論文の内容の要旨

論文題目

Hybridized Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems
(楕円型問題に対するハイブリッド型不連続ガレルキン法の研究)

氏　名　　　　　　　　及川　一誠

近年の不連続ガレルキン法の発達はめざましく，様々な偏微分方程式に対して数値計算スキームが提案され，理論解析の研究もなされるようなった。不連続ガレルキン法では，自由に近似関数や要素形状が選べるという利点がある反面，その代償として，係数行列のサイズとバンド幅の増加が避けられない。その問題点を解決するために，個体力学の数値計算で用いられていた「ハイブリッド変位法」という手法と，不連続ガレルキン法とを組み合わせることを考えた。ハイブリッド変位法では，要素内部の未知関数 u_h と要素間境界上の未知関数 $\hat{u}_h$ の二種類を用いる。ある要素 K 上の未知関数 $u_h|_K$ はその周り ∂K 上の未知関数 $\hat{u}_h|_{\partial K}$ から決定されるように定式化する。そうすることで，u_h の方は消去され，最終的に残る未知関数は $\hat{u}_h$ だけになる。一般に，u_h より $\hat{u}_h$ の方が少ない未知数で済むので，u_h だけを用いる不連続ガレルキン法より出来上がる行列のサイズが小さくなる。特に，高次多項式を用いた場合にはその差が顕著に現れる。ハイブリッド変位法はそのような優れた点をもつ手法ではあったが，安定性が弱いという欠点があった。安定性を改善するために，ハイブリッド変位法に不連続ガレルキン法のペナルティ法を導入した手法が「ハイブリッド型不連続ガレルキン法 (以下 HDG 法)」である。ポアソン方程式や弾性体の問題については，HDG 法のスキームは既に提案されており，論文で理論的な誤差評価や数値計算例などが報告されている。最近では，B. Cockburn らを中心に，本論文の HDG 法とは異なるアプローチによる不連続ガレルキン法のハイブリッド化の研究もなされている。楕円型問題を始めとし，ストークス方程式やナビエ・ストークス方程式等についても，彼らの研究例がある。

本論文の第一部では，以下の移流拡散方程式に対する新たな HDG 法の定式化を提案する。

$$-\varepsilon\Delta u + \boldsymbol{b}\cdot\nabla u + cu = f \quad \text{in } \Omega, \tag{1a}$$

$$u = g_D \quad \text{on } \Gamma_D, \tag{1b}$$

$$\varepsilon\nabla u\cdot\boldsymbol{n} = g_N \quad \text{on } \Gamma_N. \tag{1c}$$

ここで，$\varepsilon > 0$ は拡散係数で，$\boldsymbol{b}, c, f, g_D, g_N$ は与えられた関数である。また，$\overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N = \partial\Omega$, $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ であるとし，ディリクレ境界は移流ベクトル $\boldsymbol{b}$ の流入境界であると仮定する。つまり，

$$\Gamma_- = \{x \in \partial\Omega : \boldsymbol{b}(x) \cdot \boldsymbol{n}(x) < 0\} \subset \Gamma_D$$

であるとする。$\boldsymbol{n}$ は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルである。さらに，以下の条件も仮定する。

$$c(x) - \frac{1}{2}\mathrm{div}\boldsymbol{b}(x) \geq \exists\rho_0 \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

移流拡散方程式の数値計算を行うときには，移流項の近似に工夫を要する。その原因は，ε が $\boldsymbol{b}$ に比べて非常に小さい場合に，厳密解に境界層が生じる可能性があるためである。そのようなケースは特殊というわけではない。例えば，Ω を正方形領域とし，$\Gamma_D = \partial\Omega$, $\boldsymbol{b} = (1,0)^T$，$c = f = g_D = 0$, という場合，$x = 1$ の付近で境界層が現れる。この例について，従来の有限要素法をそのまま適用すると，厳密解には見られない不自然な振動が生じてしまうことが知られている。第一部で提案する HDG スキームでは，移流反応項を次のように離散化することで，そのような不都合を回避している。

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big[(\boldsymbol{b} \cdot \nabla u_h + c u_h, v_h)_K + \langle u_h - \hat{u}_h, \max(0, -\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot v_h - \max(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n}, 0) \cdot \hat{v}_h \rangle_{\partial K} \Big].$$

第二項目は，強圧性が成立するように加えた項であるが，同時にある種の上流化の役割を果たしているため，移流が卓越する場合でも，安定性が保たれている。理論的には，区分 H^1 セミノルムに関して，最良オーダーの事前誤差評価を与えた。さらに，近似解と $\varepsilon = 0$ の場合の厳密解との関係を調べることによって，ε が極めて小さい値であっても，不安定性が生じないことの理論的な根拠を明らかにした。

第二部では，安定化にリフティング作用素を用いた HDG 法について述べる。モデル問題としてポアソン方程式を対象とした。元々は，不連続ガレルキン法で導入されていたリフティング作用素のアイデアを，HDG 法にも取り入れ，ハイブリッド法に合うように新たに定義した。リフティング作用素による安定化項をオリジナルの HDG 法に付け加えることによって，任意の正のペナルティパラメータについて，安定性が成り立つスキームが得られる。リフティング作用素を用いないオリジナルの HDG 法では，ペナルティパラメータが小さすぎると，不安定性を示すことがあるので,「任意の正の値」について安定性が保証されることは重要である。ただし，リフティング作用素による安定化項を加えることは，係数行列のバンド幅と条件数を増加させることになり，反復解法の収束性に悪影響を及ぼす可能性が考えられる。それを調査するため，小さなペナルティパラメータについて数値実験を実施し，反復法の収束速度を比較した。理論的な誤差評価としては，区分 H^1 セミノルム及び L^2 ノルムに関して，最良オーダーであることを示した。