# 論文の内容の要旨

論文題目

Lie foliations transversely modeled on nilpotent Lie algebras

(ベキ零リー環を横断構造に持つリー葉層構造について)

氏　名　　加藤　直樹

---

$M$ を向き付けられた閉多様体, $\mathcal{F}$ を $M$ 上の横断的に向き付け可能な余次元 $q$ 葉層構造, $l(M,\mathcal{F})$ を $(M,\mathcal{F})$ の横断的ベクトル場全体のなすリー環とする. $M$ 上の各点で線形独立な $\mathcal{F}$ の横断的ベクトル場 $\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_q$ が存在するとき, $\mathcal{F}$ を横断的に平行化可能であるという. 更に, $\{\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_q\}$ により $\mathbb{R}$ 上張られる $l(M,\mathcal{F})$ の線形部分空間 $\langle\bar{X}_1,\ldots\bar{X}_q\rangle_{\mathbb{R}}$ が $l(M,\mathcal{F})$ の部分リー環でかつ $\mathfrak{g}$ と同型であるとき, $\mathcal{F}$ をリー $\mathfrak{g}$-葉層構造という. Molino の構造定理により, リー $\mathfrak{g}$-葉層構造に対して構造リー環と呼ばれる $\mathfrak{g}$ の部分リー環 $\mathfrak{h}$ が定まる.

本論分ではこの問題の逆, すなわちリー環 $\mathfrak{g}$ とその部分リー環 $\mathfrak{h}$ が与えられたとき $\mathfrak{h}$ を構造リー環とするリー $\mathfrak{g}$-葉層構造が存在するかという問題について考察をする. リー環 $\mathfrak{g}$ とその部分リー環 $\mathfrak{h}$ に対して, 閉多様体 $M$ とその上のリー $\mathfrak{g}$-葉層構造で構造リー環が $\mathfrak{h}$ であるものが存在するとき, $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を実現可能であるという.

$\mathcal{F}$ が flow すなわち 1 次元葉層構造の場合には, Carrière の定理により構造リー環 $\mathfrak{h}$ は可換になる. そこでリー環 $\mathfrak{g}$ と整数 $m$ に対して, 閉多様体 $M$ とその上の 1 次元リー $\mathfrak{g}$-葉層構造で構造リー環が $m$ 次元 (すなわち $\mathbb{R}^m$) であるものが存在するとき, $(\mathfrak{g},m)$ を実現可能であると定義する. $(\mathfrak{g},m)$ がいつ実現可能かという問題は, $\mathfrak{g}$ が 3 次元の場合には Gallego と Herrera と Llabrés と Reventós によりその必要十分条件が完全に決定された.

本論文ではこの二つの実現問題, すなわち $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ がいつ実現可能かという問題と $(\mathfrak{g}, m)$ がいつ実現可能かという問題について $\mathfrak{g}$ がベキ零リー環の場合に考察をする.

主定理は以下の二つである.

**定理** $\mathfrak{g}$ を有理構造を持つベキ零リー環とする. このとき, $(\mathfrak{g}, m)$ が実現可能であるための必要十分条件は $m \leq \dim \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ である. ここで $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の中心.

**定理** $\mathfrak{g}$ をベキ零リー環, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の部分リー環とする. このとき, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が実現可能であるための必要十分条件は $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであり $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ が有理構造を持つことである.

第一章は導入である. 第二章では本論文に必要な葉層構造に関するいくつかの定義及び性質について述べる. リー葉層構造や実現可能であることの定義はこの章で述べる. また第四章及び第五章で必要となる葉層構造に関するいくつかの結果についても述べる.

第三章では本論文に必要なベキ零リー環及びベキ零リー群に関するいくつかの定義及び性質について述べる. また単連結ベキ零リー群及びベキ零リー環に関する Mal'cev の結果について紹介をする.

第四章では一つ目の主定理を証明する. またこの章では Chao により構成された有理構造を持たないリー環の例について紹介する. その例が, 1 次元リー葉層構造として実現ができない有理構造を持たないベキ零リー環の例になっていることを示す.

第五章では二つ目の主定理を証明する. また主定理の系として, 有理構造を持たないベキ零リー環 $\mathfrak{g}$ である $m$ に対して $(\mathfrak{g}, m)$ が実現可能となるものが存在することを示す.