}} [\tau_{ij}(\xi)] * \frac{\partial}{\partial \xi_j} G_{ni}^{\infty}(\boldsymbol{x};\xi) dV(\xi) \\ &\quad -\int_{V^{in}} [\tau_{ij}(\xi)]_{,j} * G_{ni}^{\infty}(\boldsymbol{x};\xi) dV(\xi), \end{aligned} \quad (18)$$

となる．ここで，静的過程を仮定して（$[\tau_{ij}]_{,j}=0$，運動方程式 $\rho\ddot{u}_i=\tau_{ij,j}$ において $\ddot{u}_i=0$ を考えた），Eq. (18) の右辺の第 2 項を 0 にすれば，応力過剰はモーメント密度テンソル（単位体積あたり）と

$$m_{ij}(\xi)=-[\tau_{ij}(\xi)], \quad (19)$$

のように関係づけられ，モーメントテンソルは，

$$M_{ij}=\int_{V^{in}} m_{ij} dV, \quad (20)$$

となる．これらの等価な震源表現を見てみると，Eq. (16) と Eq. (17) ではシングルフォース $-[\tau_{ij}(\xi)] n_j^I(\xi) dS(\xi) =[T_i^C(\xi,\boldsymbol{n}^{out})+T_i^{I2}(\xi,\boldsymbol{n}^{in})] dS(\xi)$ の面的総和として，一方，Eq. (18) では i 方向の力が j 方向の腕に作用するモーメント $-[\tau_{ij}(\xi)] dV(\xi)$ の体積的総和として震源を構成している．

途中，静的変形過程を仮定したが，変形の時間スケールが断層容器の固有周期より遙かに大きければ慣性の効果は無視できる．例えば，半径 R の球形震源容器の場合，表面に作用する単位面積当たりの慣性力 $T_i \sim \rho R u_r \omega^2$（$\omega$ は変形の角振動数）であり，断層容器の弾性変形に起因する応力 $T_e \sim \mu u_r/R$ である．球形容器の固有角振動数 $\omega_0 \sim (1/R)\sqrt{\mu/\rho}$ [Ichihara (2008)] を用いると，$T_i/T_e \sim \omega^2/\omega_0^2 \ll 1$ となる場合であれば良い．

運動する弾性体の表面変位 (Eq. (14)) と表面応力 (Eq. (16)) の面積分により等価な震源を表現する限り，動的効果が完全に含まれていることに注意が必要である．静的過程の要請は，面密度である応力過剰をモーメントテン

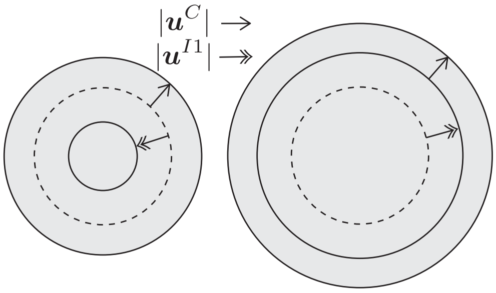

Fig. 4. Two different spherical surface-displacement fields leading to the same spherical volume source representation. Dotted lines represent the reference surface position of a cavity without deformation. (Left) Displacement glut $|\boldsymbol{u}^C|+|\boldsymbol{u}^{I1}|$ consisting of the actual outward displacement $|\boldsymbol{u}^C|$ of a cavity and an additional imaginary inward displacement $|\boldsymbol{u}^{I1}|$. (Right) Stress-free volume change in the Eshelby's transformational operation consisting of $|\boldsymbol{u}^C|$ and $|\boldsymbol{u}^{I1}|$ both outward.

ソル表現に持ち込むために（時間の概念を含まない）発散定理を適用して体積密度に変換する際に，慣性項が分離したことにより生じていることが分かる．

2.3.3　球状震源での例証

単純な球状震源の場合には，弾性体の運動方程式の境界値問題に対する解析解が存在する．この解析解が与える震源容器表面の実際の変位とトラクションを，我々の表現定理による説明に当てはめてみよう (Fig. 4).

極座標において原点を中心とする半径 R，体積 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ の球状震源容器を考える．圧力増加 ΔP^C に対して，震源容器は動径方向外側に $u_r^C=R\Delta P^C/(4\mu)$ だけ変位して体積変化は $\Delta V^C=V\Delta P^C/(\frac{4}{3}\mu)$ となる [Kumagai *et al.* (2014)]．仮想的埋め込み媒質表面 S^{in} が同じ圧力増加を受けると，今度は，動径方向内側に収縮する．内側媒質に対して体積弾性率から期待される応力を圧力増加とバランスさせると，$4\pi R^2 u_r^{I1}=-V\Delta P^C/(\lambda+\frac{2}{3}\mu)$ となり，これより埋め込み媒質の仮想的変位は $u_r^{I1}=-4\mu u_r^C/(3\lambda+2\mu)$ となる．モーメントテンソルに現れる変位過剰は

$$[u_r]=u_r^C-u_r^{I1}=\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\frac{2}{3}\mu}u_r^C, \tag{21}$$

と実際の変位と結びつけられる．ここで $[u_r]$ に対応する体積変化は

$$4\pi R^2[u_r]=\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\frac{2}{3}\mu}\Delta V^C=\Delta V^T, \tag{22}$$

の関係式で実際の体積変化と結びつけられる．これがモーメントテンソルに現れる ΔV^T である．実際，モーメントテンソルは，変位食い違いのモーメント密度テンソル Eq. (4) を経由して

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\lambda+\frac{2}{3}\mu & 0 & 0\\ 0 & \lambda+\frac{2}{3}\mu & 0\\ 0 & 0 & \lambda+\frac{2}{3}\mu\end{pmatrix}\Delta V^T$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & \lambda+2\mu\end{pmatrix}\Delta V^C, \tag{23}$$

となる．これは，同じく等方震源であった三つの直交する亀裂で構成される震源容器の膨張によるモーメントテンソル Eq. (10) に現れる体積変化 ($\Delta V^T=\Delta V^C$) と異なっていることがわかる．

応力過剰の観点から解釈することもできる．仮想的埋め込み媒質表面 S^{in} に外向き変位 u_r^C を作用させると表面応力は負の圧力

$$\Delta P^{I2}=-\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\frac{\Delta V^C}{V}, \tag{24}$$

を生じる（これは引張のトラクション $T_r^{I2}=-\Delta P^{I2}$）．従って，応力過剰は

$$[\tau_{rr}]=(\Delta P^C-\Delta P^{I2})=$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\Delta V^C}{V}=\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\frac{\Delta V^T}{V}, \tag{25}$$

となり，Eq. (23) に至る．

上記の震源の表現はいずれも，変位場を Eq. (2) を用いて震源容器表面での変位とトラクションの表面積分で評価した場合 [Ichihara *et al.* (2016), Appendix] と同じ結果を与える．

§3.　議　　論

3.1　変位過剰が生じる物理的背景：震源容器の幾何形状

ここまでマグマだまりの実際の変位 u_i^C やトラクション T_i^C から始めて，線形弾性論に基づく仮想的埋め込みを経て，変位過剰型と応力過剰型のそれぞれの震源表現に至った．変位過剰表現の観点から，体積震源のモーメントテンソルに現れる ΔV^T を直感的にとらえてみよう．

変位過剰における実際の変位からのずれは，Eq. (2) におけるトラクション積分項の寄与を変位積分項に含める操作から生じたことを思いだそう．すなわち，トラクション積分項の大小が ΔV^T の ΔV^C からのずれの大小に直結する．それでは，体積 V の震源容器が体積変化 ΔV^C $(=\int_S u_i n_i^{in}dS)$ を受ける場合，容器表面のトラクション $T_i(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{n})$ の大小は容器の形状にどのように依存するのであろうか？球状容器と亀裂状容器で想像してみる．

球状容器の場合，体積変化に対する圧力変化は大きい（解析解 $\Delta V^C=V\Delta P^C/(\frac{4}{3}\mu)$ [Kumagai *et al.* (2014)] に比例定数が示される）．結果として，トラクション項は大き

くなり，仮想変位の値は大きく計算され ΔV^T の ΔV^C からのずれは大きくなる．これに対して亀裂状容器の場合には，薄いシート状の亀裂の隙間にマグマを貫入させ体積変化しても震源の圧力はほとんど増加しない（これは Eshelby の解析解を用いた計算結果 [Mizuno *et al.* (2015)] からも示される）．亀裂状容器の場合，体積変化に起因するトラクション項はほぼ 0 であり，従って仮想変位の値もほぼ 0 となる．結果として ΔV^T の ΔV^C からのずれは小さくなる．このように同じ体積変化に対して，極端に平べったい容器の圧力変化は小さく，球状に近づくと圧力変化は大きくなる．容器形状による圧力変化のこの定性的傾向を頭に入れておけば，容器形状により ΔV^T の ΔV^C からのずれが大きいか小さいか間違えることはなくなると思う．

一般的な楕円形状に対する体積震源のモーメントテンソルや $\Delta V^C/\Delta V^T$ は，Web 計算ツール［水野・他 (2016)］で評価することができる．これはモーメントテンソルから逆に楕円形状を決めることもできる．興味のある方は使ってみて欲しい．URL は http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/ichihara/mizuno/index.html である．

3.2　変位過剰表現によるモーメントテンソル評価

変位過剰表現 Eq. (15) では，震源容器の応力を境界条件として内側媒質を載荷して生じた仮想変位を求め容器表面上で積分すれば常にモーメントテンソルを（数値的に）評価できる．一方，応力過剰表現 Eq. (20) では，数学的発散を評価した後に容器内部の対応する歪みの体積積分となりモーメントテンソル評価の手順は若干煩雑となる．なお，楕円体において内部歪み一定となる場合には Eshelby (1957) の結果を用いて解析的に表すことができる．

変位過剰表現は，現実的な複雑形状の火道とマグマだまりが結合したような火山性地震発生の物理モデルを常にモーメントテンソルとして表現可能にする．火山物理モデリングの研究結果に対するモーメントテンソル表現が蓄積し，モーメントテンソル逆解析と比較できるようになれば，火山震源過程の推定に有用であろう．

3.3　Eshelby 理論との対応

Eshelby (1957) の埋め込みにおいては，震源容器内部の弾性体 V^{in} を取り除き，V^{in} を応力ゼロ歪みにより応力ゼロのまま ΔV^T まで非弾性的に膨張させる．次に V^{in} を応力載荷し弾性的に元の大きさに圧縮して S^{in} に応力が生じた状態で S^{out} に戻す．埋め込みの後 V^{out} に作用する応力過剰に発散定理を適用することによりモーメントテンソルが導かれる [Aki and Richards (1980, 2002, 2004)]．さて，既にお気づきである読者の方も多いであろう．変位過剰 $[u_i]$ から生じる体積変化を Eshelby の応力ゼロ歪みの体積変化 ΔV^T に対応させれば，応力過剰 $-[\tau_{ij}]$ は ΔV^T をもとの体積まで圧縮する載荷応力になっている．すなわち Eshelby (1957) と Ichihara *et al.* (2016) の埋め込みは等価な操作となっている．

このことを球状の震源容器で変位の u_r 成分，応力の τ_{rr} 成分だけある場合に見てみよう (Fig. 4)．線形弾性体の微小変形を考える場合，ある状態からの変位と応力ずれは別の変形状態に対して常に線形重ね合わせが可能であることを利用する．以下の議論は，一般の震源容器形状と応力成分の場合にも成り立つ．

まず，V^{in} を切り出し，変形なしの状態を State 0（S^{in} で $u_r^0=0, \tau_{rr}^0=0$）とする．次に，いわゆる応力ゼロ歪みを導入し，埋め込み物体を応力ゼロのまま $u_r^1=[u_r]$ まで非弾性的に膨張変形させる．この状態を State 1（S^{in} で $u_r^1=u_r^C-u_r^{I1}$，$\tau_{rr}=0$）とする．応力ゼロ歪みは弾性体の運動方程式を満たさず（すなわち，Betti の定理を満たさず），表現定理の適用外となることに注意する［日下部・亀 (2015)］．

State 1 から弾性的に $-u_r^C<0$ だけ変位させるのに必要な載荷応力は $\tau_{rr}^{-u_r^C}=\Delta P^{I2}<0$（圧縮）であり（2.3.2 節，2.3.3 節），そこからさらに $+u_r^{I1}<0$ だけ弾性的に変位させるのに必要な載荷応力は，$\tau_{rr}^{+u_r^{I1}}=\tau_{rr}^C=-\Delta P^C<0$（圧縮）である（2.3.1 節，2.3.3 節）．合計 $(\tau_{rr}^{-u_r^C}+\tau_{rr}^{+u_r^{I1}})=(\Delta P^{I2}-\Delta P^C)$ の圧縮載荷を受け，応力ゼロ歪みはもとの形にもどる．この時の V^{in} の変形状態を State 2（S^{in} で $u_r^2=0$，$\tau_{rr}^2=(\tau_{rr}^{-u_r^C}+\tau_{rr}^{+u_r^{I1}})$）とする．

State 2 の Eshelby の埋め込み物体を震源容器に埋め込み接合して内側のトラクションがゼロになるように逆向きのトラクションを加える．ここで震源容器表面 S $(=S^{out})$ と体積領域 $V(=V^{out})$ に視点を移す．V 中の観測点に対しては震源容器表面の観点から Eq. (2) の表現定理が適用できる．S 上で $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}^{out}=-\boldsymbol{n}^I$, $u_r^{out}=0$, $\tau_{rr}^{out}=\tau_{rr}^2$（圧縮）でありこれらを代入すると，Eq. (17) の線形弾性論に基づく仮想的埋め込みの応力過剰 $-[\tau_{rr}^C-\tau_{rr}^{I2}]$ と一致する．これの数学的発散をとれば Eq. (19) の単位体積あたりのモーメント密度テンソルになる．

線形弾性論に基づく埋め込みで解釈すれば，体積震源の実際の変位と応力の状態からはじめてモーメントテンソル表現に至り，等温膨張や相転移などと対応づけて導入される応力ゼロ歪みを考える必要がない．また，Eshelby (1957) における応力ゼロ歪みの導入と初期状態の選び方は，Eq. (2) において変位積分項を 0 とするための数学的要請となる．Eshelby (1957) の理論の背景には，表現定理によって ΔV^T と ΔV^C が結びつくことの考察が背景にあったことが想像される．これが陽に述べらなかったことは，当時の卓越した研究者には「自明」で

あったのであろう．

教科書 [Aki and Richards (1980, 2002, 2004)] の体積震源の説明のもう一つの分かり難さは，ΔV^T で表現される等価体積力が天下りに導入されることに加えて，ΔV^T でモーメントテンソルが表現されてしまい実際の釣り合い状態の変位と応力（実際の体積変化 ΔV^C）が陽に現れないまま終わってしまう点にあると思う（練習問題において球形状の場合に実際の釣り合い状態を求める問題があるが）．これは，火山現象のモデリングから求めた体積や応力の変化量を，モーメントテンソルを通して地震観測データと結びつけたいと思って教科書を紐解いた者には大変不便である．変位過剰表現は，震源容器の力学的状態（実際の変位と実際の応力）から始めて，どのようなモーメントテンソル表現になるかという方向性で進めてきた．実際の体積変化とモーメントテンソルを陽に関係づけたことの有用性を繰り返し強調しておきたい．

§4. ま と め

体積震源のモーメントテンソル表現を弾性体力学の基本定理である表現定理に基づき導出した．線形弾性論に基づく仮想的埋め込みの操作から仮想的変位を考慮することにより変位過剰型の震源表現が可能になり，これよりモーメントテンソルが非弾性的な変形を考えることなしに導かれることを示した．この変位過剰表現により体積震源のモーメントテンソルに現れる 2 つの体積変化 ΔV^T と ΔV^C の数学的，および物理的意義が包括的に理解できる．これにより，2 つの体積変化の関係は体積震源容器の形状に依存し複数の対応関係があり得るのが当然であること，従って体積変化の推定には震源モデルの想定が必須であることに得心がいく．また，変位過剰表現により，現実的な形状を持つ火山物理モデルの結果を常にモーメントテンソルに変換できるようになる．蓄積された火山物理モデル研究を変位過剰表現によりモーメントテンソルで再評価し，観測データ逆解析の解釈と組み合わせることにより火山現象の理解が進むことを期待する．

謝　　辞

前田裕太氏，平野史朗氏，水野尚人氏との議論は大変有用であった．匿名の査読者 1 名のコメントは本稿の改訂に大変役に立った．志藤あずさ氏には本稿の編集を担当していただいた．ここに謝意を示す．本稿は，JSPS 科研費 #25-7419 (T.K.)，#21107007 (N.K.)，および文部科学省による「博士課程教育リーディングプログラム」(T.K.)，「災害の軽減に貢献するための地震火山観測研究計画」(N.K.) の助成を受けた．

文　　献

Aki, K. and P. G. Richards, 1980, Quantitative Seismology, 1st ed., Freeman, New York, 932 pp.

Aki, K. and P. G. Richards, 2002, Quantitative Seismology, 2nd ed., University Science Books, Sausalito, 700 pp.

安芸敬一・P.G. リチャーズ，2004，地震学 定量的アプローチ，上西幸司・亀　伸樹・青地秀雄 訳，古今書院，909 pp.

Altiero, N. J. and S. D. Gavazza, 1980, On a unified boundary-integral equation method, J. Elasticity, **10**, 1–9.

Backus, G. and M. Mulcahy, 1976, Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources — I. Continuous displacements, Geophys. J. R. astr. Soc., **46**, 341–361.

Eshelby, J. D., 1957, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, Proc. R. Soc. London, Ser. A, **241**, 376–396.

Ichihara, M., 2008, Dynamics of a spherical viscoelastic shell: Implications to a criterion for fragmentation/expansion of bubbly magma, Earth Planets. Sci. Lett., **265**, 18–21.

Ichihara, M., T. Kusakabe, N. Kame, and H. Kumagai, 2016, On volume source representations based on the representation theorem, Earth Planets Space, doi:10.1186/s40623-016-0387-3.

日下部哲也・亀　伸樹，2015，表現定理とグリーン関数—全無限グリーン関数による有限領域の弾性変形場の表現—，地震，**68**，83–89，doi:10.4294/zisin.68.83.

Kumagai, H., Y. Maeda, M. Ichihara, N. Kame, and T. Kusakabe, 2014, Seismic moment and volume change of a spherical source, Earth Planets Space, **66**, doi:10.1186/1880-5981-66-7.

小林昭一，2000，波動解析と境界要素法，京都大学学術出版会，338 pp.

Mizuno, N., M. Ichihara, and N. Kame, 2015, Moment tensors associated with the expansion and movement of fluid in ellipsoidal cavities, J. Geophys. Res., **120**, doi:10.1002/2015JB012084.

水野尚人・亀　伸樹・市原美恵，2016，楕円体体積震源モーメントテンソル評価のための Web 計算ツール—3 つのモデルの順計算と逆計算：(1) 膨張，(2) 流体移動，(3) 流体移動後の圧力回復—，火山，**61**，印刷中.