論文の内容の要旨

1. 論文題目: Two-dimensional stochastic Navier-Stokes equations derived from a certain variational problem
(ある変分問題から導かれる二次元確率ナビエ・ストークス方程式)

2. 氏名: 横山　聡 (Yokoyama Satoshi)

オイラー方程式は粘性係数が0である流体の運動を記述する偏微分方程式として知られている。この方程式は、以下のような変分原理から導くことも可能である。$\mathbb{R}^n$ 上の体積を保存する微分同相写像に値を取る関数 $\Phi(t)$, $t \in [0,1]$ に関し、次のような汎関数 (action functional), J:

$$J(\Phi) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |\frac{\partial \Phi_j(t,x)}{\partial t}|^2 dx\, dt,$$

を考える。この汎関数 J の条件 $\Phi(0) = \Psi^0$ かつ $\Phi(1) = \Psi^1$ の下での下限を与える Φ を求める変分問題を考える時、その停留点 $\tilde{\Phi}(t)$ に対して、速度場 (velocity field) $u(t)$ を $u(t) := \dfrac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial t}$ で定義すれば、u がオイラー方程式を満たすことは V.I. Arnold ([1]) の結果としてよく知られている。一方、$\Phi(t)$ に、ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された n 次元ブラウン運動 $B(t,\omega) = (B^1(t,\omega), \cdots, B^n(t,\omega))$ の効果 $\sqrt{2\mu}B(t,\omega)$, $\mu > 0$ を付加した時の対応するランダムな変分問題については Inoue, Funaki ([2]) で議論された。[2] では、そのランダムな臨界点 $\bar{\Phi}(t,x,\omega)$ から与えられるランダムな速度場 $u(t,x,\omega)$ は、非粘性ではなく粘性を持ったあるランダムな方程式を満たすと考えられ、実際、形式的には次のような確率ナビエ・ストークス方程式を満足すると述べている。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^i}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^n \left(u^j \frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \sqrt{2\mu} \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \dot{B}_t^j \right) - \mu \Delta u^i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \cdots, n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

初期値 u_0 がランダムでないベクトル場で、かつ、$\mathbf{W}^{1,2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$-値であるような確率ナビエ・ストークス方程式 (1) の初期値問題に対して、弱解 $u(t,x,\omega)$ が存在すると仮定すれば、$u(t,x,\omega)$ の平均値 $\langle u \rangle(t,x) = \displaystyle\int_\Omega u(t,x,\omega) P(d\omega)$ が次のようなレイノルズ (Reynolds) 方程式 (2) を満たすことは、平均の線型性と確率積分のマルチンゲール性に注意すれば容易に確かめられる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} - \mu \triangle \langle u \rangle + (\langle u \rangle \cdot \nabla) \langle u \rangle + \nabla p = -\langle ((u - \langle u \rangle) \cdot \nabla)(u - \langle u \rangle) \rangle, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \operatorname{div} \langle u \rangle = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2}$$

しかしながら、(1) の弱解の存在については [2] で議論されていない。しかも方程式 (1) の特徴は、確率ナビエ・ストークス方程式の弱解の構成時に通常必要とされる強圧的条件 (coercivity condition) を満たしていないため、このタイプの方程式の弱解の存在についてはこれまでのところ知られていない。強圧的条件を満たす場合の弱解の存在については Flandoli, Gatarek([3]) の結果などよく知られている。本論文では強圧的条件が満たされていない (1) の弱解の構成を試みる。強圧的条件を満たさない３次元以上の場合は弱解の構成は難しい。しかしながら、２次元の周期境界条件、および、２次元全空間の場合には弱解が存在することを示す。弱解の一意性に関しては本論文では扱わない。本論文の構成は以下の通りである。

1. 第１章は序文である。
2. 第２章は２次元周期境界条件の場合の (1) の弱解の存在を証明する。
3. 第３章は Wilhelm Stannat 氏との共同研究であり、２次元全空間 $\mathbb{R}^2$ の場合の (1) を考察し、その弱解が存在することを示す。

1　２次元トーラス上の確率ナビエ・ストークス方程式の弱解の構成

２次元トーラス $\mathbb{T}^2$ において (1) の弱解を構成する。Hilbert 空間 $\mathbf{H}$ を

$$\mathbf{H} = \{u \in L^2(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}^2) | \int_{\mathbb{T}^2} u(x)dx = 0,\ \mathrm{div}\ u = 0\},$$

、Sobolev 空間 $\mathbf{V}$ を $\mathbf{V} = \mathbf{W}^{1,2}(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}^2) \cap \mathbf{H}$ と定義する。解の定義は、弱解、すなわち、適当な関数空間の試験関数との積分で表された weak form として定義され、かつ、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とその上に定義された $u(t)$ およびブラウン運動 $B(t)$ を求めることとする。主定理を述べる。

定理 1.1. 初期値 u_0 が $\mathbf{V}$ に属していれば、*(1)* の弱解が存在する。

証明は次のような４段階で進められる。

- 第１段階. Galerkin 近似による有限次元確率微分方程式の解の存在、一意性の証明
- 第２段階. アプリオリ評価の実施
- 第３段階. 確率分布の tightness の証明
- 第４段階. 極限以降による解の構築

２次元周期境界条件と限らない場合の方程式 (1) は強圧的条件を満足しない。そこで、粘性係数 μ を $\frac{2+\delta}{2}\mu, \delta > 0$ とした同条件を満たす修正された方程式を考えれば、第２段階で伊藤の公式により、$\delta > 0$ に関する $L^2(\Omega, L^2(0,T;\mathbf{H}))$ の一様評価のみ得ることができる。従って $L^2(\Omega, L^2(0,T;\mathbf{H}))$ における強収束部分列の存在を期待することはできず、第４段階で移流項 (convection term) の収束を論じるには上述の一様評価では弱すぎる。しかしながら、２次元周期境界条件の場合は、$\delta > 0$ に関して $L^2(\Omega, L^2(0,T;\mathbf{V}))$ での一様評価を得ることができ、その結果、解を構成することが可能である。

2　$\mathbb{R}^2$ 上の強圧的でない確率ナビエ・ストークス方程式の弱解

本章では、(1) を全空間 $\mathbb{R}^2$ で考える。弱解の定義は２次元周期境界条件の場合とほぼ同様であるが、試験関数のクラスは、発散ゼロであり、かつ、$\mathbb{R}^2$ 上での積分が 0 であるコンパクトな台をもつ $\mathbf{C}^\infty$ 級ベクトル場全体と定義する。ここで積分が 0 の条件は、弱解を構成する手法で必要とされるものである。理由は、周期 $2l, (l \in \mathbb{N})$ の周期境界条件をもつ方程式の弱解を考え、周期解に関する評価から $\mathbb{R}^2$ 全空間での弱解を構成する手法を取っているためである。Hilbert 空間 $\mathbf{H}(\mathbb{R}^2)$ を、

$$\mathbf{H}(\mathbb{R}^2) = \left\{ u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) |\ \mathrm{div}\ u = 0, \int_{\mathbb{R}} u dx = 0 \right\},$$

Sobolev 空間 $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2)$ を $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2) = \mathbf{W}^{1,2}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) \cap \mathbf{H}(\mathbb{R}^2)$ と定義する。主定理を述べる。

定理 2.1. 初期値 u_0 がコンパクトな台をもち、かつ $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2)$ に属していれば、*(1)* の弱解が存在する。

証明の手順は、定理 1.1 の方針に基本的に従うが、領域が $\mathbb{R}^2$ 全体でコンパクトでないため工夫を要する。周期 $2l,\ l \in \mathbb{N}$ の周期境界条件を持つ方程式の弱解を考える。さらに、半径 $R \in \mathbb{N}$ の球 $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2 | |x| \le R\}$ 上では 1、B_{2R} の外側では恒等的に 0 となる $[0,1]$-値 $\mathbf{C}^\infty$-級 cutoff 関数 χ_R を上述の弱解に作用させる。２次元周期境界条件の場合の手法を利用することで、cutoff された弱解の $L^2(\Omega; L^2(0,T;\mathbf{V}(\mathbb{R}^2)))$ ノルムの２乗が、初期値 u_0 の $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2)$ ノルムの２乗で上から評価できる。我々の目的とする弱解は、l および R の極限を取り構成できる。

References

[1] Arnold, V.I., Sur la géometrié différentielle des groupes de lie de dimension infinie et ses applications a l'hidrodynamique des fluides parfaits, Ann. Inst. Fourier **16** (1966), 316–361.

[2] Inoue, A., Funaki, T., On a new derivation of the Navier-Stokes equation, Comm. Math. Phys. **65** (1979), 83–90.

[3] Flandoli, F., Gatarek, D., Martingale and stationary solutions for stochastic Navier-Stokes equations, Probab. Theory Related Fields **102** (1995), 367–391.