論文の内容の要旨
論文題目: Entire curves in projective algebraic varieties
(射影代数多様体内の正則曲線について)

氏名: 千葉優作*

1　背景

R. ネヴァンリンナは, 複素平面上の有理型関数の値分布を調べるために 1925 年の論文においてネヴァンリンナ理論を創始した（[Ne]）. ネヴァンリンナ理論では第一主要定理と第二主要定理と呼ばれる 2 つの主定理があり, 第一主要定理は特性関数, 個数関数, 接近関数と呼ばれる 3 つの関数の関係を表したもので, 第二主要定理は個数関数の大きさを特性関数の大きさで漸近的に評価したものである. ネヴァンリンナ理論はその後高次元化され, 複素多様体の中の正則曲線（複素平面から複素多様体への正則な写像）を研究する有力な手段となっている. 第二主要定理が確立されている主な場合として次のようなものがある:

(a) 複素射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ における一般の位置にある超平面に対する第二主要定理（H. Cartan [Ca]）.

(b) 準アーベル多様体とその因子に対する第二主要定理（Noguchi-Winkelmann-Yamanoi [NWY1], [NWY2]）.

(c) 一般型曲面の正則葉層構造に沿った正則曲線に対する第二主要定理（M. McQuillan [Mc]）.

また小林双曲性も, 正則曲線を調べる際には重要な概念である. 小林双曲的多様体は非定値な正則曲線を持たないような複素多様体であり, 小林双曲性については次の小林予想が有名である.

(1) 複素射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ において次数 $d \geq 2n-1$ の一般な超曲面は小林双曲的である.

(2) 複素射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ において次数 $d \geq 2n+1$ の一般な超曲面の補集合は $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に小林双曲的に埋め込まれている.

小林予想については, 任意次元で存在が K. Masuda-J. Noguchi [MN] で示された. 小林予想 (1) について $n=3$ のときは J.-P. Demailly, J. El Goul [DE], M. Păun [Pa] などで詳しく研究されて部分的な解決をしている. また小林予想 (2) についても $n=2$ のときは G. Dethloff, S. Lu [DL], E. Rousseau [Ro] により部分的に解決している.

本論文の構成は以下のとおりである. 第一節ではジェット束, ネヴァンリンナ理論や小林双曲性の基本的な定義や性質について述べる. これらは後の節で何度も使われる基本的な概念である. 第二節では J.-P. Demailly [De] で導入された射影的有理型接続を使ってある第二主要定理を証明する. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ での特別な超曲面や一般の位置にない超平面の第二主要定理を扱っている. 第三節では有理型接続を使って $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対する第二主要定理を証明する. 第四節では代数的トーラスから因子を除いた空間が, あるトーリック多様体に小林双曲的に埋め込まれる十分条件を与える.

*chiba@ms.u-tokyo.ac.jp

2　複素射影空間の超曲面に対する第二主要定理

H. Cartan [Ca] により複素射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の一般の位置にある超平面に対する第二主要定理が証明されて以来, 超曲面に対する第二主要定理を証明することが大きな問題となった. 論文の第二節では特殊な超曲面に対する第二主要定理を証明する.

$s_0,\dots,s_n$ を $\mathbb{C}[X_0,\dots,X_n]$ の d 次斉次多項式で, ある正整数 $l_0,\dots,l_n$ に対して

$$X_0^{d-l_0}|s_0,\ \dots,\ X_n^{d-l_n}|s_n,$$

$$\det\left(\frac{\partial s_j}{\partial X_k}\right)_{0\le j,k\le n}\not\equiv 0,$$

を満たすとする. このとき $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の 有理型接続 $\widetilde{\nabla}=d+\widetilde{\Gamma}$ を

$$\sum_{0\le\lambda\le n}\frac{\partial s_\kappa}{\partial X_\lambda}\,\widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{i,j}=\frac{\partial^2 s_\kappa}{\partial X_i\partial X_j}$$

で定義する. この接続は $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上に射影的有理型接続 ∇ を誘導する（J.-P. Demailly [De] 参照）. 我々は, この ∇ を使って次の第二主要定理を証明する.

定理 2.1 (Theorem 0.0.1) $\sigma_1,\dots,\sigma_q$ を線形系 $|\{s_0,\dots,s_n\}|$ の元で $\sum_{k=1}^q\sigma_k$ は単純正規交叉的とする. H を $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の超平面束とする. また $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ を正則曲線で, その像が線形系 $|\{s_0,\dots,s_n\}|$ の元の台や, ∇ の極の集合に入っていないものとする. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\left(q-\frac{n+1}{d}-\frac{1}{2d}(n-1)n(n+1+l_0+\cdots+l_n)\right)T_f(r,dH)\\ \le\sum_{1\le i\le q}N_n(r,f^*\sigma_i)+S_f(r),\end{aligned}$$

ここで, $S_f(r)$ は増大度の小さい項を表し, $(0,\infty)$ の測度有限な例外集合の外で次の評価をみたす.

$$S_f(r)=O(\log r+\log T_f(r,H)).$$

また X を射影代数多様体として $\widetilde{X}\to X$ をその固有改変 (proper modification) としたときに X 上の射影的有理型接続を引き戻すことで, $\widetilde{X}$ 上にも射影的有理型接続が誘導される. これによって一般の位置にない超平面に対する次の第二主要定理を得た.

定理 2.2 (Theorem 0.0.2) $S_1,\dots,S_q$ を $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の m-準一般の位置にある超平面とする. $\{x_1,\dots,x_p\}$ を $S_1,\dots,S_q$ が単純正規交叉的ではない $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の点全体とする. $\widetilde{\mathbb{P}}^2(\mathbb{C})\to\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を $\{x_1,\dots,x_p\}$ でブローアップしたものとして, H_1,H_2,H_3 を $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の超平面で, $\{x_1,\dots,x_p\}$ を通らないものとする. 正則曲線 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を線形非退化なものとする. ここで f が線形非退化とは, f の像を含む $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の超平面が存在しないこととする. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}(q-3)T_f(r,H)\quad\le\quad&\sum_{i=1}^{q}N_2(r,\widetilde{f}^*\widetilde{\sigma}_i)+m\sum_{i=1}^{p}N(r,\widetilde{f}^*E_i)\\&+\frac{m-1}{2}\sum_{i=1}^{3}N_2(r,f^*H_i)+S_f(r).\end{aligned}$$

一般の位置にない超平面に対する第二主要定理は E. Nochka [Noc] により任意次元で解決されているが上の定理 2.2 は Nochka のものとは異なる.

3　リーマン球面の直積における第二主要定理

第三節ではリーマン球面の直積である $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 内の正則曲線を扱う．先行する結果として J. Noguchi [Nog] が, ある特別な条件下で得た第二主要定理がある．ここでは, そのような条件を仮定せずに成立することを証明する．$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ には 2 次元代数トーラス $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ が含まれているが, その中の部分群である因子のコンパクト化 D', D'' に対する第二主要定理を証明する．ここで

$$D' : z^{m'} - w^{n'} = 0, \quad D'' : z^{m''}w^{n''} - 1 = 0,$$

であり z, w は $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\subset\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の局所座標系とする．代数的トーラス上には平坦な接続 ∇ が存在し, 部分群は ∇ に関して全測地的になる．この接続 ∇ を $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上に有理型接続として拡張しておく．$Z=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とおいて, $\pi:\widetilde{Z}\to Z$ を適当な固有改変とする．すると $\widetilde{Z}$ 上にも有理型接続が誘導されて, それを $\tilde{\nabla}$ とおく．このとき次の定理が示される．

定理 3.1 (Theorem 0.0.3) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を正則曲線として $\widetilde{f}:\mathbb{C}\to\widetilde{Z}$ をそのリフトとする．また $\widetilde{D}', \widetilde{D}''$ を D', D'' の π による強変換, $E=\sum_{i=1}E_i$ を $\tilde{\nabla}$ の極の既約分解とする．f の像が $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ のある真部分群の平行移動の閉包に含まれることはないとすると次が成り立つ．

$$T_{\widetilde{f}}(r,\widetilde{D}) \le N_2(r,\widetilde{f}^*\widetilde{D}') + N_2(r,\widetilde{f}^*\widetilde{D}'') + 2\sum_{i=1} N_1(r,\widetilde{f}^*E_i) + S_f(r).$$

4　トーリック多様体への小林双曲的な埋め込み

代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^r$ 上の因子 D をローラン多項式

$$\sum_{I=(i_1,\ldots,i_r)} a_I z_1^{i_1}\cdots z_r^{i_r} \;\in\; \mathbb{C}[z_1,z_1^{-1},\ldots,z_r,z_r^{-1}]$$

で与えられるものとする．このとき, 補空間 $(\mathbb{C}^*)^r\setminus D$ があるトーリック多様体へ小林双曲的に埋め込まれるような D の条件について考察する．以下に定理に必要な定義を述べる．

階数 r の $\mathbb{Z}$ 上の自由加群を $N=\mathbb{Z}^r$ として, $M=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{Z})$ とする．係数を $\mathbb{R}$ に拡張したものを $N_{\mathbb{R}}=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$, $M_{\mathbb{R}}=M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ とおく．r 次元代数的トーラスを $T_N=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}^*$ とする．M に含まれる有限部分集合 A に対して,

$$\mathcal{L}_A := \{a-b\in M_{\mathbb{R}} \mid a,b\in A\}$$

と定義する．V_A を $\mathcal{L}_A$ の元全体で生成される $M_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{R}$ 上線形部分空間として,

$$\mathcal{H}_A := \{H\subset V_A \mid \mathcal{L}_A \text{ の元で生成される } V_A \text{ の超平面}\}$$

と定義する．ただしここでいう超平面とは, 余次元 1 の $\mathbb{R}$ 上の線形部分空間である．また, P を $M_{\mathbb{R}}$ に含まれる r 次元整凸多面体とする．このとき P に付随した射影的トーリック多様体 X が自然に定義される．

定理 4.1 (Theorem 0.0.4) S を M の中の有限部分集合で $S\subset P$ とする．P に含まれる任意の正次元面 τ に対して次の条件を仮定する:

(i) $\tau\cap S\neq\emptyset$ であり, $\tau\cap S$ の凸包の次元は τ の次元と一致する．

(ii) $H\in\mathcal{H}_{\tau\cap S}$ に対して, $\phi_H : V_{\tau\cap S}\to V_{\tau\cap S}/H$ を自然な準同型とする．x を $\tau\cap S$ のある一点としたとき, $\sharp(\phi_H(\tau\cap S - x)) \ge \dim\tau + 1$ が任意の $H\in\mathcal{H}_{\tau\cap S}$ に対して成り立つとする．

このとき, 線形系 $|\{z_1^{i_1}z_2^{i_2}\cdots z_r^{i_r}\}_{(i_1,i_2,\ldots,i_r)\in S}|$ の一般な元で与えられる T_N の因子 D に対して, $T_N\setminus D$ は X に小林双曲的に埋め込まれている．

また, 主結果の応用として小林予想 (2) に関連した次の系が得られる.

系 4.2 (Corollary 4.1.1) n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ において 一般の位置にある $(n+1)$ 本の超平面 $H_0, H_1, \ldots, H_n$ をとる. このとき次数 n の一般な超曲面 S に対して, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \left(S \cup \bigcup_{i=0}^{n} H_i \right)$ は $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に小林双曲的に埋め込まれる.

References

[Ca] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, Mathematica (Cluj) **7** (1933), 5–31.

[De] J.-P. Demailly, Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials, Algebraic geometry Santa Cruz 1995, pp. 285-360, Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[DE] J.-P. Demailly and J. El Goul, Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space, Amer. J. Math. **122** (2000), no. 3, 515–546.

[DL] G. Dethloff and S. Lu, Logarithmic jet bundles and applications, Osaka J. Math. **38** (2001), no. 1, 185–237.

[El] J. El Goul, Logarithmic jets and hyperbolicity, Osaka J. Math. **40** (2003), no. 2, 469–491.

[MN] K. Masuda and J. Noguchi, A construction of hyperbolic hypersurface of $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, Math. Ann. **304** (1996), no. 2, 339–362.

[Mc] M. McQuillan, Diophantine approximations and foliations, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **87** (1998), 121–174.

[Ne] R. Nevanlinna, Zur Theorie der Meromorphen Funktionen, Acta Math. **46** (1925), no. 1-2, 1–99.

[Noc] E.I. Nochka, On the theory of meromorphic curves, Dokl. Akad. Nauk SSSR **269** (1983), no. 3, 547–552.

[Nog] J. Noguchi, Connections and the second main theorem for holomorphic curves, to appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo.

[NWY1] J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties, Acta Math. **188** no.1 (2002), 129-161.

[NWY2] J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties II, Forum Math. **20** (2008), 469-503.

[Pa] M. Păun, Vector fields on the total space of hypersurfaces in the projective space and hyperbolicity, Math. Ann. **340** (2008), no. 4, 875–892.

[Ro] E. Rousseau, Logarithmic vector fields and hyperbolicity, Nagoya Math. J. **195** (2009), 21–40.

[Ti1] Y. Tiba, The second main theorem of hypersurfaces in the projective space, to appear in Math. Z.

[Ti2] Y. Tiba, Holomorphic curves into the product space of the Riemann spheres, to appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo.

[Ti3] Y. Tiba, Kobayashi Hyperbolic Imbeddings into Toric Varieties, submitted.