論文の内容の要旨

論文題目

MONOMIAL DEFORMATIONS OF CERTAIN HYPERSURFACES AND TWO HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

（和訳：　ある種の超曲面の単項的変形と２種の超幾何函数）

氏名：　宮谷和尭（みやたに かずあき）

本論文では，Dwork family を含むような有限体 $\mathbb{F}_q$ 係数の射影空間における Calabi–Yau 超曲面の族のクラスを与え，これらの族と２種類の超幾何函数との関連を調べる．

まず，登場する超幾何函数について説明する．

１つめは，通常の超幾何級数

$$ {}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix} A_1,\dots,A_{n+1} \\ B_1,\dots,B_n \end{matrix};x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A_1)_k\cdots(A_{n+1})_k}{(B_1)_k\cdots(B_n)_k(1)_k}x^k, $$

である（$(\cdot)_k$ は Pochhammer の記号である）．本論文には，パラメーター $A_1,\dots,A_{n+1},B_1,\dots,B_n$ が全て正の有理数である場合しか現れない．この級数は，$W(\mathbb{F}_q)$ 係数の級数とみなす．

２つめは，Greene [Gr] によって導入された「有限体上の超幾何函数」との関連である．この函数は，$\mathbb{F}_q^\times$ 上の指標 $A_1,\dots,A_{n+1},B_1,\dots,B_n$ をパラメーターとして，$\mathbb{F}_q^\times$ の元 x を

$$ {}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix} A_1,\dots,A_{n+1} \\ B_1,\dots,B_n \end{matrix};x\right)_{\mathbb{F}_q}=\frac{1}{q-1}\sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{F}_q^\times}}\prod_{i=1}^{n+1}\frac{G(A_i\chi)}{G(A_i)}\prod_{i=1}^{n}\frac{G(\overline{B_i\chi})}{G(\overline{B_i})}G(\overline{\chi})\chi(-1)^{n+1}\chi(x) $$

に対応されることで定義される（この定義は，正確には McCarthy [MC] による変種である）．ここで G は $\mathbb{F}_q$ の固定された非自明な加法的指標についての Gauss 和であり，この超幾何函数自体はこの加法的指標に依存しない．この「有限体上の超幾何函数」は，通常の超幾何函数に似たいくつかの変換公式を満たすのみならず，$\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{F}_q}\setminus\{1\}$ 上のある smooth $\overline{\mathbb{Q}_l}$-層の trace 函数として実現できるという特徴をもっている [K1].

さて，我々は，互いに異なるモニックな $n+1$ 個の $n+1$ 次単項式 $M_1,\dots,M_{n+1}\in\mathbb{F}_q[T_1,\dots,T_{n+1}]$ について

$$X_\lambda : c_1M_1+\cdots+c_{n+1}M_{n+1}-\lambda T_1T_2\dots T_{n+1}$$

と表される族を考える．ここで，M_i らのうちに $T_1T_2\dots T_{n+1}$ は現れず，$\lambda=0$ においてこの超曲面は smooth であるものとする（Dwork family は，各 $i=1,\dots,n+1$ について $c_i=1, M_i=T_i^{n+1}$ とおいたものであった）．Dwork family の対称性の高さに対して，我々の族は対称的ではないため，Dwork family を調べるのに用いる手法が通用するとは限らない．それにもかかわらず，本論文では，この族が上に挙げた 2 種類の超幾何函数と次のように関係していることを証明した．以下では，X_λ が smooth であるような $\mathbb{F}_q$ の元 λ を固定する．

1 つめの関係は次の通りである．すなわち，$H^{n-1}_{\mathrm{cris}}(X_\lambda/W(\mathbb{F}_q))$ の Newton polygon の最小スロープが 0 であるか否かを 1 つめの超幾何級数を用いて判定することができ，さらに 0 であるときには，X_λ の unit root をこの級数を用いた公式で表すことができる．これは，Dwork family については既に Yu [Y] により知られている結果であり，この結果はその直接的な一般化である（族の対称性の低さも，ここでは殆ど影響しない）．

2 つめの関係は次の通りである（本結果においては，λ についてさらに少しの条件を課す）．すなわち，X_λ の Hasse–Weil ゼータ函数を統制する多項式

$$\zeta(X_\lambda,x)^{(-1)^n}(1-x)(1-qx)\dots(1-q^{n-1}x)$$

は，$\mathbb{F}_q$ 上の超幾何函数からある方法で作られる多項式で割り切れ，また，この超幾何函数のパラメーターは，前段で対応させた通常の超幾何級数のパラメーターに対応するものである．Dwork family の場合においては，Katz [K2] や Goutet [Go1], [Go2], [Go3] による部分的な結果があるが，本論文における結果は Dwork family に限ってもこれらからは導出されないものである．証明における新しい手法は，X_λ の有理点の個数を数える際に，有限体の超幾何函数に関する Katz の前述の結果を援用することであり，これによって本質的でない部分の計算を簡略化し，族の対称性の有無にかかわらず上の結果を得ることに成功している．

参 考 文 献

[Go1] P. Goutet, "*Link between two factorizations of the zeta functions of Dwork hypersurfaces,*" preprint.

[Go2] P. Goutet, "*An explicit factorisation of the zeta functions of Dwork hypersurfaces,*" Acta Arithmetica **144**(3) (2010), 241–261.

[Go3] P. Goutet, "*Isotypic decomposition of the cohomology and factorization of the zeta functions of Dwork hypersurfaces,*" Finite Fields and Applications **17** (2011), 113–147.

[Gr] J. Greene, "*Hypergeometric functions over finite fields,*" Trans. Amer. Math. Soc. **301**(1) (1987), 77–101.

[K1] N. M. Katz, "*Exponential sums and differential equations,*" Ann. of Math. Studies. Princeton University Press, 1990.

[K2] N. M. Katz, "*Another look at Dwork family,*" Progr. Math. **270** (2009), 89–126.

[MC] D. McCarthy, "*Transformations of well-poised hypergeometric functions over finite fields,*" preprint, arXiv:1204.4377v2.

[Y] J.-D. Yu, "*Variation of the unit root along the Dwork family of Calabi–Yau varieties,*" Math. Ann. **343** (2009), 53–78.