論文の内容の要旨

論文題目

Quasi-morphisms on the group of area-preserving diffeomorphisms of the 2-disk
(2 次元円板の面積保存微分同相群上の擬準同型)

氏名 石田智彦

$\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2)$ を，2 次元円板 D^2 の面積要素と向きを保存して，境界のある近傍で恒等写像になっているような C^∞ 級微分同相写像全体のなす群とする．本論文では，$\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2)$ 上の擬準同型について調べた．

群 G 上の関数 $\phi\colon G \to \mathbb{R}$ が擬準同型写像であるとは，$G \times G$ 上で

$$\phi(gh) - \phi(g) - \phi(h)$$

の値が一様に有界であることを言う．更に，擬準同型写像 $\phi \in$ が任意の $p \in \mathbb{Z}$ と $g \in G$ に対して

$$\phi(g^p) = p\phi(g)$$

を満たすとき，ϕ は homogeneous であると言う．群 G 上の homogeneous な擬準同型写像全体のなすベクトル空間を $Q(G)$ と書く．homogeneous な擬準同型写像は群 G 上の共役不変量であることが定義だけから確認できる．このことは $Q(G)$ を調べる動機の 1 つである．

$Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2))$ 上の擬準同型について，Gambaudo-Ghys によって次のことが知られている．

定理 1 (Theorem 1.1.). ベクトル空間 $Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2))$ は無限次元である．

定理 1 を証明するにあたって, Gambaudo と Ghys は $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2)$ 上の一次独立な擬準同型を加算個構成した．D^2 の n 次の pure braid 群 $P_n(D^2)$ 上の擬準同型から $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2)$

上の擬準同型を作る彼らの構成を一般化して，準同型写像

$$\Gamma_n\colon Q(P_n(D^2)) \to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2))$$

が定義できる．

この写像 Γ_n について調べた結果，より強い以下の定理を得た．

定理 2 (Theorem 1.2.). 合成写像

$$\Gamma_n \circ Q(i)\colon Q(B_n(D^2)) \to Q(P_n(D^2)) \to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2))$$

は単射である．

ここで $B_n(D^2)$ は D^2 の n 次の braid 群，$Q(i)\colon Q(B_n(D^2)) \to Q(P_n(D^2))$ は自然な包含写像 $i\colon P_n(D^2) \to B_n(D^2)$ の誘導する準同型写像 ($Q(P_n(D^2))$ への制限) である．

また，$\Gamma_n\colon Q(P_n(D^2)) \to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2))$ は，$Q(P_n(D^2))$ 上の $\mathbb{R}$ への準同型写像を $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2)$ 上の $\mathbb{R}$ への準同型写像にうつすことも分かる．よって次の命題も従う．

命題 3 (Proposition 3.3.). 合成写像 $\Gamma_n \circ Q(i)\colon Q(B_n(D^2)) \to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2))$ から誘導される商ベクトル空間の準同型写像

$$Q(B_n(D^2))/H^1(B_n(D^2);\mathbb{R}) \to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2))/H^1(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2);\mathbb{R})$$

は単射である．

また，準同型写像 $\Gamma_n\colon Q(P_n(D^2)) \to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2))$ と同様に，球面 S^2 の pure braid 群 $P_n(S^2)$ と球面の C^∞-級面積保存微分同相群の単位成分 $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(S^2)_0$ の間でも準同型写像

$$\Gamma_n\colon Q(P_n(S^2)) \to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(S^2)_0)$$

が構成でき, 定理 2 と同様の定理が成立する．つまり，次の定理が成り立つ．

定理 4 (Theorem 3.4.). 合成写像

$$\Gamma_n \circ Q(i)\colon Q(B_n(S^2)) \to Q(P_n(S^2)) \to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(S^2)_0)$$

は単射である．

ここで $B_n(S^2)$ は S^2 の n 次の braid 群，$Q(i)\colon Q(B_n(S^2)) \to Q(P_n(S^2))$ は自然な包含写像 $i\colon P_n(S^2) \to B_n(S^2)$ の誘導する準同型写像 ($Q(P_n(S^2))$ への制限) である．

さて，定理 2 にあるように，合成写像 $\Gamma_n \circ Q(i)\colon Q(B_n(D^2)) \to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2))$ は単射だが，$\Gamma_n\colon Q(P_n(D^2)) \to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2))$ それ自体は単射では無い．そこで，$\Gamma_n\colon Q(P_n(D^2)) \to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2, \partial D^2))$ の核を調べるために，群 G とその有限指数部分群 H に対して，群のコホモロジーにおいて定義される transfer 写像

$$\mathcal{T}\colon H^*(H) \to H^*(G)$$

の擬準同型への拡張

$$\mathcal{T}\colon Q(H)\to Q(G)$$

を定義した．擬準同型の transfer 写像も，群コホモロジーの transfer 写像と同様，

$$\mathcal{T}\circ Q(i)=\mathrm{id}\colon Q(G)\to Q(G)$$

を満たす．ここで，$Q(i)\colon Q(G)\to Q(H)$ は自然な包含写像 $i\colon H\to G$ の誘導する準同型写像 ($Q(H)$ への制限) である．$G=B_n(D^2)$, $H=P_n(D^2)$ としたとき，この transfer 写像について次が成り立つ．

命題 5 (Proposition 4.6.). 合成写像

$$\Gamma_n\circ Q(i)\circ\mathcal{T}\colon Q(P_n(D^2))\to Q(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2,\partial D^2))$$

は Γ_n と一致する．特に，$\mathrm{Ker}(\Gamma_n)=\mathrm{Ker}(\mathcal{T})$，$\mathrm{Im}(\Gamma_n)=\mathrm{Im}(\Gamma_n\circ Q(i))$ である．

$G=B_n(S^2)$, $H=P_n(S^2)$ についても，命題 5 と同様の主張が成り立つ．

また，完全群 G 上の擬準同型と G の元 g の安定交換子長 $\mathrm{scl}(g)$ について，次の Bavard の双対定理と呼ばれる定理が知られている．

定理 6 (Theorem 5.1.). 任意の $g\in G$ に対して，

$$\mathrm{scl}(g)=\sup_{\phi\in Q(G)}\frac{|\phi(g)|}{2D(\phi)}$$

が成り立つ．

そこで，Gambaudo-Ghys の構成から得られる擬準同型を利用して，$\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2,\partial D^2)$ の交換子群および $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(S^2)_0$ の一部の元について，安定交換子長の下限の計算例を作った．まず，D^2 を $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2\leq 1\}$$

と同一視しておく．$\omega\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ を C^∞-関数で，1 の近傍では 0 であり，1 の近傍では定数関数であるようなものとする．各 $x\in D^2$ を 0 の周りに角 $\omega(|x|)$ だけ回転させる写像として D^2 の面積保存微分同相写像 $F_\omega\in\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2,\partial D^2)$ を定義する．$a(r)$ を D^2 の半径 r 以下の部分の面積とするとき，次の命題が従う．

命題 7 (Proposition 5.3.). $F_\omega\in\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2,\partial D^2)$ が $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2,\partial D^2)$ の交換子群に含まれるための必要十分条件は，

$$\int_0^1\omega(r)a(r)da(r)=0$$

であることである．

命題 8 (Proposition 5.5.). F_ω が $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2,\partial D^2)$ の交換子群に含まれているとする．このとき，

$$\mathrm{scl}(F_\omega)\geq\frac{3}{4\mathrm{area}(D^2)}\left|\int_0^1\omega(r)a(r)^2da(r)\right|.$$

が成り立つ．特に，$\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2,\partial D^2)$ 上の安定交換子長は非有界である．

また，S^2 を $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ と同一視し，$\omega\colon[0,\infty]\to\mathbb{R}$ を 0 の近傍とあるコンパクト集合の外では定数写像であるような C^∞-関数とする．各 $z\in S^2$ を 0 の周りに $\omega(|z|)$ だけ回転させる写像として S^2 の面積保存微分同相写像 $F_\omega\in\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2,\partial D^2)$ を定義する．$a(r)$ を S^2 の半径 r 以下の部分の面積とするとき，次の命題が従う．

命題 9 (Proposition 5.7.). 任意の $F_\omega\in\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(S^2)_0$ に対して，

$$\mathrm{scl}(F_\omega)\geq\frac{1}{\mathrm{area}(S^2)}\left|\int_0^\infty\omega(r)a(r)(1-a(r))(1-2a(r))da(r)\right|$$

が成り立つ．

Gambaudo-Ghys によって構成された擬準同型たちの他に，$\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(D^2,\partial D^2)$ 上の擬準同型として知られているものは，古典的な Ruell の擬準同型 R の他，Entov-Polterovich によって非可算個構成された擬準同型の族 $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon\in(\frac{1}{2},1)}$ がある．これらの擬準同型について，次の命題を得た．

命題 10 (Proposition 6.5.). $n\geq3$ とする．V を $Q(B_n(D^2))$ の一次独立な擬準同型から成る有限集合，$I\subset(\frac{1}{2},1)$ を有限部分集合とする．このとき，$\{\Gamma_n(\phi)\}_{\phi\in V}$, $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon\in I}$, R は一次独立である．