論文の内容の要旨

p-進数体上のモチフィックホモロジーと類体論
Motivic Homology and Class Field Theory over p-adic Fields

Uzun Mecit Kerem

本論文の目的は、p-進体k上の（必ずしもプロパーとは限らない）スムーズな多様体Uの基本群のアーベル化を、Uにk上良い還元をもつスムーズなコンパクト化が存在する場合に記述することである。プロパーな場合に用いられた群 SK_1は、モチフィックホモロジーにおきかえる。

先ずUがk上スムーズな多様体である場合, Ivorra [4]のℓ-進実現を用いてモチフィックホモロジーからコンパクト台つきエタールコホモロジーへの射

$$c^{i,j}_{U,n} : H^M_i(U, \mathbb{Z}/n(j)) \to H^{2d-i}_{\acute{e}t,c}(U, \mathbb{Z}/n(d-j)).$$

を構成する。

主に、$c^{-1,-1}_{X,n}$を調べたい。このとき、ターゲットはPoincaré双対性によって$\pi_1^{ab}(U)/n$と同一視され、ソースはX上の点と曲線から定まるあるデータを用いて記述できる [5]。Yamazaki [5]の結果によれば、この後者がSK_1のプロパーでない場合におけるよい代替のひとつである。この$c^{-1,-1}_{X,n}$を使って、相互写像を構成することができる。この相互写像の核と余核を調べることが本論文の目的である。Katoホモロジーの消滅に関するいくつかの結果 [1–3]を用いて次の定理を証明する。

主定理. kが$\mathbb{Q}_p$の有限状拡大であり、Uがk上のスムーズなd次元多様体であるとする。また、Uはあるスムーズでk上に良い還元をもつ射影多様体Xの開部分多様体となっていると仮定する。このとき、各自然数$n>0$に対して

$$c^{-1,-1}_{U,n} : H^M_{-1}(U, \mathbb{Z}/n(-1)) \xrightarrow{\cong} H^{2d+1}_{\acute{e}t,c}(U, \mathbb{Z}/n(d+1)).$$

は標準的な同型を与える。

参考論文

[1] U. Jannsen and S. Saito, *Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields.* http://arxiv.org/abs/0910.2815.

[2] U. Jannsen and S. Saito, *Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory over local fields.* Documenta Math. Extra Volume: Kazuya Kato's Fiftieth Birthday, 2003.

[3] M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic schemes.* Publ. Math. IHES 115, 2012.

[4] F. Ivorra, *Réalisation ℓ-adique des motifs triangulés géométriques I.* Doc. Math. 12, 2007.

[5] T. Yamazaki, *Brauer-Manin pairing, class field theory and motivic homology.* http://arxiv.org/pdf/1009.4026.

p-進数体上のモチフィックホモロジーと類体論
Motivic Homology and Class Field Theory over p-adic Fields

Uzun Mecit Kerem

Abstract

The main goal of this paper is to give a description of the abelian étale fundamental group of a smooth (not necessarily proper) variety U over a p-adic field k in case U has a smooth compactification that has a good reduction over k. The group SK_1 in the proper case is replaced with the motivic homology.

For any smooth variety U over k, we construct maps

$$c_{U,n}^{i,j} : H_i^M(U, \mathbb{Z}/n(j)) \to H_{\acute{e}t,c}^{2d-i}(U, \mathbb{Z}/n(d-j)).$$

between motivic homology and étale cohomolgy with compact supports using Ivorra's ℓ-adic realization [4]. We are mainly interested in the map $c_{X,n}^{-1,-1}$ where the target is identified with the group $\pi_1^{ab}(U)/n$ by Poincaré duality and the right hand side has a description by the data attached to the points and curves on X [5]. The latter group is a possible candidate for the replacement of SK_1 in the non-proper case by the work of Yamazaki [5]. Using the map $c_{X,n}^{-1,-1}$ one can define a reciprocity map. We are interested in the kernel and cokernel of this map. Certain results on the vanishing of the Kato homology [1–3] allows us to prove the following result

Main Theorem. *Let U be a smooth variety of dimension d over a finite extension k of $\mathbb{Q}_p$. Assume there exists X such that U is an open variety of X and X is projective, smooth and has good reduction over k. Then for all $n > 0$, we have a natural isomorphism*

$$c_{U,n}^{-1,-1} : H_{-1}^M(U, \mathbb{Z}/n(-1)) \xrightarrow{\cong} H_{\acute{e}t,c}^{2d+1}(U, \mathbb{Z}/n(d+1)).$$

References

[1] U. Jannsen and S. Saito, *Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields.* http://arxiv.org/abs/0910.2815.

[2] U. Jannsen and S. Saito, *Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory over local fields.* Documenta Math. Extra Volume: Kazuya Kato's Fiftieth Birthday, 2003.

[3] M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic schemes.* Publ. Math. IHES 115, 2012.

[4] F. Ivorra, *Réalisation ℓ-adique des motifs triangulés géométriques I.* Doc. Math. 12, 2007.

[5] T. Yamazaki, *Brauer-Manin pairing, class field theory and motivic homology.* http://arxiv.org/pdf/1009.4026.