

論文の内容の要旨

論文題目 : The p -adic monodromy theorem in the
imperfect residue field case
(剰余体が非完全な場合の
 p 進モノドロミー定理について)

氏名 : 大久保 俊

記法 1. p を素数とし, K を混標数 $(0, p)$ を持つ完備離散付値体とし, 剰余体を k_K とかく. G_K を K の絶対 Galois 群とする.

本学位論文では, p -基底の有限性等の剰余体 k_K に関する仮定なしで, G_K の p 進表現論における p 進モノドロミー定理を証明した. さらに応用として, 水平なド・ラーム表現における p 進モノドロミー定理の類似などを証明した.

k_K が完全体の場合, J.-M. Fontaine により G_K の p 進表現がクリスタリン, 半安定, ド・ラーム, ホッジ・テイトである, ということの定義が与えられた ([Fon1, Fon2] 等). さらに Fontaine は, ド・ラーム表現は潜在的半安定であろう, という p 進モノドロミー予想をした. この予想は Laurent Berger により肯定的に解決された ([Ber]). Berger はド・ラーム表現 V に対しフロベニウス作用付きの p 進微分方程式論を対応させ, Yves André, Kiran Kedlaya, Zoghman Mebkhout による p 進局所モノドロミー定理を適用することで, V が潜在的半安定であることを示した.

k_K が非完全で p -基底有限の場合も, G_K の p 進表現に対し, クリスタリン, 半安定, ド・ラーム, ホッジ・テイトという概念が Olivier Brinon によって定義されている ([Bri]). この場合における, 上記の p 進モノドロミー定理の類似が森田和真によって証明されている ([Mor]). 森田の手法もある意味で微分方程式を用いるものであり, その微分方程式は Fabrizio Andreatta-Olivier Brinon による \mathbb{B}_{dR} の Sen の理論により定義されるものである. Andreatta-Brinon の理論は, 副完備群 $\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p(1)^{J_K}$ ($p^{J_K} = [k_K : k_K^p]$ とおく) に対する Tate-Sen の形式論を用いて証明されるものであり, この場合の Tate-Sen の形式論は, John Tate による正規化された跡写像の類似を繰り返し用いて証明される. よって森田の手法は k_K の p -基底が無限である場合には拡張することはできないことに注意しておく.

k_K の p -基底が有限とは限らない場合にも、クリスタリン、半安定、ド・ラーム、ホッジ-テイトという概念が自然に定義することができる。本学位論文の主定理は次である：

主定理 (本学位論文 Main Theorem). 記号は記法 1 の通りとする。 V を G_K のド・ラーム表現とする。このとき K の有限次拡大 L が存在し、 $V|_L$ は半安定である。ここで $V|_L$ は、 V の L の絶対 Galois 群への制限を表すものとする。

先ほど注意したように、森田の手法は k_K の p -基底が有限でない場合には拡張できない。本学位論文では、Pierre Colmez による k_K が完全な場合の p 進モノドロミー定理の別証明 ([Col]) を拡張することで、主定理の証明をした。Colmez の手法は微分方程式論を必要としないものであるので、本学位論文の証明は k_K の p -基底が有限の場合にも森田の手法とは本質的に異なるものである。

次に、主定理の応用について述べる。剰余体が非完全な場合には K に非自明な接続が作用する。接続の作用を考慮することで、 G_K の p 進表現に対し、水平なクリスタリン、水平な半安定、水平なド・ラーム表現という概念が定義される。この水平な概念は上記の対応する概念よりも一般には強いものである：たとえば、水平なド・ラーム表現はド・ラーム表現であり、逆は一般には成立しない。主定理の応用として、 p 進モノドロミー定理の水平な類似を証明した：

定義 2. k_K の最大完全部分体を $k := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} k_K^{p^n}$ とし、 $W(k)$ を k のヴィット環とする。 $W(k)$ の商体 $W(k)[p^{-1}]$ の K 内での代数閉包を K_{can} と書く。 K_{can} は混標数 $(0, p)$ の完備離散付置体で、 k を剰余体として持つ。

定理 I (本学位論文 Theorem 7.4). V を G_K の水平なド・ラーム表現とする。このとき K_{can} の有限次拡大 K' が存在し、 $V|_{K_{K'}}$ は水平な半安定表現である。

また、定理 I の応用として、水平なド・ラーム表現の特徴づけを得ることができる： $G_{K_{\text{can}}}$ で K_{can} の絶対 Galois 群を表す。自然な全射制限写像

$$G_K \rightarrow G_{K_{\text{can}}}; g \mapsto g|_{(K_{\text{can}})^{\text{alg}}}$$

により、 $G_{K_{\text{can}}}$ の p 進表現のなす圏から、 G_K の p 進表現のなす圏への引き戻し関手が定義される。この関手はド・ラーム表現を水平なド・ラーム表現に移す、つまり関手

$$\iota_{\text{dR}} : \{G_{K_{\text{can}}}\text{ のド・ラーム表現} \} \rightarrow \{G_K\text{ の水平なド・ラーム表現} \}$$

を誘導する。

定理 II (本学位論文 Theorem 7.6). 関手 ι_{dR} は圏同値を与える。

最後に、定理 II の応用を述べる。

定義 3. K の代数閉包 K^{alg} の p 進完備化を \mathbb{C}_p と書く。 $G_{K_{\text{can}}}$ のド・ラーム表現 V のホッジ-テイト分解を

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_p(n)^{m_n}, \quad m_n \in \mathbb{N}$$

とする。このとき、 $i \in \mathbb{Z}$ に対し、 V のホッジ-テイト重みがすべて i 以上であるということ、 $\inf\{n \in \mathbb{Z} | m_n \neq 0\} \geq i$ となることとする。

定理 III (本学位論文 Theorem 7.8). 副有限群 G と位相 G -加群 V に対し、 $H^1(G, V)$ で V の連続群コホモロジーを表すこととする。

1. V を $G_{K_{\text{can}}}$ のド・ラーム表現で、ホッジ-テイト重みがすべて 1 以上であるものとする。このとき、以下の自然な完全列が存在する：

$$0 \longrightarrow H^1(G_{K_{\text{can}}}, V) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G_K, \iota_{\text{dR}}(V)) \longrightarrow H^1(G_K, \mathbb{C}_p \otimes \iota_{\text{dR}}(V)). \quad (1)$$

2. 上記の仮定に加え, さらに V のホッジ-テイト重みがすべて 2 以上であるとする. このとき,

$$H^1(G_K, \mathbb{C}_p \otimes \iota_{\text{dR}}(V)) = 0$$

である. 特に上記の完全列により自然な同型

$$\text{Inf} : H^1(G_{K_{\text{can}}}, V) \rightarrow H^1(G_K, \iota_{\text{dR}}(V)) \quad (2)$$

を得る.

完全列 (1) はテイトひねり $V = \mathbb{Z}_p(1)$ の場合, 同型 (2) は $V = \mathbb{Z}_p(n)$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$) かつ剰余体が分離閉体の場合に, それぞれ兵頭治によって証明されている ([Hyo1, Hyo2]). 定理 III は兵頭の結果の, 水平なド・ラーム表現に対する類似になっている.

参考文献

- [AB] F. Andreatta, O. Brinon, B_{dR} -representations dans le cas relatif, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) **43** (2010), 279–339.
- [Ber] L. Berger, Représentations p -adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), no. 2, 219–284.
- [Bri] O. Brinon, Représentations cristallines dans le cas d’un corps résiduel imparfait, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56** (2006), no. 4, 919–999.
- [Col] P. Colmez, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, *Astérisque No. 319* (2008), 117–186.
- [Fon1] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p -adiques, *Astérisque No. 223* (1994), 59–111.
- [Fon2] J.-M. Fontaine, Représentations p -adiques semi-stables, *Astérisque No. 223* (1994), 113–184.
- [Hyo1] O. Hyodo, On the Hodge-Tate decomposition in the imperfect residue field case, *J. Reine Angew. Math.* **365** (1986), 97–113.
- [Hyo2] O. Hyodo, Wild ramification in the imperfect residue field case, Galois representations and arithmetic algebraic geometry (Kyoto, 1985/Tokyo, 1986), 287–314, *Adv Stud. Pure Math.*, 12, 1987.
- [Mor] K. Morita, Crystalline and semi-stable representations in the imperfect residue field case, preprint, arXiv:1105.0846v2, math.NT.