論文の要旨

論文題目: Topology, symplectic geometry and complex geometry of solvmanifolds —-From nilpotent to solvable—- (和訳: 可解多様体のトポロジー、シンプレクティック幾何学および複素幾何学 —-冪零から可解へ—-)

糟谷　久矢

G を単連結可解リー群とする。G はココンパクトな離散群部分群 Γ を持つとする。この時コンパクト等質空間 G/Γ を可解多様体という。特に G が冪零ならば、G/Γ を冪零多様体と呼ぶ。冪零多様体はその幾何構造を調べるのに非常に性質のよい多様体であり、特に冪零多様体のシンプレクティック幾何学や複素幾何学に関して多くの結果が得られている。冪零多様体で成り立つ定理を可解多様体上に拡張することは、自然な問題であり、現代幾何学において重要な課題である。

本論文の目標は、冪零多様体の幾何学における最も基本的な定理である Nomizu の定理、およびその定理の Sullivan の de Rham ホモトピーへの応用である Hasegawa の定理、また、symplectic 幾何学への応用である Benson-Gordon の定理とコホモロジー的 symplectic 冪零多様体の symplectic 性定理の可解多様体への拡張を与えることである。さらに本論文では、Sakane, Cordero-Fernández-Gray-Ugarte, Console-Fino 等による、Nomizu の定理のアナロジーとしての冪零多様体の Dolbeault コホモロジーの計算法をある種の可解多様体に適用できるように拡張する。

1　背景

G/Γ を冪零多様体とする。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする。$\mathfrak{g}$ の双対複体 $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ を G/Γ 上の左不変な微分形式がなす、G/Γ の de Rham 複体 $A^*(G/\Gamma)$ の部分複体と見なす。野水 [7] により、自然な埋め込み $\bigwedge \mathfrak{g}^* \subset A^*(G/\Gamma)$ はコホモロジーの同型 $H^*(\mathfrak{g}) \cong H^*(G/\Gamma)$ を誘導することが知られている。これより、Sullivan の de Rham ホモトピー理論より、$\bigwedge \mathfrak{g}^*$ は $A^*(G/\Gamma)$ の minimal model であることがわかる。このことを応用して、長谷川 [6] により、$A^*(G/\Gamma)$ が Sullivan の意味で formal であれば、G は abelian 特に G/Γ はトーラスであることが知られている。

野水の定理は冪零多様体の symplectic 幾何学に重要な応用がある。$2n$-次元多様体 M が 2 次コホモロジー類 $[\omega] \in H^2(M)$ で $[\omega]^n \neq 0$ を満たすものを持つとき、M はコホモロジー的に symplectic であると言う。野水の定理により、冪零多様体がコホモロジー的に symplectic であれば真に symplectic であることがわかる。Benson-Gordon[2] により、symplectic 冪零多様体 G/Γ が Hard Lefschetz 性を満たせば、G は abelian 特に G/Γ はトーラスであることが知られている。

野水の定理の Dolbeault コホモロジーに関するアナロジーを考えることができる。G/Γ が左不変な複素構造 J を持つとき、複素数値左不変な微分形式がなす微分形式 $\bigwedge \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{C} = \bigwedge^{*,*} \mathfrak{g}^*$ は G/Γ の Dolbeault 複体 $(A^{*,*}(G/\Gamma), \bar{\partial})$ の部分複体となる。これに対して、Sakane[8], Cordero-Fernández-Gray-Ugarte[4], Console-Fino[3] 等により、いくつかの条件の下で、自然な埋め込み $\bigwedge^{*,*} \mathfrak{g}^* \subset A^{*,*}(G/\Gamma)$ はコホモロジーの同型 $H^{*,*}_{\bar{\partial}}(\mathfrak{g}) \cong H^{*,*}_{\bar{\partial}}(G/\Gamma)$ を導くことが知られている。

2 主結果

Hain[5] は多様体の基本群の対角型表現に対して、その表現の像の Zariski-閉包を用いて、ある局所系に値をとる微分形式の複体を定義し、この空間が冪零ではない空間の de Rham ホモトピー理論を考えるのに有効である事を示唆した。本論文では、この Hain の定義した複体を用いて、de Rham ホモトピー的な意味で、野水の定理を可解多様体に拡張する。

G/Γ を可解多様体とする。G の随伴表現 Ad の"対角部分"をとる事によって、G の対角型表現 $\mathrm{Ad}_s : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を定義し、代数群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の中で像 $\mathrm{Ad}(G)$ の Zariski-閉包 $\mathbf{T}$ をとる。G/Γ の基本群は Γ であるので、Ad_s と $\mathbf{T}$ により Hain の複体が定義できる。これを $A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\mathrm{Ad}_s})$ とかく。$A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\mathrm{Ad}_s})$ の左不変な元全体の空間 $A^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathrm{ad}_s)$ は部分複体として、ある対角表現に値をとるリー環の双対複体であり、これに $\mathbf{T}$ が作用している。この $\mathbf{T}$-作用で不変な元全体の空間 $A^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathrm{ad}_s)^{\mathbf{T}}$ を考えると次が成り立つ。

定理 1 自然な埋め込み $A^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathrm{ad}_s)^{\mathbf{T}} \subset A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{Ad_s})$ はコホモロジーの同型を導く。また、G から定まる *unipotent hull* と呼ばれる *unipotent* 代数群 $\mathbf{U}_G$ の *Lie* 代数 $\mathfrak{u}$ の双対複体 $\bigwedge \mathfrak{u}^*$ は $A^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathrm{ad}_s)^{\mathbf{T}}$ と同型である。

よって、$\bigwedge \mathfrak{u}^*$ は $A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{Ad_s})$ の *minimal model* である。

この結果により、長谷川の定理の拡張として、次が得られる。

定理 2 次の 2 条件は同値：
- $A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{Ad_s})$ が *formal* である。
- $G = \mathbb{R}^n \ltimes_\phi \mathbb{R}^m$ (ϕ は半単純な作用）と書ける。

また、Benson-Gordon の定理の拡張として次が得られる。

定理 3 可解多様体 G/Γ はシンプレクティックであるとする。このとき 次の 2 条件は同値：
- $A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{Ad_s})$ のコホモロジーに関して *hard Lefschetz* 性が成り立つ。
- $G = \mathbb{R}^n \ltimes_\phi \mathbb{R}^m$ (ϕ は半単純な作用）と書ける。

本論文ではさらに、次の事を示す。

定理 4 可解多様体がコホモロジー的に *symplectic* であれば真に *symplectic* である。

Baues[1] は、任意の torsion-free polycyclic 群 Γ に対し、Γ から定まるある冪零リー群 U_Γ へのココンパクトで離散的なアフィン作用を定義し、Γ を基本群に持つコンパクト aspherical 多

様体 $M_\Gamma = U_\Gamma/\Gamma$ を構成した。本論文では冪零多様体のアナロジーとして、コホモロジー的に symplectic な M_Γ は実際にシンプレクティックである事を示す。とくに、Baues の構成したコンパクト aspherical 多様体 M_Γ のクラスは可解多様体のクラスを含んでいるので、系として上記定理が成り立つ。

冪零の場合とは異なり、複素可解多様体の Dolbeault コホモロジーの計算法はほとんど知られていなかった。本論文では、特別な条件を満たす場合に Dolbeault コホモロジーの計算法を与える。

G は半直積 $\mathbb{C}^n \ltimes_\phi N$ であり、次の仮定を満たす物とする。

(1)N は不変複素構造 J を持つ単連結冪零リー群

(2) 各 $t \in \mathbb{C}^n$ に対し, $\phi(t)$ は (N, J) に正則に作用する。

(3) ϕ は N のリー環 $\mathfrak{n}$ に半単純に作用する。

(4)G は格子 $\Gamma = \Gamma' \ltimes \Gamma''$ を持つ。

(5) 埋め込み $\bigwedge^{*,*} \mathfrak{n}^* \subset A^{*,*}(N/\Gamma_N)$ はコホモロジーの同型 $H_{\bar\partial}^{*,*}(\mathfrak{n}) \cong H_{\bar\partial}^{*,*}(N/\Gamma_N)$ を導く。

この時、G/Γ 上の正則直線束の直和 $\bigoplus_{L_\beta} L_\beta$ に値をとる Dolbeaut 複体

$$\bigoplus_{L_\beta} A^{*,*}(G/\Gamma, L_\beta)$$

を考える事によって、次の事を示す。

定理 5 $\bigoplus_{L_\beta} A^{*,*}(G/\Gamma, L_\beta)$ の有限次元部分複体 $A^{*,*}$ で自然な埋め込み

$$A^{*,*} \subset \bigoplus_{L_\beta} A^{*,*}(G/\Gamma, L_\beta)$$

がコホモロジーの同型を導くものが構成できる。

特に、$A^{*,*}$ の元で、自明な正則直線束に値をとる元の全体を $B_\Gamma^{*,*}$ とすると、$B_\Gamma^{*,*}$ は *Dolbeault* 複体 $A^{*,*}(G/\Gamma)$ の有限次元部分複体 $B_\Gamma^{*,*}$ で、自然な埋め込み $B_\Gamma^{*,*} \subset A^{*,*}(G/\Gamma)$ がコホモロジーの同型 $H_{\bar\partial}^{*,*}(B_\Gamma^{*,*}) \cong H_{\bar\partial}^{*,*}(G/\Gamma)$ を導く。

参考文献

[1] O. Baues, *Infra-solvmanifolds and rigidity of subgroups in solvable linear algebraic groups*, Topology **43** (2004), no. 4, 903–924.

[2] C. Benson, and C. S. Gordon, *Kähler and symplectic structures on nilmanifolds*, Topology **27** (1988), no. 4, 513–518.

[3] S. Console, A. Fino, *Dolbeault cohomology of compact nilmanifolds*, Transform. Groups **6** (2001), no. 2, 111–124.

[4] L. A. Cordero, M. Fernández, A. Gray, L. Ugarte, *Compact nilmanifolds with nilpotent complex structures: Dolbeault cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 12, 5405–5433.

[5] R. M. Hain, *The Hodge de Rham theory of relative Malcev completion*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **31** (1998), no. 1, 47–92.

[6] K. Hasegawa, *Minimal models of nilmanifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 1, 65–71.

[7] K. Nomizu, *On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups*, Ann. of Math. (2) **59**, (1954). 531–538.

[8] Y. Sakane, *On compact complex parallelisable solvmanifolds. Osaka J. Math*, **13** (1976), no. 1, 187–212.