論文の内容の要旨

論文題目　Construction of holomorphic local conformal framed nets
(局所共形正則枠付きネットの構成)

氏名　SUTHICHITRANONT　Noppakhun

状態と物理量の概念は、量子物理学の基本である。代数的場の量子論では、状態はヒルベルト空間のベクトルで、物理量はヒルベルト空間上の自己共役作用素で定義されている。観測が一定の時空領域で行われるため、物理量は各固有の時空領域で定義される。これらのアイデアは作用素環の言語を使用して数学的な構造に翻訳される。1+1 次元ミンコフスキー時空上の共形対称性を持っている場合は、フル共形場理論といわれている。作用素環の言語では、$\{A(O)\}_O$ の von Neumann 環のファミリーを考える。O は x=±t に平行な辺を持つ長方形でダブルコーンと呼ばれる。ファミリー$\{A(O)\}_O$ は　単調性、局所性、共形共変性、真空状態の存在とエネルギーの正値性を満たす。局所性は空間的な分離を用いて定義される。ファミリー$\{A(O)\}_O$ は局所共形ネットとよばれる。ファミリー$\{A(O)\}_O$ は 2 直線 x=±t に制限可能で、空間的な分離をもっと簡単な非交差性に代えられる。この処理により、二つのカイラル共形場理論ができる。

局所共形ネットは今$\{A(I)\}_I$ の形で A(I)が von Neumann 環で I が、円周 S^1 である「時空」の開区間である。同じ物理理論の別の数学的なアプローチとして頂点作用素代数の言語がある。頂点作用素は S^1 上の作用素値超関数のフーリエ級数展開で生じる。理論的には、I をサポートに持つ試験関数と頂点作用素を選べれば局所共形ネットに相当する数学的対象のファミリーを形成することが可能であると期待される。状態空間がヒルベルト空間である局所共形ネットと違って頂点作用素代数理論では状態空間の内積の存在と完備性が仮定されていない。これは 2 つの数学的対象が相互に対応するかどうかの未解決問題を動機づける。すなわち、一つの数学的対象の例があれば他方の数学的対象への対応が見つかるべきである。この未解決問題に対する答えは、少なくともいくつかの余分な条件の下で、肯定的であることを支持するいくつかの証拠がある。たとえば両方の数学的対象には、アフィン Lie 環と Virasoro 代数に関連した例がある。また正定値格子 L が与えられると格子頂点作用素代数とそのひねりオービフォールドが構成できる。正定値格子 L からの局所共形ネットの構築は Staszkiewicz によって示されている。格子頂点作用素代数のひねりオービフォールドの作用素環的対応も Dong-Xu によって格子共形ネットを拡張することで構築されている。

中心電荷 c<1 の場合、Virasoro 共形ネット Vir_c と Virasoro 頂点作用素代数 L (c,0) は、多くの点で本質的に同じ数学的対象である。両方は、同じ表現論を持っており、その既約表現は同じ融合規則に従う。我々の主な興味はそれらのテンソル積の正則なシンプル・カレ

ント拡張である(自明な既約表現１つしか、表現を持っていないことによって定義される)。定義に基づき、枠付き頂点作用素代数は同じ共形元を持つ L（1/2,0）$^{\otimes n}$を部分代数として含んでいる。Lam と Yamauchi はバイナリコードのペア(C,D)を使用して中心電荷 1/2 の Virasoro 頂点作用素代数のテンソル積を正則枠付き頂点作用素代数に拡張した。ここでは、C は D の双対コードで、D が以下の条件を満たす：

1. n が正の整数で D の長さは 16n であること；
2. D の全要素の Hamming ウェイトは 8 で割り切れること；
3. 全部 1 の単語は D に含まれること。

この種類の拡張は L（1/2,0）$^{\otimes 16n}$に対して存在する。ここでは、C にある単語（c_1、c_2、…、c_{16n}）はモジュール$\otimes_i$ L（1/2,c_i/2）に対応し、D にある単語（d_1、d_2、…、d_{16n}）は，d_i=1 となるエントリーの共形ウェイトが 1/16 となるモジュールに対応する。

本稿では、Kawahigasi-Longo が定義した正則局所共形枠付きネットである、正則枠付き頂点作用素代数の作用素環的対応物であって，Lam-Yamauchi の例に対応するものを与える。局所共形枠付きネットは $Vir_{1/2}^{\otimes n}$の既約拡張として定義されている。 Kawahigasi-Longo が示したように、局所共形枠付きネットの構造は $Vir_{1/2}^{\otimes n}\rtimes Z_2^{l}\rtimes Z_2^{k}$のようなシンプル・カレント拡張である。我々は、以上の条件を満たすバイナリコードのペア（C、D）を用いて、中心電荷 1/2 の Virasoro 共形ネットのテンソル積から拡張された正則局所共形枠付きネットを構築する。$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}\rtimes C\rtimes D$ の存在を示すために、我々は $Vir_{1/2}^{\otimes n}\rtimes C$ の表現論を知って $Vir_{1/2}^{\otimes 16n}\rtimes C$ 上の D の適切な作用が存在するか否かを決定する必要がある。

局所共形ネットの表現は、自己準同型のユニタリ同値クラスであり、セクターと呼ばれる。カイラル共形場理論の場合、セクターρはA(I′)を不変とする自己準同型ρ_Iで構成されている。I′ はIの補集合の内点の集合である。局所共形ネット$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$は Kawahigashi-Longo-Muegerの意味で完全有理的である。それはすべての既約セクターの統計次元の二乗和というμ-indexが2^{32n} に等しい。$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}\rtimes C$ のμ-indexは $2^{32n}/|C|^2$ である。これは$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}\rtimes C$のすべての既約セクターの統計次元に条件を与えている。

シンプル・カレント拡張 $Vir_{1/2}^{\otimes 16n}\rtimes C$ は$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$の既約拡張である。Longo-Rehrenによって定義された$\alpha^{\pm}$-inductionは、$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$のセクターを$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}\rtimes C$のセクターに変換する。$\alpha^{\pm}$-inductionが各時空領域で$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}\rtimes C$から$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$までの自己準同型$\gamma$を使用して定義されているので$\alpha^{\pm}$-inductionはコードCに依存する。$\theta$は自己準同型$\gamma$を$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$に制限される自己準同型と定義される。自己準同型$\theta$はCに対応する$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$の既約セクターの多重度1の直和に分解される。$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$の既約セクターのシステムがRehrenの意味で非退化なので、$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}\rtimes C$の既約セクターは$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$の既約セクターの$\alpha^{\pm}$-inductionの既約サブセクターの共通部分である。最初に$\alpha_\rho^{+}=\alpha_\rho^{-}$を満たす$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$の既約セクターの$\alpha^{\pm}$-inductionを検討する。$\varepsilon^{\pm}$が統計作用素なら$\alpha_\rho^{+}=\alpha_\rho^{-}$と$\varepsilon^{\pm}(\rho,\theta)\ \varepsilon^{\pm}(\rho,\theta)=1$は同値である。我々は$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$のS-行列を検討し、各$\theta$のサブセクター$\sigma$が$\varepsilon^{\pm}(\rho,\sigma)\ \varepsilon^{\pm}(\rho,\sigma)=1$を満たすかどうかを確認する。ある既約セクターはいくつかの他の既約セクターの同

一$\alpha^{\pm}$-inductionを与える可能性が有る。$\alpha^{\pm}$-inductionが既約性を保持しないから、一部の$\alpha^{\pm}$-inductionは$Vir_{1/2}^{\otimes 16n} \rtimes C$の既約セクターの直和に分割される。$Vir_{1/2}^{\otimes 16n} \rtimes C$の$\mu$-indexを応用し、$Vir_{1/2}^{\otimes 16n} \rtimes C$の既約セクターを識別する。

CがDの双対コードで$Vir_{1/2}^{\otimes 16n} \rtimes C \rtimes D$の場合、この問題は三重偶バイナリコードDの基数に応じて3つのケースに分かれている。Dの基数が2又は４の場合、$Vir_{1/2}^{\otimes 2} \rtimes \{(0,0), (1,1)\}$に近く，Kawahigashi-Longoと同じ戦略を適用すると直接に答えが得られる。もっと大きいDの場合、1以上の統計的次元を持つ既約セクターを与えるかもしれないので$\alpha^{\pm}$-inductionからμ-indexへの寄与に対処する困難がある。これが発生すると、そのような$\alpha^{\pm}$-inductionの既約サブセクターは同型でない。したがって、$D = D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_{p-1} \supset D_p = \{(0,0,...,0), (1,1,...,1)\}$の減少列を構築して数学的帰納法によって証明する。その減少列は双対コードに移って、$C = C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_{p-1} \subset C_p$を与える。ここでは、$|D_i| / |D_{i+1}| = 2$を満たす$D_i$を選択して$D_{p-1}$は（1,1, ... ,1）と単位元と（1,1, ... ,1）の違う単語βで生成される。$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$から$Vir_{1/2}^{\otimes 16n} \rtimes C_r$までの$\alpha^{\pm}$-inductionと$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$から$Vir_{1/2}^{\otimes 16n} \rtimes C$までと$Vir_{1/2}^{\otimes 16n} \rtimes C$から$Vir_{1/2}^{\otimes 16n} \rtimes C_r$までの二重$\alpha^{\pm}$-inductionは同じなので、単語$\beta$に関連する$Vir_{1/2}^{\otimes 16n}$のセクターが統計次元1の$Vir_{1/2}^{\otimes 16n} \rtimes C$の既約セクターを与えるという結論が描かれている。これを用いて目標の局所共形枠付きネットが構成される。