論文の内容の要旨

論文題目　Discrete branching laws of Zuckerman's derived functor modules
(Zuckerman 導来関手加群の離散的分岐則)

氏名　　大島 芳樹

本論文の目的は，Zuckerman 導来関手加群 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ を対称対に関して制限したときの分岐則を求めることである．

表現の分岐則の問題とは，既約表現を部分群に制限したときにどのように分解するかを問うものである．この論文では $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の分岐則を扱うが，まず問題の背景である簡約群のユニタリ表現の分岐則について述べる．G_0 を実簡約リー群とし，G_0' をその部分簡約リー群とする．任意の(一般に無限次元の)実簡約リー群のユニタリ表現は，既約ユニタリ表現の直積分で一意的に表せることが知られているため，特に G_0 のユニタリ表現の G_0' への制限も G_0' の既約ユニタリ表現の直積分に分解する：

$$\pi|_{G_0'} \simeq \int_{\sigma \in \widehat{G_0'}} m(\sigma) \cdot \sigma \, \mathrm{d}\mu(\sigma), \quad m(\sigma) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \tag{1}$$

ここで $\widehat{G_0'}$ は G_0' の既約ユニタリ表現の同値類全体で $m(\sigma)$ は重複度関数である．いま G_0 の対合 σ があって G_0' が σ による固定部分群 $(G_0)^\sigma$ の開部分群であるような場合を考える．このような組 (G_0, G_0') は対称対とよばれる．対称対の場合においても，G_0' が非コンパクトならば (1) は連続スペクトルを含むことが多く，その具体的な記述はごく限られた場合にしか得られていない．

群の分岐則の問題と対応する代数的な問題として $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 (または Harish-Chandra 加群) の分岐則の問題が考えられる．θ を σ と可換な G_0 の Cartan 対合とすると，その G_0' への制限も Cartan 対合になる．θ による固定部分群 $K_0 := (G_0)^\theta$ は G_0 の極大コンパクト部分群である．$\mathfrak{g}$ を G_0 のリー環 $\mathfrak{g}_0$ の複素化，K を K_0 の複素化とする．同様に $\mathfrak{g}'$ と K' を G_0' に応じて定める．

$(\mathfrak{g}, K)$ 加群は G_0 の表現の代数的な対応物であるが，G_0 から G_0' への表現の制限と類似した代数的な問題として，$(\mathfrak{g}, K)$ 加群から $(\mathfrak{g}', K')$ 加群への制限を考えることができる．$(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V に対して，その制限 $V|_{(\mathfrak{g}', K')}$ が有限長の $(\mathfrak{g}', K')$ 加群の和で表せるとき，$V|_{(\mathfrak{g}', K')}$ は離散分解可能であるという．$(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V がユニタリ化可能であって，かつ離散分解可能なとき，対応する群の表現の制限 (1) は連続スペクトルを含まず，さらに二つの分岐則の問題は等価になることが知られている．従って離散分解の条件の下では，群のユニタリ表現の分岐則を $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の分岐則から調べることができる．$(\mathfrak{g}, K)$ 加群の離散分解性の概念は小林俊行氏によって導入され，その判定条件も得られている．

導来関手加群 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ とは，$\mathfrak{g}$ の θ 安定な放物型部分代数 $\mathfrak{q}$ とその指標 λ に対して，ある種の誘導の操作によって定義される $(\mathfrak{g}, K)$ 加群である．一般に L を K の簡約部分群，$\mathfrak{h}$ を L の随伴作用で安定な $\mathfrak{g}$ の部分リー環とするとき，$(\mathfrak{h}, L)$ 加群から $(\mathfrak{g}, K)$ 加群への誘導関手 $V \mapsto P_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V) := R(\mathfrak{g}, K) \otimes_{R(\mathfrak{h},L)} V$ が定義される．ここで，$R(\mathfrak{g}, K), R(\mathfrak{h}, L)$ はそれぞれ組 $(\mathfrak{g}, K), (\mathfrak{h}, L)$ に関して定まる Hecke 代数である．この d 次左導来関手を $(P_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K})_d$ と書く．上の設定で $\bar{\mathfrak{q}}$ を $\mathfrak{q}$ の $\mathfrak{g}_0$ に関する複素共役とし，L を正規化群 $N_{K_0}(\mathfrak{q})$ の複素化とする．また $\mathbb{C}_\lambda$ を $\bar{\mathfrak{q}}$ の指標，$s = \frac{1}{2}(\dim K - \dim L)$ とすると，Zuckerman 導来関手加群 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) := (P_{\bar{\mathfrak{q}},L}^{\mathfrak{g},K})_s(\mathbb{C}_\lambda)$$

と定義される (実際にはパラメータのシフトがあるがここでは簡単のため略す)．さらに λ が weakly fair と呼ばれる正値性に関する条件を満たすとき，$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ はユニタリ化可能であることが知られている．$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の形で表される表現のクラスは，離散系列表現や非自明な $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーをもつユニタリ表現のクラスを含んでおり，簡約リー群のユニタリ表現の中で重要な位置を占めている．

本論文では Zuckerman 導来関手加群の対称対に関する制限 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)|_{(\mathfrak{g}', K')}$ が離散分解する場合に，既約 $(\mathfrak{g}', K')$ 加群への分解を得ることを目標としている．以下にその出発点となる定理を述べる．簡単のため G_0 は連結で複素化 G を持つとし，$\overline{Q}$ をリー環が $\bar{\mathfrak{q}}$ に対応する G の連結部分群とする．等質空間 $K/(\overline{Q} \cap K)$ は K についての一般旗多様体になり，有限個の K' 軌道にわかれる．軌道分解を $K/(\overline{Q} \cap K) = \bigsqcup_{j=1}^{n} Y_j$ とし，各 j について代表元 $k_j \in K$ を $Y_j = K'k_j(\overline{Q} \cap K)$ となるようにとる．さらに，

$$\bar{\mathfrak{q}}_j := \mathrm{Ad}(k_j)\bar{\mathfrak{q}}, \qquad \overline{Q}_j := k_j \overline{Q} k_j^{-1},$$
$$s_j := \dim K/(\overline{Q} \cap K) - \dim Y_j, \quad u_j := \dim(\overline{Q}_j \cap K') - \dim C_j'$$

とおく．ここで C_j' は $\overline{Q}_j \cap K'$ の極大簡約部分群である．

定理. λ が weakly fair で $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ が 0 でなく，さらに制限 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)|_{(\mathfrak{g}', K')}$ が離散分解可能であるとする．このとき，次の $(\mathfrak{g}', K')$ 加群の指標についての等式 (あるいは $(\mathfrak{g}', K')$ 加群の Grothendieck

群における等式) が成り立つ.

$$\left[A_{\mathfrak{q}}(\lambda)|_{(\mathfrak{g}',K')}\right] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} (-1)^{d+s_j+u_j} \left[(P^{\mathfrak{g}',K'}_{\bar{\mathfrak{q}}_j\cap\mathfrak{g}',C'_j})_d\Big(\mathbb{C}_\lambda \otimes S\big(\mathfrak{g}/(\bar{\mathfrak{q}}_j+\mathfrak{g}')\big)\Big)\right]. \tag{2}$$

等式 (2) の左辺 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)|_{(\mathfrak{g}',K')}$ は，$(\bar{\mathfrak{q}},L)$ 加群 $\mathbb{C}_\lambda$ を $(\mathfrak{g},K)$ 加群に誘導してから $(\mathfrak{g}',K')$ 加群に制限したものである．一方，右辺の各項は $\mathbb{C}_\lambda$ を $(\bar{\mathfrak{q}}_j\cap\mathfrak{g}',C'_j)$ 加群に制限して $\mathfrak{g}/(\bar{\mathfrak{q}}_j+\mathfrak{g}')$ の対称テンソル $S(\mathfrak{g}/(\bar{\mathfrak{q}}_j+\mathfrak{g}'))$ をテンソルしてから $(\mathfrak{g}',K')$ 加群に誘導したものである．

$$\begin{tikzcd} (\bar{\mathfrak{q}},L) \arrow[r, "\text{誘導}"] \arrow[d, "\text{制限}"'] & (\mathfrak{g},K) \arrow[d, "\text{制限}"] \\ (\bar{\mathfrak{q}}_j\cap\mathfrak{g}',C'_j) \arrow[r, "\text{誘導}"'] & (\mathfrak{g}',K') \end{tikzcd}$$

つまり大雑把には，定理は誘導の制限を制限の誘導によって表したものであると言える．

具体的な分岐則の導出のためには，さらに等式 (2) の右辺を書き直す必要がある．離散分解可能な $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)|_{(\mathfrak{g}',K')}$ の分類 (小林俊行氏と共同) を用いて，各場合ごとに考察することによって，制限 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)|_{(\mathfrak{g}',K')}$ は G'_0 についての Zuckerman 導来関手加群 $A_{\mathfrak{q}'}(\lambda')$ の直和に分解することがわかる．すなわち分岐公式は

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)|_{(\mathfrak{g}',K')} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{q}'}\bigoplus_{\lambda'} m(\mathfrak{q}',\lambda')A_{\mathfrak{q}'}(\lambda'), \quad m(\mathfrak{q}',\lambda')\in\mathbb{N}$$

の形になる．

定理の等式 (2) の証明には，旗多様体上の $\mathcal{D}$ 加群による $(\mathfrak{g},K)$ 加群の幾何学的実現を用いる．Beilinson–Bernstein 対応によれば，任意の既約 $(\mathfrak{g},K)$ 加群は旗多様体上の既約な K 同変ねじれ $\mathcal{D}$ 加群として実現される．さらに，Borel 部分代数から上記の誘導で得られる $(\mathfrak{g},K)$ 加群と，K 同変な標準ねじれ $\mathcal{D}$ 加群との対応が，Hecht–Miličić–Schmid–Wolf による双対定理として得られている．我々はより一般の設定で，$(\mathfrak{g},K)$ 加群の誘導を等質空間上の $(\mathfrak{g},K)$ 作用つきの層のコホモロジー空間に実現し，それに基づいて分岐則の定理を示す．まず $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は，K の旗多様体 $K/(\overline{Q}\cap K)$ 上の直線束を G の旗多様体 $G/\overline{Q}$ に $\mathcal{D}$ 加群の意味で押し出した層の大域切断として実現される．次に，この層を $K/(\overline{Q}\cap K)$ の K' 軌道分解に応じて分解する．すると，こうして得られた各軌道に対応した層のコホモロジー空間は，$(\bar{\mathfrak{q}}_j\cap\mathfrak{g}',C'_j)$ 加群から誘導された $(\mathfrak{g}',K')$ 加群と同型になるため等式 (2) が示される．