論文の内容の要旨

On the exact WKB analysis of Schrödinger equations

(Schrödinger 方程式の完全 WKB 解析に関して)

神本晋吾

本稿では, 大きなパラメータ η を含み, 解析的なポテンシャル $Q(x)$ を持つ次の 1 次元定常型 Schrödinger 方程式を考える:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 Q(x)\right)\psi(x,\eta) = 0. \tag{1}$$

Part I
On the Borel summability of WKB-theoretic transformation series

(1) の完全 WKB 解析 (Borel 総和法を用いた解析) は A. Voros により始められ, [V] では (1) の単純変わり点から出る Stokes 曲線上での WKB 解 $\psi(x,\eta)$ の接続公式が与えられた. そこでは WKB 解の Borel 和の変わり点での一価性の議論を用いて接続係数が求められた.

この接続公式を別の視点から捉えるべく, 青木-河合-竹井により (1) の次の Airy 方程式への WKB 解析的な変換が導入された ([AKT1]):

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 x\right)\phi(x,\eta) = 0. \tag{2}$$

ここで, WKB 解析的変換とは, η に関する形式冪級数 (WKB 解析的変換級数と呼ぶ) による形式的座標変換, 及び gauge 変換のことである. これは, (1) の WKB 解の Borel 変換像 $\psi_B(x,y)$ の持つ「動く特異点」と呼ばれる特異点の解析を目的としたもので, この特異点での ψ_B の特異性の記述を通して, Voros の接続公式は説明された. (実際, (2) の WKB 解 $\phi(x,\eta)$ の Borel 変換像 $\phi_B(x,y)$ は具体的に超幾何関数を用いて表示することが可能であり, ϕ_B の動く特異点での特異性の記述から, WKB 解析的変換を通して, ψ_B の動く特異点での特異性の記述が行われていた.) ここで次に注意する: [AKT1] では変わり点の近傍, 及び Borel 平面の「基準の特異点」の近傍での, ψ_B の特異性の局所的な記述は与えられていた. しかし, ψ の Borel 和, 及び Stokes 現象を扱うためには, 変わり点から出る Stokes 曲線の近傍, 及び基準の特異点から Borel 平面の実軸に平行に延びる直線の近傍での ψ_B の特異性の記述が必要になる. Part I では, 注目している単純変わり点から出る Stokes 曲線が, 全て $Q(x)$ の二位以上の位数の極に流れ込むという Stokes 幾何に関する仮定の下, WKB 解析的変換級数の Borel 総和可能性を示すことにより, 上記の場所での ψ_B の特異性の記述を与えた. この結果から, [AKT1] の立場からの Voros の接続公式の完全な証明が得られたことになる. また, $Q(x)$ の単純極も変わり点と同様の役割を果たすことが, 小池により WKB 解析的変換を用いた方法により明らかにされているが ([Ko1],[Ko2]), そこで用いられた WKB 解析的変換級数に対しても, 同様の仮定の下, Borel 総和可能性を示した.

Part II

On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a merging pair of a simple pole and a simple turning point

Part I では一つの単純変わり点 (あるいは一つの単純極) が考察の対象であった. しかし, このように一つの変わり点に注目しているだけでは捉えることができない, 「動かない特異点」と呼ばれる ψ_B の特異点が知られている. この動かない特異点の解析に関して, 青木-河合-竹井による, 二つの合流する単純変わり点を持つ Schrödinger 方程式 (MTP 方程式) の完全 WKB 解析が知れている ([AKT2]). 簡単のため, まず次の Weber 方程式を考えてみる:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2\big(E - \frac{x^2}{4}\big)\right)\hat{\phi}(x,E,\eta) = 0. \tag{3}$$

ここでは E が合流パラメータの役割を果たしている. この場合, 動かない特異点は基準の特異点から $2\pi E$ の周期で現れることが知られている. (3)

は $x = \pm 2\sqrt{E}$ に単純変わり点を持っているが, この動かない特異点は, 二つの単純変わり点がStokes曲線で結ばれるという, Stokes幾何の退化と関係しており, 動かない特異点での特異性の記述, 特に alien derivative の計算は, 合流パラメータ E に関する Stokes 現象を記述する際に重要となる. (3) に関しては, 動かない特異点の解析に有効な「Voros 係数」と呼ばれる級数の Bernoulli 数を用いた明示的な表示が得られており ([SS], [T]), これにより動かない特異点の具体的な解析が可能である. [AKT2] では MTP 方程式の変わり点の合流点の近傍での (3) への WKB 解析的変換を通して, 合流する二つの単純変わり点に起因する動かない特異点の解析が行われた.

上述したように, 単純極も変わり点と同様の振る舞いをすることが知られている. すると, 単純変わり点と単純極の組, あるいは, 二つの単純極の組に関しても, これらに起因する動かない特異点が現れると期待される. Part II では, 単純変わり点と単純極の組に起因する動かない特異点の解析を行うべく, 合流する単純変わり点と単純極の組を持つ Schrödinger 方程式 (MPPT 方程式) の完全 WKB 解析を行った. ここでは [AKT2] と同様に, 合流点の近傍での Whittaker 方程式への WKB 解析的変換を通して, 合流する単純変わり点と単純極の組に起因する動かない特異点の解析を行った.

Part III

Exact WKB analysis of a Schrödinger equation with a merging triplet of two simple poles and one simple turning point —— its relevance to the Mathieu equation and the Legendre equation

[AKT2], Part II での結果を踏まえて, 次の自然な問いが生じる: 二つの単純極の組に起因する動かない特異点の解析も, 同様に合流操作を用いて解析を行えないであろうか? しかし, この場合には次の困難が生じる: 例えば, ポテンシャルとして次のものを考えてみる:

$$Q_1(x, a, \Gamma) = \frac{\Gamma}{x^2 - a^2}. \tag{4}$$

ただし,a は合流パラメータとする. $Q_1(x, a, \Gamma)$ は $x = \pm a$ に $a = 0$ で合流する単純極を持っているが, これらに起因する動かない特異点の現れる周期は a に依存せず $2\pi i\sqrt{\Gamma}$ となる. (実際, この周期は二つの単純極の周りを回る $Q_1(x, a, \Gamma)$ の周回積分により与えられる.) 一方, MTP 方程式, MPPT 方程式では, 解析の対象であった動かない特異点の周期は合流に

伴い 0 となり, この性質は動かない特異点の解析を行う上で重要であった. では, 次の形の単純極の合流ではどうなるであろうか:

$$Q_2(x,a) = \frac{p_+}{x-a} + \frac{p_-}{x+a} = \frac{(p_+ + p_-)x + (p_+ - p_-)a}{x^2 - a^2}. \tag{5}$$

すると, $p_+ - p_- \neq 0$ の場合, 二つの単純極に加えて新たに $a = 0$ で合流する単純変わり点が現れてしまう. しかし, $Q_2(x,a)$ の二つの単純極に起因する動かない特異点の現れる周期は $O(\sqrt{|a|})$ となり, $Q_1(x,a,\Gamma)$ の動かない特異点よりは扱い易い. これらを踏まえて, Part III では合流する二つの単純極と一つの単純変わり点を持つ Schrödinger 方程式 (M2P1T 方程式) の完全 WKB 解析を行った. ここでは, まず合流点の近傍において, 代数的 Mathieu 方程式

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 \frac{aA + Bx}{x^2 - a^2}\Big)\tilde{\phi}(x,a,A,B,\eta) = 0 \tag{6}$$

($A, B \neq 0$ は方程式のパラメータ) への WKB 解析的変換の構成を行った. では, (6) の二つの単純極に起因する動かない特異点の解析は可能であろうか? 当然ながら, 単純変わり点と単純極に起因する動かない特異点も混在しているため, これらを取り除く必要が生じる. Part III では, 更に単純変わり点の合流の速度をパラメータ B により調節し, 単純変わり点の影響を取り除くことにより, 二つの単純極の近傍における $Q_1(x,a,a\Gamma)$ をポテンシャルに持つ Schrödinger 方程式 (Legendre 方程式) への WKB 解析的変換を通して, 二つの単純極に起因する動かない特異点の解析を行った.

謝辞

学部生の頃からご指導下さった片岡清臣先生, 京都での充実した研究環境を提供して下さった河合隆裕先生, 竹井義次先生, 研究を行う上での貴重な助言を下さった青木貴史先生, 小池達也先生, 共に切磋琢磨した岩木耕平氏, 佐々木真二氏, 廣瀬三平氏に心からの感謝を捧げたい.

参考文献

[AKT1] T. Aoki, T. Kawai and T. Takei: The Bender-Wu analysis and the Voros theory, Special Functions, Springer-Verlag, 1991, pp.1–29.

[AKT2] ———: The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II, Advanced Studies in Pure Mathematics, **54**, Math. Soc. Japan, 2009, pp.19–94.

[Ko1] T. Koike: On a regular singular point in the exact WKB analysis, Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear, Kyoto Univ. Press, 2000, pp.39–54.

[Ko2] ———: On the exact WKB analysis of second order linear ordinary differential equations with simple poles, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **36** (2000), 297–319.

[SS] H. Shen and H. J. Silverstone: Observations on the JWKB treatment of the quadratic barrier, Algebraic Analysis of Differential Equations, Springer, 2008, pp.307–319.

[T] Y. Takei: Sato's conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B10** (2008), 205–224.

[V] A. Voros: The return of the quartic oscillator —– The complex WKB method. Ann. Inst. Henri Poincaré, **39** (1983), 211–338.