# 論文の内容の要旨

## 論文題目

Analytic semigroup approach to higher order quasilinear parabolic problems

（副題　解析半群論の高階準線形放物型方程式への応用）

氏名　　浅井　智朗

本論文では材料科学の分野、結晶成長の分野から要請された重要な4階の準線形放物型方程式に対して、その解の存在と一意性について特に初期値の滑らかさが少ない場合や、境界値との整合性のない問題に対して、抽象論である解析半群論を応用させてその解の一意存在を示した。具体的には本論文は以下の3つのテーマから構成されている。

(1) 4階曲率流方程式の滑らかでない初期値に対する時間局所可解性,

(2) 最大正則性理論の4階準線形放物型方程式への応用,

(3) 4階非整合初期値問題の自己相似解の存在.

[第一章・4階の曲率流方程式の時間局所可解性]

本章では一次元の表面拡散流方程式とWillmore流方程式の滑らかでない初期曲線に対する解曲線の一意存在について論じた。これらの方程式は変分構造を持つ幾何学的方程式である。表面拡散流方程式は表面積を表す汎関数の$H^{-1}$-勾配流として表される。一方、Willmore流方程式は平均曲率の$L^2$-積分の$L^2$-勾配流として特徴付けられる。歴史的には、表面拡散流方程式は材料科学の分野からモデル化された方程式で、Willmore流方程式は幾何学の分野から要請された方程式である。これら二つの方程式は4階の準線形放物型方程式として表される。

これらの方程式に対する基本的な問いとして、与えられた初期曲線に対して方程式をみたす解が一意に存在するか？という問題がある。この方面での先行研究では、初期曲面に$h^{2+\alpha}$という正則性の仮定を課して解を得ている。本章の研究目的は、この初期曲面に対する正則性の仮定を緩めることである。具体的に述べると、$h^{1+\alpha}$という曲率が不連続であるような初期曲線に対して方程式をみたす解の一意存在を示すことである。この拡張は自然である。なぜなら、方程式の主要部には未知関数の一階微分しか含まれていないからである。このために、抽象準線形放物型方程式を考え、解析半群論を背景に抽象的な一般定理を作り、その抽象定理を応用することで、表面拡散流方程式とWillmore流方程式の解の一意存在を示した。抽象定理では、表面拡散流方程式とWillmore流方程式の方程式の主要部と低階項の構造を反映させた評価の仮定をおいた。

証明のポイントは、低階項（3階以下の非線形項）に対する評価である。先行研究では、低階項への分類の仕方が適切でなかったため、$h^{2+\alpha}$ という強い正則性の仮定を課さざるをえなかった。4階曲率流の低階項に対する精密な評価を構築したものは本章の研究がはじめてである。したがって、本章の研究は先行研究を改良した新しい結果である、と言える。

[第二章・最大正則性とその応用]

第一章では、一次元の曲線の場合の表面拡散流方程式および Willmore 流方程式しか扱わなかった。用いた解析半群論も初等的なものであった。さらに、第一章で考えている方程式は元の方程式の微分形であった。そのために、高次元への問題に適用することが難しかった。しかし、第一章の研究を終えたのち、解析半群論の最大正則性定理を用いると、一般の $n$ 次元の超曲面の場合に結果を拡張することができそうである、と予想された。最大正則性定理とは、線形方程式 $\partial_t u + Au = f$ に対し、解 $u$ の時間微分 $\partial_t u$ と空間微分 $Au$ が外力項 $f$ と同じだけの正則性を有する、と主張するものである。最大正則性定理は非線形問題への応用に関して有用である。

一般に連続関数の空間は最大正則性をみたさない。しかし、他の多くの関数空間は最大正則性をみたす。最大正則性定理といっても様々なタイプのものがあるが、本章で用いる最大正則性定理は、連続補間空間（continuous interpolation space）を用いた連続最大正則性定理（continuous maximal regularity）である。ただし、扱う方程式は準線形であるので、第一章と同様に準線形方程式に対する一般的な抽象定理を作り、その抽象定理を応用する、という手法をとった。方程式の主要部に対する仮定は第一章と同じである。異なる点は非線形項に対する仮定である。第一章では、方程式の非線形項に対する仮定がかなり複雑なものになってしまった。本章では、最大正則性定理をうまく用いることにより、非線形項に対する仮定を洗練化して、よりきれいな形にすることが可能になった。この低階項に対する仮定は具体的な4階方程式に応用する際に、適用可能な形に反映させたものである。証明のテクニックは縮小写像による不動点の構成である。証明においては特に非線形項に対する評価が難しいので、それを注意深く行った。このことにより、扱える方程式の幅が広がり、$n$ 次元表面拡散流方程式、Willmore 流方程式、異方性のある表面拡散流方程式、結晶の微小構造の極限として得られる結晶成長方程式も扱うことが可能となった。

[第三章・非整合初期値問題と自己相似解]

本章では、境界条件付きの一次元表面拡散流方程式の自己相似解の存在問題について考察する。自己相似解とは、空間変数と時間変数についてある種のスケール変換に関して不変な解のことである。本章では上記の問題の自己相似解の一意存在を示す。

考えている問題をよりくわしく具体的に述べていこう。この問題は材料科学において粒界における表面の溝の形成という現象からモデル化された方程式である。一次元の半直線上（$x > 0$）で表面拡散流方程式を考える。原点 $x = 0$ で境界条件を二つ課す。すなわち、接触角条件（contact angle condition）と流入・流出ゼロ条件（no flux condition）である。ただし、本章では二つ目の境界条件を線形近似した問題を考えている。その条件

のもとで、表面拡散流方程式に対する自己相似解を接触角が小さいという条件のもとで構成した。初期条件が境界条件をみたさないという意味で初期値が非整合の問題である。そこを解決することが大きな課題である。ここでは、接触角が十分小さいという条件を課した（「接触角が十分小さい」という条件を外すことができるかどうかは現在のところ不明である)。この方面の先行研究では、線形化方程式（しかも境界条件も線形近似したもの）の場合についてはいくつか結果がある。しかし、非線形問題は4階であるためまったく結果はなかった。

次に証明の手法について具体的に述べていこう。まず、元の問題である準線形方程式の解を線形方程式の解からのズレとして考察することにした。そして、そのずらした未知関数に関して方程式を新たに書き下すことにした。こうすることにより、もとの方程式では二つの境界条件が非斉次だったものが、ずらした未知関数の方程式の場合では境界条件を斉次にすることが可能となった。境界条件が斉次となったことにより、解析半群論を応用することが可能となった。

証明のアイデアは方程式の主要部を線形化し、残りの項を摂動項とみなして、一つにまとめ、初期値ゼロの積分公式で解を表示し、ノルムの評価を実行することである。ポイントは摂動項の評価である。ここで問題なのは基礎空間の取り方である。例えば、$L^p$ 空間と Sobolev 空間を用いると、この二つの空間を実補間した空間は Besov 空間になる。摂動項を Besov ノルムで評価しなければならなくなる。その際に、非斉次 Besov ノルムに対する Hölder 型の不等式が必要になる。しかし、この問題の場合、斉次な関数を扱っているため、Besov 空間の指数にズレが出てしまい、$L^p$ 型の Besov 空間を用いる方法では困難であることがわかった。そこで基礎空間として $L^\infty$ 空間と Hölder 空間を用いることとし、積の Hölder セミノルムを Hölder セミノルムと $L^\infty$ ノルムを用いて忠実に評価した。「接触角が十分小さい」という条件から線形方程式の解の種々のノルムが十分小さいという性質を導くことができ、そのおかげで解のノルムの評価をうまく作ることができる。また、初期値が非整合の問題であるため、摂動項は $x=0$ でゼロにならない。そこで、摂動項を定数分だけずらした方程式を考え、Hölder ノルムの評価の妥当性を与えた。