

解 説

津波のグリーン関数 Kajiura filter の級数表現の導出

東京大学地震研究所* 日下部哲也・亀 伸 樹・綿 田 辰 吾

Derivation of Series Expansion of Kajiura Filter, Green's Function of Tsunami

Tetsuya KUSAKABE, Nobuki KAME, and Shingo WATADA

Earthquake Research Institute, the University of Tokyo,
1-1-1 Yayoi, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0032, Japan
E-mail: kusaka@eri.u-tokyo.ac.jp

(Received February 20, 2018; Accepted June 13, 2018; published online on August 6, 2018)

§1. はじめに

地震に伴う海底地殻変動は、海面変動を引き起こし、そこを源として津波が発生する。非圧縮非粘性流体を仮定し、一様水深 h のモデルを考える。直交座標系 (x_1, x_2, x_3) を考え、 x_3 方向を鉛直上向きにとる。海底面 $x_3=0$ において上下変動 $D(x'_1, x'_2)$ が発生した時、瞬時に応答する海面 $x_3=h$ における上下変動 $\eta(x_1, x_2)$ は、

$$\eta(x_1, x_2) = \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D(x'_1, x'_2) G\left(\frac{\sqrt{(x_1-x'_1)^2 + (x_2-x'_2)^2}}{h}\right) dx'_1 dx'_2 \quad (1)$$

と表される。ここに現れる G は、海底面変位の時空間に関するデルタ関数入力に対する海面変動を表すグリーン関数（ここでは無次元量）であり、Kajiura filter [Kajiura (1963)] として広く津波研究において利用されており [例えば, Saito and Furumura (2009), 齊藤 (2016)], その起源は高橋 (1942) の波数領域表現にある。また、 $\eta(x_1, x_2)$ は式 (1) のような空間領域の畳み込みの形式に加えて、波数領域での積の形をフーリエ逆変換して簡単に計算することも可能である [例えば, 齊藤 (2016)]。

Kajiura filter の関数形を Fig. 1 に示す。グリーン関数の引数は全て水深 h で規格化される。例えば、空間座標 $x_1 = x_1/h$ 、震源-観測点距離 $\hat{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}/h$ 、波数 $\hat{k} = hk$ ($= h\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$) (k_1, k_2 は x_1, x_2 軸方向の波数成分) とする。

ただし、震源を原点とした。

Kajiura (1963) において Kajiura filter $G(\hat{r})$ の積分表現

$$G(\hat{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\hat{k} \frac{\hat{k} J_0(\hat{k} \hat{r})}{\cosh \hat{k}} \quad (2)$$

と級数表現

$$G(\hat{r}) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{\{(2n+1)^2 + \hat{r}^2\}^{3/2}} \quad (3)$$

が示されている。ここで、 J_0 は 0 次の第 1 種 Bessel 関数である。実際の津波研究においては数値計算に便利な級数表現がもっぱら利用されている。

Kajiura (1963) では、積分表現から出発し、 $\frac{1}{\cosh \hat{k}}$ を指数関数で級数展開し項別積分を行うことにより、という注意のみで式 (3) の級数表現を直ちに示している。通常の学術論文では計算過程を全て記述しないのが普通であるが、必ずしも多くの人が式の導出をできるわけではない。ここに計算過程を解説することは有益と思い、本稿においてその式展開を詳細に示すことにする。以下の式展開においては無次元量の記号「 $\hat{\cdot}$ 」を省略する。

§2. 級数表現の導出

積分表現から出発し、級数表現を導出する。 $k > 0$ の場合 $e^{-k} < 1$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cosh k} &= \frac{2}{e^k + e^{-k}} = \frac{2}{e^k} \frac{1}{1 + e^{-2k}} \\ &= \frac{2}{e^k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2kn} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)k} \end{aligned} \quad (4)$$

* 〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1

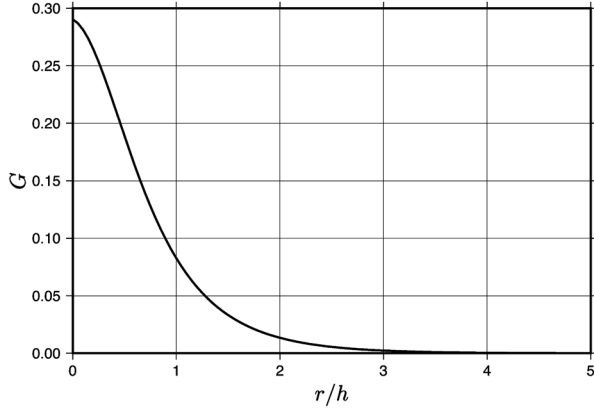


Fig. 1. Plot of Kajiura filter $G(r/h)$, the initial surface displacement due to a spatiotemporal impulsive point displacement at the bottom.

と展開できる [例えば, Gradshteyn and Ryzhik (1980, eq. 1.232.2)]. これを積分表現に代入して積分と無限和の順番が入れ替え可能であることを仮定すると,

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{k J_0(kr)}{\cosh k} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk k J_0(kr) \sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-(2n+1)k} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty dk k J_0(kr) (-1)^n e^{-(2n+1)k} \end{aligned} \quad (5)$$

となる. これに, 0 次の第一種 Bessel 関数の積分表示

$$J_0(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{iy \cos \theta} \quad (6)$$

を代入し, 積分順序が可換だと仮定すると,

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty dk k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ikr \cos \theta} (-1)^n e^{-(2n+1)k} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dk k e^{(-2n+1+ir \cos \theta)k} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^{2\pi} d\theta \left[k \frac{e^{(-2n+1+ir \cos \theta)k}}{-(2n+1+ir \cos \theta)} \right]_0^\infty \\ &\quad - \int_0^\infty dk \frac{e^{(-2n+1+ir \cos \theta)k}}{(2n+1+ir \cos \theta)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^{2\pi} d\theta \left[-\frac{e^{(-2n+1+ir \cos \theta)k}}{\{-2n+1+ir \cos \theta\}^2} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\{-2n+1+ir \cos \theta\}^2} \end{aligned} \quad (7)$$

となる. 式変形の途中で部分積分を用いた. さらに, $z = e^{i\theta}$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \oint_{|z|=1} dz \frac{-i}{z} \frac{1}{\left\{ -(2n+1) + ir \frac{z+z^{-1}}{2} \right\}^2} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \oint_{|z|=1} dz \frac{-iz}{\{-2(2n+1)z + ir(z^2+1)\}^2} \end{aligned} \quad (8)$$

となる. 被積分関数の極を求めると,

$$z = \frac{(2n+1) \pm \sqrt{(2n+1)^2 + r^2}}{ir} \equiv z^\pm \quad (9)$$

が 2 位の極であり, 任意の $n \geq 0$ に対して, $z = z^-$ は単位円の内部に含まれ, $z = z^+$ は単位円の外部に存在する. よって留数定理によって,

$$\begin{aligned} &\oint_{|z|=1} dz \frac{-iz}{\{-2(2n+1)z + ir(z^2+1)\}^2} \\ &= \oint_{|z|=1} dz \frac{iz}{r^2 \{(z-z^+)(z-z^-)\}^2} \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow z^-} \frac{d}{dz} \left[(z-z^-)^2 \frac{iz}{r^2 \{(z-z^+)(z-z^-)\}^2} \right] \\ &= \frac{-2\pi}{r^2} \lim_{z \rightarrow z^-} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z-z^+)^2} \right] \\ &= \frac{-2\pi}{r^2} \lim_{z \rightarrow z^-} \left[\frac{1}{(z-z^+)^2} - 2 \frac{z}{(z-z^+)^3} \right] \\ &= \frac{2\pi}{r^2} \frac{z^- + z^+}{(z^- - z^+)^3} \\ &= \frac{2\pi}{r^2} \frac{2(2n+1)}{ir} \\ &= \frac{2\pi}{r^2} \frac{ir}{\left\{ -2\sqrt{(2n+1)^2 + r^2} \right\}^3} \\ &= \frac{\pi(2n+1)}{2\{(2n+1)^2 + r^2\}^{3/2}} \end{aligned} \quad (10)$$

となる. これより

$$G(r) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{2n+1}{\{(2n+1)^2 + r^2\}^{3/2}} \quad (11)$$

となり, 積分表現から級数表現が導かれた.

上では, 数学的に丁寧に導出過程を示したが, 公式を利用すれば Kajiura (1963) で述べられているように確かに直ちに導くこともできる. 一般に

$$\int_0^\infty dx x e^{-ax} J_0(bx) = \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \quad (12)$$

が成り立つことが知られている [例えば, 寺沢 (1954, p. 449), Gradshteyn and Ryzhik (1980, eq. 2.623.2)]. これを用いれば

$$\int_0^\infty dk k J_0(kr) e^{-2(n+1)k} = \frac{2n+1}{\{(2n+1)^2 + r^2\}^{3/2}} \quad (13)$$

となり, 積分表現から直ちに級数表現が得られる.

§ 3. 議 論

実際の研究において級数表現を利用する際には, 有限の部分 and

$$G_N^{\text{sum}}(\hat{r}) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N (-1)^j \frac{2j+1}{\{(2j+1)^2 + \hat{r}^2\}^{3/2}} \quad (14)$$

を用いることになり, N をいくつにとれば積分表現の十分よい近似が得られるかが問題となる. ここで N まで

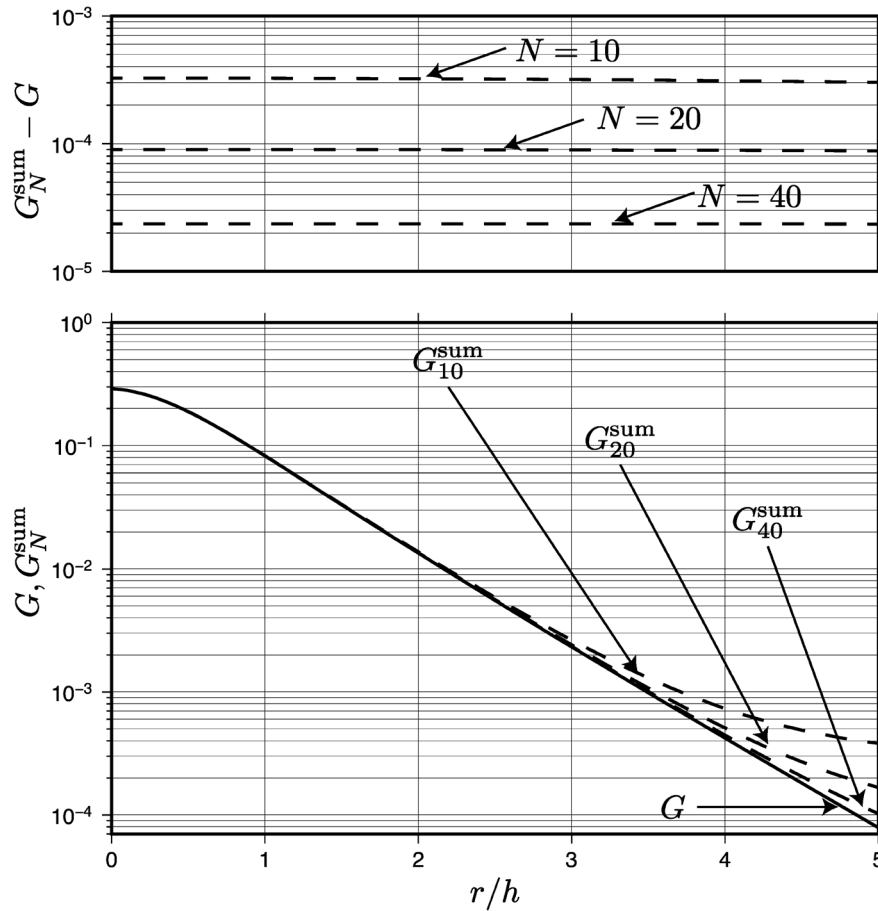


Fig. 2. Lower panel: Plot of Kajiura filter G and its partial sum of the series expansion G_N^{sum} for $N=10, 20, 40$. Upper panel: Plot of errors ($G_N^{\text{sum}} - G$) for $N=10, 20, 40$.

の部分と積分表現との誤差 ($G_N^{\text{sum}} - G$) がどの程度になるかを見てみよう。ここでは、式 (1) の畳み込みに現れる海底変動には立ち入らず、級数表現の誤差のみを考える。

$N=10, 20, 40$ の場合に G_N^{sum} をそれぞれ計算し、積分表現 G とともにそれらの結果を縦軸を対数にとりプロットした (Fig. 2). Fig. 2 上図はその誤差 ($G_N^{\text{sum}} - G$) を表す。積分表現の数値評価には Mathematica を利用した。 N が大きくなるにつれ、誤差は小さくなりグリーン関数の値が正しく評価できるようになっている。Fig. 2 を見ると $N=40$ に対して誤差 ($G_N^{\text{sum}} - G$) $\sim 2 \times 10^{-5}$ 程度に減少することがわかる。

謝 辞

本稿の改訂にあたり、査読者の齊藤竜彦氏、匿名の査読者、および編集委員の前田宜浩氏のコメントは非常に有意義でした。記して感謝いたします。本研究は文部科学省による「博士課程教育リーディングプログラム」(T.K.),

科研費 #16K05532 (N.K.), および「災害の軽減に貢献するための地震火山観測研究計画」(N.K.) の助成を受けました。

文 献

- Gradshteyn, I. S. and I. M. Ryzhik, 1980, Table of integrals, series, and products, Corrected and enlarged edition, Academic Press, New York, 1160 pp.
- Kajiura, K., 1963, The leading wave of a tsunami, Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. Tokyo, **41**, 535–571.
- 齊藤竜彦, 2016, 津波発生の理論, 地震 **2**, **68**, 135–145. doi:10.4294/zisin.68.135.
- Saito, T. and T. Furumura, 2009, Three-dimensional tsunami generation simulation due to sea-bottom deformation and its interpretation based on the linear theory, Geophys. J. Int., **178**, 877–888, doi:10.1111/j.1365-246X.2009.04206.x.
- 高橋龍太郎, 1942, 海底の変動に因って生ずる津浪について, 地震研究所彙報, **20**, 375–400.
- 寺沢寛一, 1954, 自然科学者のための数学概論, 岩波書店, 771 pp.