論文の内容の要旨

論文題目: Proper actions and designs on homogeneous spaces (等質空間上の固有な作用とデザイン)

氏名: 奥田隆幸

本論文は六つの章からなり, その中でも主要な結果は Chapter 1 と Chapter 6 のものである. 以降, それらについての要旨を述べる. その他の章の内容については Chapter 1 の要旨の後で簡単にまとめる.

Chapter 1 の要旨

G を線形半単純 Lie 群とし, 対称対 (G, H) を考える. G の離散部分群 Γ が対称空間 G/H に固有不連続に作用しているとき, Γ を G/H の不連続群と呼ぶ. 不連続群は局所対称空間の大域構造と密接に関連しており, 幾何学的な動機から重要な研究テーマとなっている. 特に次の問題は, 対称空間 G/H の不連続群の研究における一つの中心的な問題とされている:

問: G/H の不連続群はどのくらい豊富にあるか?

まず, H がコンパクトの場合には, G/H はリーマン対称空間となり, G の任意の離散部分群が G/H の不連続群となる. 特にこの場合には G/H は必ず余コンパクトな不連続群を持つ [A. Borel, Topology (1962)]. 一方, H が非コンパクトの場合には, G/H の (G-不変) 計量は不定値となり, G の離散部分群であっても G/H の不連続群とは限らない.

H が非コンパクトである場合の不連続群の系統的な研究は, 80 年代後半の小林俊行の仕事に端を発する. とりわけ, Borel の結果と対照的な定理として, 簡約対 (G, H) についての以下の小林の結果 [Math. Ann. (1989)] が重要である (簡約対は半単純対称対よりも一般的な設定であることに注意):

小林 [1] の結果

簡約対 (G, H) に対して次の三条件は同値：

- G/H は可換 Lie 群 $\mathbb{R}$ の固有作用を持つ.
- G/H は無限不連続群を持つ.
- $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} G > \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} H$.

特に, $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} G = \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} H$ となる簡約対 (G, H) に対しては, G/H の不連続群は有限群に限る. その後, 「$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} G > \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} H$ を満たす個々の (G, H) に対して, どのくらい豊富に不連続群が存在するか? 特に余コンパクトな不連続群はあるか?」という問題について, 小林を始め, F. Labourie, J. Zimmer, G. Margulis, Y. Benoist など著名な数学者達による様々な分野の手法を用いた結果が得られている. しかし, この問題は完全な解決には至っていない.

小林の上述の結果では, G/H が無限不連続群を持つための必要十分条件を与えていたが, それに続く研究として, Y. Benoist [Ann. Math. (1996)] は G/H が <u>本質的に非可換な不連続群</u> を持つための必要十分条件を与えている. ただしここでは, **群が指数有限な可換部分群を持たないときに "本質的に非可換" ということにする**.

本論文では, (G, H) が半単純対称対である場合に, 上述の小林, Benoist の結果に加え, 関口次郎 [J. Math. Soc. Japan (1987)] の結果などを援用して, 次の定理を示す:

Chapter 1 の主定理 (Theorem 1.1.3)

半単純対称対 (G, H) に対して次の三条件は同値：

- G/H は $SL(2, \mathbb{R})$ の固有作用を持つ.
- G/H は本質的に非可換な不連続群を持つ.
- (G, H) に依存する特定の条件を満たす複素冪零軌道が $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 内に存在する (ただし $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は G の Lie 環の複素化を表す).

特に重要な点は, G/H が $SL(2, \mathbb{R})$ の固有な作用を持たなければ, 本質的に非可換な離散群 (例えば曲面群 $\pi_1(\Sigma_g)$ $(g \geq 2)$ やランク 2 以上の自由群など) は G/H に固有不連続に作用し得ないという主張である.

更に本論文では冪零軌道の組合せ論的側面に注目することにより, **上記の同値な条件を満たす半単純対称対 (G, H) の (局所的な意味での) 分類も与える** (Appendix 1.A の表を参照). また, この分類を用いて, 余コンパクトな不連続群を持たない半単純対称空間 G/H の例であって, 文献の中に見つけられないものをいくつか発見した (Table 1.2 in Section 1.2). ただし, これらの例

は Benoist の結果から直接計算によっても得られることを付け加えておく.

Chapter 2,3,4,5 について

Chapter 2,3,4,5 の内容は全て Chapter 1 と関連する話題である. まず Chapter 2 では, "実冪零軌道は $SL(2,\mathbb{R})$ の固有な作用を構成するのに十分なほど沢山ある" という意味の命題を証明する. この命題は Chapter 1 の主結果の証明に用いられる (Chapter 1 ではスケッチのみ与える). Chapter 3 では, (G,H) が対称対という条件を外して簡約対という設定で考えると, 一般には Chapter 1 の主定理が成り立たないことを示す. Chapter 4 では, 対称空間の直積 $G/H_1 \times G/H_2$ に対して, G の対角的な作用が固有になるための必要十分条件を与え, その分類を行う. その際用いるテクニックは Chapter 1 と同じものである. Chapter 5 では, Chapter 1 で得た冪零軌道についての考察を用いて, 「実単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の極小実冪零軌道の複素化が, 複素冪零軌道としては極小でない」という場合について, その複素冪零軌道を具体的に決定する.

Chapter 6 の要旨

Chapter 6 では等質空間上のデザインを主テーマとする. その主結果として, **3 次元球面 S^3 上の球面デザインの新たな構成法を得る**.

以下では球面デザインについて簡単に復習しよう. d-次元単位球面 $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ に対して, S^d の有限部分集合 X が t-デザインであるとは, 任意の t-次以下の多項式関数 f (defined on $\mathbb{R}^{d+1}$) に対して,

$$f \text{ の } X \text{ 上の平均} = f \text{ の } S^d \text{ 上の平均}$$

が成り立つこととして定義される [Delsarte–Goethal–Seidel, Geom. Dedicata 6 (1977)]. これは有限集合 X が S^d を "よく近似している" ということを定式化した概念である. 特に d, t を固定したとき, **X の濃度は小さいほど良い**とされる.

d, t を固定したとき**「如何にして S^d 上の t-デザインを構成するか？しかも濃度はなるべく小さく抑えたい」**という一つの中心的な問題を考えよう. $d = 1$ の場合は正 $(t+1)$-角形を S^1 上に配置すれば, これは t-デザインとなり, しかもこれが最小濃度である. しかし, $d \geq 2$ で t がある程度大きいときには, S^d 上の t-デザインを具体的に構成することは簡単ではない. 特に $d = 2$ の場合の t-デザインの具体的な構成については, Chen–Frommer–Lang [Numer. Math. (2011)] により, t が 100 以下のときに, S^2 上の t-デザインで濃度が $(t+1)^2$ となるものが構成されている. しかし, このような構成が任意の t で可能かどうかについては未解決である.

ここで, S^d **上の球面** t**-デザインの最小濃度を** $N_{S^d}(t)$ **と書こう**. d を固定すれば, $N_{S^d}(t)$ は t についての増加関数である. 以降では $N_{S^d}(t)$ の漸近挙動についてについて考えたい.

S^d 上の t-デザインの構成に有効な方法の一つは, 開区間 $(-1,1)$ 上に "ある重み関数 ω_d についての区間 t-デザイン" と呼ばれるものと, S^{d-1} 上の t-デザインを掛け合わせて, S^d 上の t-デザインを構成するという手法である ([Rabau–Bajnok, J. Applox. Theory (1991)], [Wagner, Monatsh. Math. (1991)]). 特に Kujilaars [Indag. Math. (1993)] はこの構成法を用いて

$$N_{S^d}(t) \ll t^{\frac{d(d+1)}{2}}$$

であることを示した. ただしここで, $f(t) \ll g(t)$ であることを, ある正定数 C が存在して, $f(t) < Cg(t)$ が任意の $t > 0$ について成り立つこととしている.

本論文では, 次の定理を示す:

Chapter 6 の主定理 (Theorem 6.1.4)

$\pi : S^3 \to S^2$ を Hopf 写像とする. S^2 上の球面 t-デザイン Y が一つ与えられたとき, S^3 の球面 $2t$-デザイン X であって, $\pi(X) = Y$ かつ $|X| = (2t+1)|Y|$ となるものを構成できる.

特にこの定理と $d = 2$ の場合の Kuijlaars の結果から, 次が分かる:

$$N_{S^3}(t) \ll t^4.$$

(しかし, V. A. Yudin らによる $N_{S^d}(t) \ll t^d$ という予想の $d = 3$ の場合の証明には至らなかった.)

この主定理の証明のため, 本論文では一般論として, **"底空間上のデザインと各ファイバー上のデザインの掛け合わせで全体空間のデザインが構成できる"** という手法を定式化する (Section 6.3 を参照). この手法は上述の区間 t-デザインを用いる構成法を一般化したものと思うこともできる.

特に, 主結果の設定において, S^3 はコンパクト Lie 群 ($\simeq SU(2)$) であり, S^2 が S^3 の等質空間であることに着目し, G を一般のコンパクト Lie 群, G/K を G の等質空間とした場合に, G, G/K 上のデザインをそれぞれ定義し, 上記の定理の一般化も考察する (Theorem 6.5.8).

References

[1] Toshiyuki Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), 249–263.