論文の内容の要旨

論文題目　The explicit calculation of Čech cohomology and an extension of Davenport's inequality

（Čech コホモロジーの明示的計算と Davenport 不等式の拡張）

氏名　田然（Ran TIAN）

背景

$\mathbb{C}(t)$ 上の楕円曲線 E の方程式を Weierstrass 標準形で $y^2 = 4x^3 - 3ax + b$ $(a, b \in \mathbb{C}[t])$ と書いたとする。$\mathbb{C}(t)$ のプレース ν を一つ固定すると、ある定数 $C_{a,b,\nu}$ が存在して、任意の有理点 $(r, s) \in E(\mathbb{C}(t))$ に対し、付値 $\nu(r) \geq C_{a,b,\nu}$ であることは Manin(1966) によって証明された。これは方程式 $y^2 = 4x^3 - 3ax + b$ の多項式解が有限個しかないとする Siegel の定理を簡単に導きだす強力な命題である。

E を $\mathbf{P}^1$ への elliptic fibration を持つ、$\mathbb{C}$ 上の代数曲面だと思うと、幾何的に $\nu(r)$ は、(r, s) の表すセクションと 0-セクションとの ν においての交点重複度と比例している。この交点重複度が一定以上となる全ての有理点の集合 $E_i := \{(r, s) \in E(\mathbb{C}(t)); \nu(r) \leq -2i\}$ は、$E(\mathbb{C}(t))$ の部分群で、$E_i \supset E_{i+1}$ であり、E_i/E_{i+1} が torsion-free であることは簡単なレンマだが、これと Mordell-Weil の定理と組み合わせて上の Manin の命題（そして Siegel の定理）がすぐ従うことは Voloch(1994) が気付いた。

しかし Manin の命題における定数 $C_{a,b,\nu}$ の明示的表示と rankE_i の評価が問題となる。これらの評価は E の多項式解の個数の評価につながる。

座標変換で ν が $t = \infty$ での付値と思ってもかまわない。このとき $\nu = -\deg$ で、ただし有理式に対して deg は分子と分母の多項式の次数の差を表す。E の多項式解 (r, s) に対する $\deg r$ の評価について以下のような結果が知られている：

定理（Davenport の不等式）　楕円曲線 $E : y^2 = x^3 + h$ $(0 \neq h \in \mathbb{C}[t])$ の整点 (r, s) について不等式

$$\frac{1}{2} \deg r \leq \deg h - 1$$

が成り立つ。

もっと一般的な楕円曲線に対して次の評価がある：

定理（Hindry-Silverman）　楕円曲線 $E : y^2 = 4x^3 - 3ax + b$ $(a, b \in \mathbb{C}[t], \Delta = a^3 - b^2 \neq 0)$ の整点 (r, s) は

$$\frac{1}{2} \deg r \leq 2N_0(\Delta) - 2 + \frac{1}{12} \deg \Delta$$

をみたす。ここで N_0 は異なる零点の個数を表す。

主定理

本論文の主定理は次のようなものである。
記号　楕円曲線 $E: y^2 = 4x^3 - 3ax + b$ $(a, b \in \mathbb{C}[t])$ に対して次を定義し：

- n を $\deg a \leq 4n, \deg b \leq 6n$ をみたす最小の整数とする。
- $\Delta = a^3 - b^2$, $\Lambda = 2b'a - 3ba'$, $\Phi = \frac{1}{3}(b')^2 - \frac{3}{4}a(a')^2$ とおく。
- $P_2 = \Delta\Lambda$, $P_1 = \Delta'\Lambda - \Delta\Lambda'$, $P_0 = \frac{1}{12}(\Delta''\Lambda - \Delta'\Lambda' + \Phi\Lambda)$ とおく。
- $p, q \in \mathbb{C}[t]$ に対し、$\rho(p, q) = \Delta\Lambda q' - \Delta\Lambda' q + \frac{11}{12}\Delta'\Lambda q - 6(P_2 p'' + P_1 p' + P_0 p)$ とおく。
- $B = \{\rho(p, q) \text{ MOD } \Lambda^2\}$ とおく。ここで MOD Λ^2 は、多項式を Λ^2 で割っての余りを表す。

次を仮定する：

- a, b が minimal、つまり定数でない多項式 l で l^4 が a を割り切り、l^6 が b を割り切るようなものは存在しないとする。
- $\Lambda \neq 0$、つまり E の J-不変量は定数でないとする。

定理　上の記号下で、

1. $c = \min\{\deg\beta; \beta \in B, \beta \neq 0\}$ とおくと、有理点 $(r, s) \in E(\mathbb{C}(t))$ に対して
$$\frac{1}{2}\deg r \leq \deg(\Delta\Lambda) - c - 2$$
2. $E_i = \{(r, s) \in E(\mathbb{C}(t)); \frac{1}{2}\deg r \geq i\}$ とおくと、
   (a) $c \leq j \leq 2\deg\Lambda - 1$ をみたす j に対し
$$\mathrm{rank} E_{\deg(\Delta\Lambda) - j - 2} \leq \dim_{\mathbb{C}}\{\beta \in B; \deg\beta \leq j\}.$$
   (b) $2\deg\Lambda + n - 2 \leq k$ をみたす k に対し
$$\mathrm{rank} E_{\deg(\Delta\Lambda) - k - 2} \leq \dim_{\mathbb{C}} B + k - (2\deg\Lambda + n - 2).$$

この定理は Hindry-Silverman の評価よりもいい不等式をもたらす。
特に楕円曲線 $E: y^2 = x^3 + x + h$ の有理点 (r, s) に適用する場合、よりきれいな不等式
$$\frac{1}{2}\deg r \leq N_0(\Delta) - 1$$
および評価

1. $0 \leq i \leq \deg\Lambda - \deg\gcd(\Delta, \Delta')$ なる i に対し $\mathrm{rank} E_{N_0(\Delta) - i} \leq i$
2. $j \geq \deg\Lambda - \deg\gcd(\Delta, \Delta')$ なる j に対し $\mathrm{rank} E_{N_0(\Delta) - n - j} \leq j$

を得ることができる。

証明の概略

Manin の写像の次数

$K=\mathbb{C}(t), L=K(x,y), y^2=4x^3-3ax+b$ とおく。K 上の導分 $\frac{\partial}{\partial t}$ に対応して $\Omega_{L/K}/d(L)$ の K-導分、Gauss-Manin 接続 ∂ を定義することができる。relative な一次形式 $\frac{dx}{y}\in\Omega_{L/K}$ の $\Omega_{L/K}/d(L)$ における同値類は、∂ に関してある二階の微分方程式をみたす。この方程式は

$$(P_2\partial\partial+P_1\partial+P_0)\frac{dx}{y}\in d(L)$$

と計算された。

$(P_2\partial\partial+P_1\partial+P_0)\frac{dx}{y}\in d(L)$ となるので、楕円曲線 $E: y^2=4x^3-3ax+b$ の有理点 $\mathfrak{s}=(r,s)$ に対して式

$$\mu(\mathfrak{s})=(P_2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}+P_1\frac{\partial}{\partial t}+P_0)\int_{\mathfrak{o}}^{\mathfrak{s}}\frac{dx}{y}$$

は積分経路によらずに定まり有理関数となる。この写像 $\mu: E(K)\to K$ は Manin の写像と呼ばれる。μ は加群の準同型でそのカーネルは $E(K)$ の torsion-part である。

主定理の証明は、$\deg\mu(\mathfrak{s})$ と $\deg r$ との間の関係に対する気付きから始まった。論文の §2 で、ほとんどの場合 $\deg\mu(\mathfrak{s})=-\frac{1}{2}\deg r+\deg(\Delta\Lambda)-2$ であることを証明する。

Manin の写像のコホモロジー的な意味

以下では次の記号を使う：

- E の小平-Néron モデルを $\tilde{E}$ とおく。
- elliptic fibration を $\kappa:\tilde{E}\to\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$ とおく。
- $A=\mathbf{Spec}\,\mathbb{C}[t,\Delta^{-1}]$, $E_\Delta=\kappa^{-1}A$ とおく。
- κ の generic fiber を $\mathfrak{f}$ とおく。
- 0-セクションを $\mathfrak{o}$ とおく。
- $H^1_{prim}(\widetilde{E},\Omega^1_{\widetilde{E}})=\{c\in H^1(\widetilde{E},\Omega^1_{\widetilde{E}}); c.\mathfrak{f}=0\}$ とおく。ここで $c.\mathfrak{f}$ は交叉を表す。

任意の $c\in H^1_{prim}(\widetilde{E},\Omega^1_{\widetilde{E}})$ に対して、c の $H^1(E_\Delta,\Omega^1_{E_\Delta})$ への制限は $H^1(E_\Delta,\kappa^*\Omega^1_A)$ の像に入り、それを下の図式に沿って $\hat{u}\in H^0(A,R^1\kappa_*\mathbb{C}\otimes\mathcal{O}^1_A)$ によって表すことができる。

$$H^1(E_\Delta,\kappa^*\Omega^1_A)\overset{\cong}{\to}H^0(A,R^1\kappa_*\kappa^*\Omega^1_A)\to H^0(A,R^1\kappa_*\mathbb{C}\otimes\Omega^1_A)\underset{\cong}{\overset{\cdot dt}{\leftarrow}}H^0(A,R^1\kappa_*\mathbb{C}\otimes\mathcal{O}^1_A)$$

よって写像 $\tilde{\mu}: H^1_{prim}(\widetilde{E},\Omega^1_{\widetilde{E}})\to\mathbb{C}(t)$ を

$$\tilde{\mu}(c)=P_2(\hat{u}\smile\partial\omega)+(P_2\frac{\partial}{\partial t}+P_1)(\hat{u}\smile\omega)$$

で定義することができる。ここで

$$\smile: H^0(A,R^1\kappa_*\mathbb{C}\otimes\mathcal{O}^1_A)\times H^0(A,R^1\kappa_*\mathbb{C}\otimes\mathcal{O}^1_A)\to H^0(A,R^2\kappa_*\mathbb{C}\otimes\mathcal{O}^1_A)\cong H^0(A,\mathcal{O}^1_A)$$

が cup 積であり、

$$\partial: H^0(A,R^1\kappa_*\mathbb{C}\otimes\mathcal{O}^1_A)\to H^0(A,R^1\kappa_*\mathbb{C}\otimes\mathcal{O}^1_A)$$

が Gauss-Manin 接続である。

κ の任意のセクション $\mathfrak{s}$ に対して $\mu(\mathfrak{s})=\tilde{\mu}(c(\mathcal{O}_{\tilde{E}}(\mathfrak{s}-\mathfrak{o})))$ であることを論文の §3 で証明した。

写像 $\tilde{\mu}$ の像

Algebraic de Rham cohomology を使って、$H^1(\widetilde{E},\Omega^1_{\widetilde{E}})$ の生成元を明示的に計算し、上の定義にたどって $\tilde{\mu}$ の像を計算した。$\tilde{\mu}$ の像は多項式で $\beta+\gamma\Lambda^2, \beta\in B, \gamma\in\mathbb{C}[t], \deg\gamma\le\deg\Delta-\deg\Lambda-2$ の形で書ける。$\deg\mu(\mathfrak{s})$ と $\deg r$ の間に関係あるので、$\deg\tilde{\mu}$ に対する評価は $\deg r$ の評価となり、一定次数以下の多項式たちの $\mathbb{C}$-ベクトル空間としての次元に対する評価は E_i のランクに対する評価となる。このように主定理は証明される。

Algebraic de Rham cohomology の計算

$\mathbb{C}$ 上の非特異代数多様体 X の algebraic de Rham cohomology は二重複体

$$C^{\cdot}(X,\Omega^0_X)\xrightarrow{d}C^{\cdot}(X,\Omega^1_X)\to\ldots\to C^{\cdot}(X,\Omega^i_X)\to\ldots$$

のコホモロジーである。ここで $C^{\cdot}(X,\Omega^i_X)$ は Čech 複体である。

これを計算するために、任意の射影多様体上の coherent sheaf $\mathcal{F}$ に対して Čech cohomology を計算する機構を開発した。その方法は自由分解 $\mathcal{F}\leftarrow\mathfrak{F}.$：

$$0\leftarrow\mathcal{F}\leftarrow\bigoplus_i\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(-n_i)\leftarrow\cdots\leftarrow\bigoplus_j\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(-n_j)\leftarrow 0$$

をとって二重複体

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^r(\mathbf{P}^r,\mathfrak{F}_0) & \longleftarrow & \ldots & \longleftarrow & H^r(\mathbf{P}^r,\mathfrak{F}_r)\\
 & & \uparrow & & & & \uparrow\\
C^r(\mathfrak{U},\mathcal{F}) & \longleftarrow & C^r(\mathfrak{U},\mathfrak{F}_0) & \longleftarrow & \ldots & \longleftarrow & C^r(\mathfrak{U},\mathfrak{F}_r)\\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow\\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots\\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow\\
C^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) & \longleftarrow & C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F}_0) & \longleftarrow & \ldots & \longleftarrow & C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F}_r)
\end{array}$$

を考えるものである。

$n\ge 1$ なる n に対して $H^i(\mathbf{P}^r,\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(-n))=0\ (0\le i\le r-1)$ であり、$H^r(\mathbf{P}^r,\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(-n))$ の基底は $\{X_0^{l_0}\cdots X_r^{l_r}|l_i\le -1,\sum l_i=-n\}$ と明示的に書ける。上の二重複体は同型 $H^i(X,\mathcal{F})\cong h_{r-i}(H^r(\mathbf{P}^r,\mathfrak{F}.))$ を与えてくれるもので、この二重複体を使って自動的に diagram chasing をし、Čech cohomology を計算してくれるプログラムを `Singular` を使って作成した。本論文の結果は、このコンピューター・プログラムの計算によるところが大きい。

以上